This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

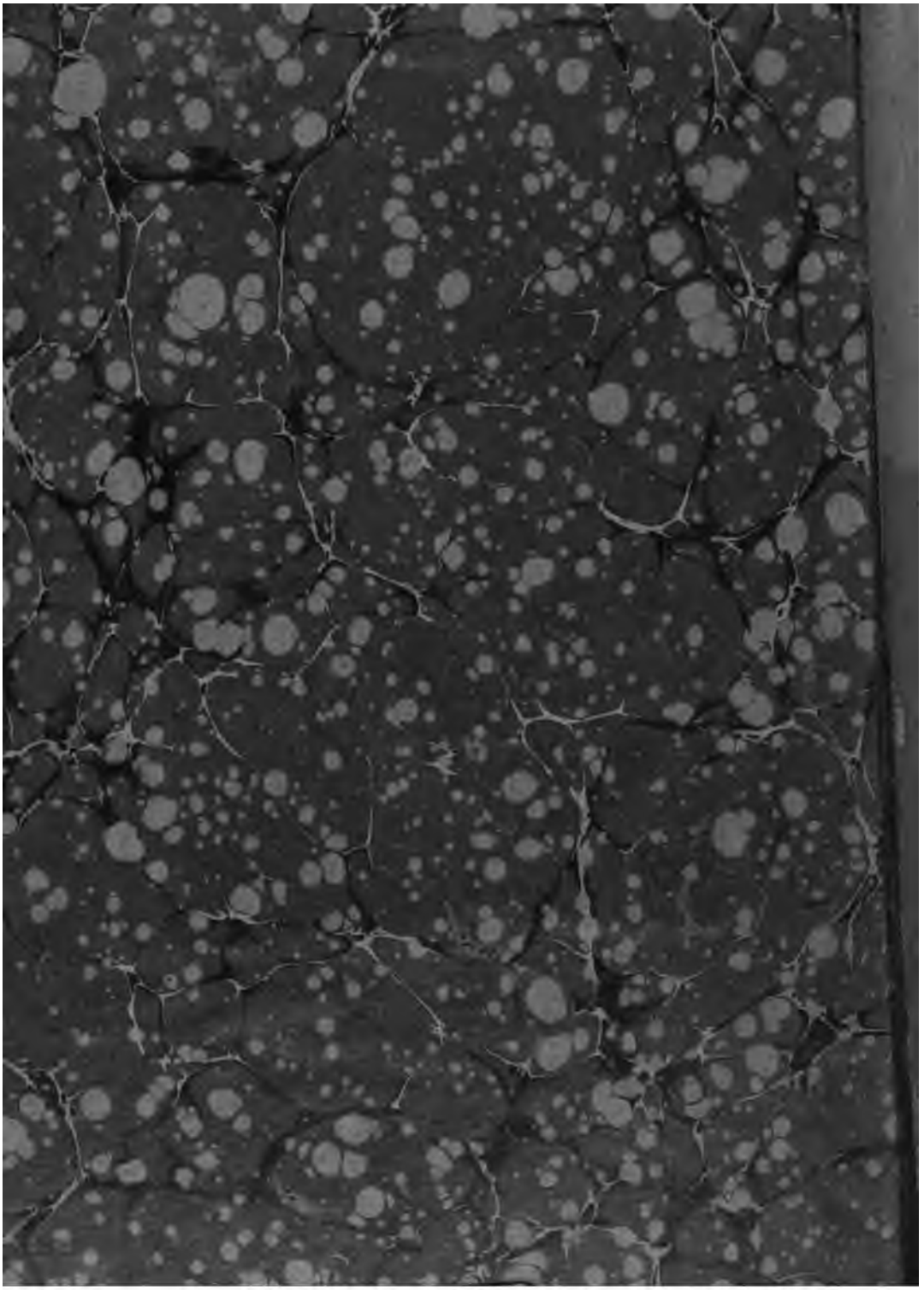
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

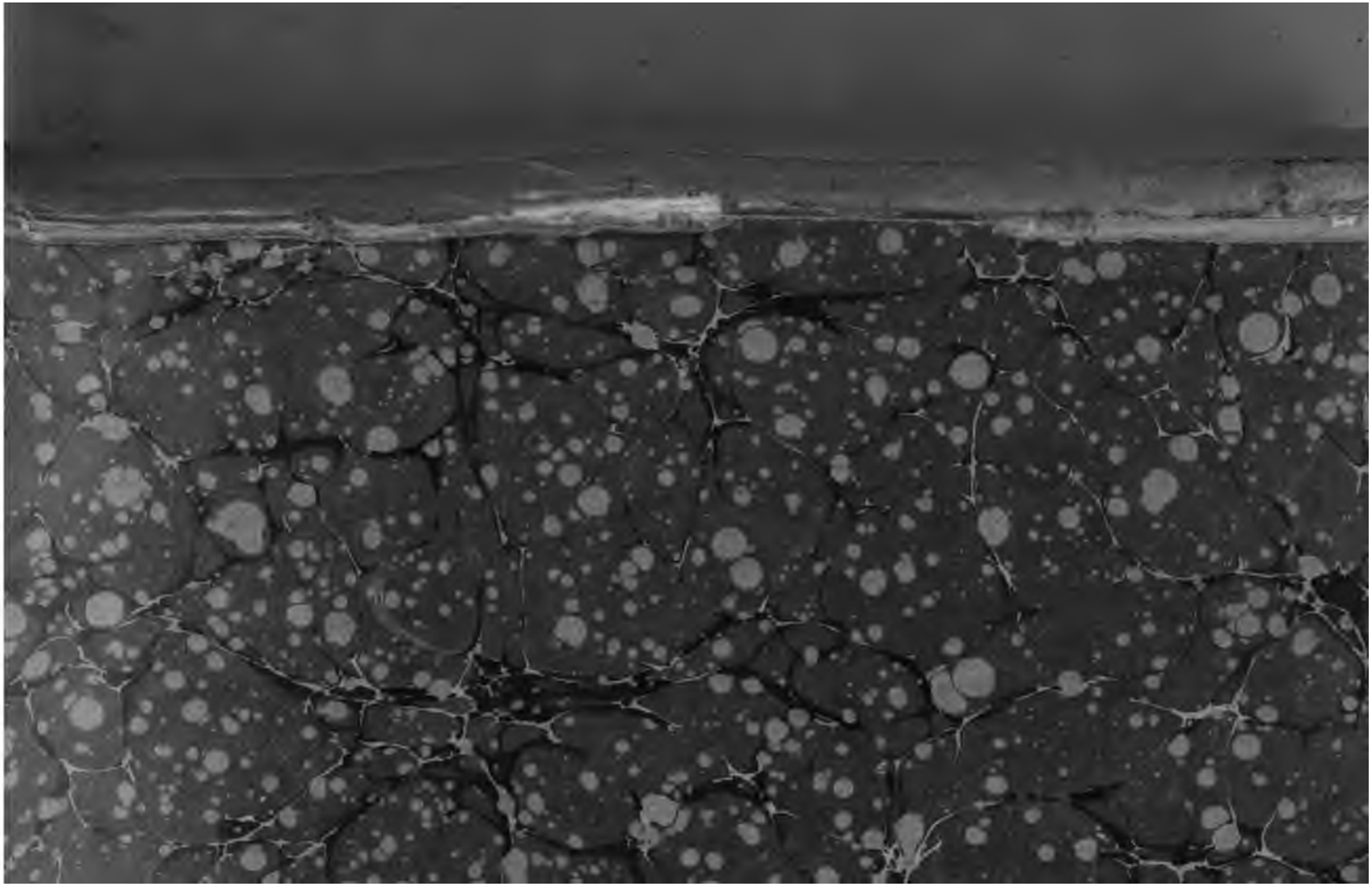
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Stanford University Libraries
3 6105 001 021 828





M426

3403-3478

Columbia Univ. NOV 8 1906

MATHEMATISCHE ANNALEN

BEGRÜNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN.

Unter Mitwirkung der Herren

PAUL GORDAN, ADOLPH MAYER, CARL NEUMANN, MAX NOETHER
KARL VONDERMÜHLL, HEINRICH WEBER

gegenwärtig herausgegeben

von

Felix Klein
in Göttingen

Walther v. Dyck
in München

David Hilbert
in Göttingen

Otto Blumenthal
in Aachen

63. Band. 1. Heft.

Mit 5 Figuren im Text.

Ausgegeben am 12. Oktober 1906.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1906.

☛ Generalregister zu den Mathematischen Annalen. Band 1—50. Zusammengestellt von A. Sommerfeld. Mit einem Bildnis von A. Clebsch in Heliogravüre. [XI u. 202 S.] gr. 8. geh. n. Mk. 7.—

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

yklopädie der Mathematischen Wissenschaften, mit Einschluß ihrer Anwendungen. Hrsg. im Auftrage der Akademien der Wissenschaften zu Göttingen, Leipzig, München und Wien, sowie unter Mitwirkung zahlreicher Fachgenossen. In 7 Bänden zu je 6—8 Heften. gr. 8. geh.

Bisher erschien:

Arithmetik und Algebra, 2 Teile, red. von W. Frz. Meyer.
I. Teil. [XXXVIII u. 354 S.] geh. ℳ 11.—
In Halbfranz geb. ℳ 20.—
II. Teil. [X u. S. 355—1187.] geh. ℳ 20.—
In Halbfranz geb. ℳ 22.—

Analysis, 2 Teile, red. von H. Burkhardt und W. Wirtinger.
I. Teil. Heft: 1. [168 S.] 1899. ℳ 4.80; 2. [168 S.] 1900. ℳ 7.60; 4. [160 S.] ℳ 4.80. 5. [192 S.] 1901. ℳ 6.—. 6. [57 S.] 1901. ℳ 1.60.
II. Teil. Heft: 1. [173 S.] 1901. ℳ 5.20.

Geometrie, 3 Teile, red. von W. Frz. Meyer.
II. Teil. Heft: 1. [168 S.] 1899. ℳ 4.80;
——— Heft: 2. [26 S.] 1901. ℳ 0.80.
——— Heft: 3. [190 S.] 1902. ℳ 5.60.
III. Teil. Heft: 1. [188 S.] 1903. ℳ 5.40;
——— Heft: 2. [188 S.] 1903. ℳ 5.20.

Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées sous les auspices des Académies de Göttingue, de Leipzig, Munich et de Vienne avec la collaboration de nombreux savants. Édition française rédigée et publiée d'après l'édition allemande sous la direction de Jules Molk professeur à l'université de Nancy. En sept tomes. gr. 8. Tome I: vol. IV. fasc. 1. [160 p.] 1904. n. ℳ 4.—, vol. III. fasc. 1. [96 p.] 1906. n. ℳ 4.—

Abraham, Dr. M., Privatdozent an der Universität Göttingen, Theorie der Elektrizität. I. Band: Einführung in die Maxwellsche Theorie der Elektrizität mit einem einleitenden Abschnitte über das Rechnen mit Vektorgrößen in der Physik. Von Dr. A. Föppl. Zweite, ungearbeitete Auflage von Dr. M. Abraham. 11 Figuren im Text. [XVIII u. 448 S.] gr. 8. 1904. In Leinw. geb. n. ℳ 10.—
II. Band: Elektromagnetische Theorie der Strahlung. Von Dr. M. Abraham. [X u. 404 S.] gr. 8. 1905. In Leinw. geb. n. ℳ 10.—

Ahrens, Dr. W., in Magdeburg, Scherz und Ernst in der Mathematik. Gesammelte und ungesammelte Worte. [X u. 322 S.] gr. 8. 1904. In Leinw. geb. n. ℳ 6.—
——— mathematische Unterhaltungen und Spiele. In Original-Leinwandband mit Zeichnung von P. Bürck in Darmstadt. [X u. 428 S.] gr. 8. 1906. In Leinw. geb. n. ℳ 7.—

Blaschke, Dr. E., Professor an der Technischen Hochschule zu Wien, Vorlesungen über mathematische Statistik. Die Lehre von den statistischen Massen. Mit 17 Textfiguren und 5 Tafeln. [VIII u. 269 S.] gr. 8. 1906. In Leinw. geb. n. ℳ 7.40.

Bruns, Dr. Heinrich, Professor der Astronomie an der Universität Leipzig, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kollektivmaßlehre. [VIII u. 332 S. mit Anhang 48 S.] gr. 8. 1906. In Leinw. geb. n. ℳ 8.40.

Bucherer, Dr. A. H., Privatdozent an der Universität Bonn, Elemente der Vektoranalysis. Mit 14 Figuren im Text. [VIII u. 103 S.] gr. 8. 1903. In Leinw. geb. n. ℳ 3.20.
——— Einführung in die Elektronentheorie. Mit 14 Figuren im Text. [VIII u. 148 S.] gr. 8. 1904. In Leinw. geb. n. ℳ 5.20.

Clebsch, A., Vorlesungen über Geometrie. Mit besonderer Berücksichtigung der Anschauungen von Dr. Aufl. [VIII u. 1022 S.] gr. 8. 1903. In Leinw. geb. n. ℳ 18.—

Cantor, Dr. Emanuel, Professor an der Technischen Hochschule in München. 1. Band. 1. Lieferung. [XIV u. 240 S.] gr. 8. 1900. geh. n. ℳ 12.—
Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung. [XIV u. 240 S.] gr. 8. 1900. In Leinw. geb. n. ℳ 12.—
1. Band. Mit 43 Figuren im Text. [XIV u. 240 S.] 1902. In Leinw. geb. n. ℳ 12.—
II. — Mit 81 Figuren im Text. [VIII u. 320 S.] 1901. In Leinw. geb. n. ℳ 12.—

Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, mit Einschluß ihrer Anwendungen. Hrsg. im Auftrage der Akademien der Wissenschaften zu Göttingen, Leipzig, München und Wien, sowie unter Mitwirkung zahlreicher Fachgenossen. In 7 Bänden zu je 6—8 Heften. gr. 8. geh.

IV. Mechanik, 2 Teile, red. von F. Klein u. C. H. Müller.
1. Teil. 1. Abt. Heft: 1. [121 S.] 1901. ℳ 2.80;
2. [136 S.] 1902. ℳ 4.40. 3. [156 S.]
1902. ℳ 4.80.
——— II. Abt. Heft: 1. [132 S.] 1904. ℳ 4.40.
II. Teil. Heft: 1. [147 S.] 1901. ℳ 3.80; 2. [121 S.]
1903. ℳ 3.40; 3. [132 S.] 1903. ℳ 3.60.

V. Physik, 2 Teile, red. von A. Sommerfeld.
1. Teil. Heft: 1. [160 S.] 1903. ℳ 4.80.
——— Heft: 2. [120 S.] 1903. ℳ 4.40.
——— Heft: 3. [170 S.] 1904. ℳ 5.20.
II. Teil. Heft: 1. [200 S.] 1904. ℳ 6.—

VI. 1: Geodäsie und Geophysik, red. von Ph. Furtwängler und E. Wiechert.
Heft: 1. [116 S.] 1905. ℳ 3.40.

VI. 2: Astronomie, red. von K. Schwarzschild.
Heft: 1. [112 S.] 1905. ℳ 3.80.

In Vorbereitung:

VII. Historische, philosophische und didaktische Fragen behandelnd, sowie Generalregister.

Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées sous les auspices des Académies de Göttingue, de Leipzig, Munich et de Vienne avec la collaboration de nombreux savants. Édition française rédigée et publiée d'après l'édition allemande sous la direction de Jules Molk professeur à l'université de Nancy. En sept tomes. gr. 8. Tome I: vol. IV. fasc. 1. [160 p.] 1904. n. ℳ 4.—, vol. III. fasc. 1. [96 p.] 1906. n. ℳ 4.—

Abraham, Dr. M., Privatdozent an der Universität Göttingen, Theorie der Elektrizität. I. Band: Einführung in die Maxwellsche Theorie der Elektrizität mit einem einleitenden Abschnitte über das Rechnen mit Vektorgrößen in der Physik. Von Dr. A. Föppl. Zweite, ungearbeitete Auflage von Dr. M. Abraham. 11 Figuren im Text. [XVIII u. 448 S.] gr. 8. 1904. In Leinw. geb. n. ℳ 10.—
II. Band: Elektromagnetische Theorie der Strahlung. Von Dr. M. Abraham. [X u. 404 S.] gr. 8. 1905. In Leinw. geb. n. ℳ 10.—

Ahrens, Dr. W., in Magdeburg, Scherz und Ernst in der Mathematik. Gesammelte und ungesammelte Worte. [X u. 322 S.] gr. 8. 1904. In Leinw. geb. n. ℳ 6.—
——— mathematische Unterhaltungen und Spiele. In Original-Leinwandband mit Zeichnung von P. Bürck in Darmstadt. [X u. 428 S.] gr. 8. 1906. In Leinw. geb. n. ℳ 7.40.

Blaschke, Dr. E., Professor an der Technischen Hochschule zu Wien, Vorlesungen über mathematische Statistik. Die Lehre von den statistischen Massen. Mit 17 Textfiguren und 5 Tafeln. [VIII u. 269 S.] gr. 8. 1906. In Leinw. geb. n. ℳ 7.40.

Bruns, Dr. Heinrich, Professor der Astronomie an der Universität Leipzig, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kollektivmaßlehre. [VIII u. 332 S. mit Anhang 48 S.] gr. 8. 1906. In Leinw. geb. n. ℳ 8.40.

Bucherer, Dr. A. H., Privatdozent an der Universität Bonn, Elemente der Vektoranalysis. Mit 14 Figuren im Text. [VIII u. 103 S.] gr. 8. 1903. In Leinw. geb. n. ℳ 3.20.
——— Einführung in die Elektronentheorie. Mit 14 Figuren im Text. [VIII u. 148 S.] gr. 8. 1904. In Leinw. geb. n. ℳ 5.20.

Clebsch, A., Vorlesungen über Geometrie. Mit besonderer Berücksichtigung der Anschauungen von Dr. Aufl. [VIII u. 1022 S.] gr. 8. 1903. In Leinw. geb. n. ℳ 18.—

Cantor, Dr. Emanuel, Professor an der Technischen Hochschule in München. 1. Band. 1. Lieferung. [XIV u. 240 S.] gr. 8. 1900. geh. n. ℳ 12.—
Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung. [XIV u. 240 S.] gr. 8. 1900. In Leinw. geb. n. ℳ 12.—
1. Band. Mit 43 Figuren im Text. [XIV u. 240 S.] 1902. In Leinw. geb. n. ℳ 12.—
II. — Mit 81 Figuren im Text. [VIII u. 320 S.] 1901. In Leinw. geb. n. ℳ 12.—

MATHEMATISCHE ANNALEN.

BEGRÜNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN.

Unter Mitwirkung der Herren

PAUL GORDAN, ADOLPH MAYER, CARL NEUMANN, MAX NOETHER,
KARL VONDERMÜHLL, HEINRICH WEBER

gegenwärtig herausgegeben

von

Felix Klein
in Göttingen.

Walther v. Dyck
in München.

David Hilbert
in Göttingen.

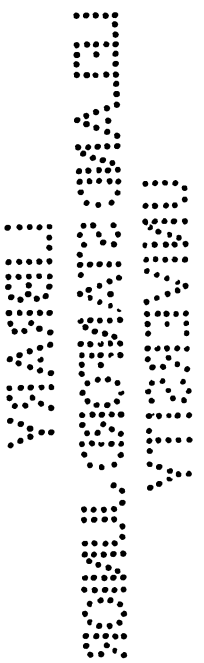
Otto Blumenthal
in Aachen.

63. Band.

Mit 8 Figuren im Text.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1907.

91957



ALLE RECHTE, EINSCHLIESSLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN.

Inhalt des dreiundsechzigsten Bandes.

(In alphabetischer Ordnung.)

Seite

Bateman, G., of Cambridge (England). The Inversion of a Definite Integral . 525

Blichfeldt, H. F., of Stanford University, California, U. S. A. The Finite, Discontinuous, Primitive Groups of Collineations in Three Variables . . . 552

Bochniček, Stephan, in Agram (Kroatien). Zur Theorie des relativbiquadratischen Zahlkörpers 85

Bolza, Oskar, in Chicago. Ein Satz über eindeutige Abbildung und seine Anwendung in der Variationsrechnung 246

Cipolla, Michele, a Palermo. Sulla risoluzione apiristica delle congruenze binomie secondo un modulo primo 54

Epstein, Paul, in Straßburg i./E. Zur Theorie allgemeiner Zetafunktionen. II 205

Faber, Georg, in Karlsruhe. Über das Anwachsen analytischer Funktionen . 549

Fuchs, Richard, in Halensee bei Berlin. Über lineare homogene Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit drei im Endlichen gelegenen wesentlich singulären Stellen 301

Furtwängler, Philipp, in Bonn. Allgemeiner Existenzbeweis für den Klassenkörper eines beliebigen algebraischen Zahlkörpers 1

Hahn, Hans, in Wien. Über die Herleitung der Differentialgleichungen der Variationsrechnung 253

Hilb, Emil, in Erlangen. Die Reihenentwicklungen der Potentialtheorie. (Mit 5 Figuren im Text) 38

Jolles, Stanislaus, in Berlin. Die Fokaltheorie der linearen Strahlenkongruenzen 337

Kálmán, Eugen, in Göttingen. Über die Abhängigkeit der Konvergenz einer Potenzreihe von der Konvergenz ihrer reellen oder imaginären Komponente. (Mit 1 Figur im Text) 322

Klein, Felix, in Göttingen. Bericht über den Stand der Herausgabe von Gauß' Werken. Siebenter Bericht 333

Kneser, Adolf, in Breslau. Die Theorie der Integralgleichungen und die Darstellung willkürlicher Funktionen in der mathematischen Physik . . . 477

König, Julius, in Budapest. Über die Grundlagen der Mengenlehre und das Kontinuumproblem. (Zweite Mitteilung) 217

Landau, Edmund, in Berlin. Über die Verteilung der Primideale in den Idealklassen eines algebraischen Zahlkörpers 145

Lüroth, J., in Freiburg i./Br. Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten. (Mit 2 Figuren im Text) 222

Młodziejowski, B., in Moskau. Über aufeinander abwickelbare P-Flächen . . 62

Seite

Mosch, Erich, in Charlottenburg. Über Flächenscharen, deren orthogonale Trajektorien ebene Kurven sind 573

Pompeiu, D., à Jassy. Sur les fonctions dérivées 326

Réthy, Moritz, in Budapest. Über meine Modifikationen des Ostwaldschen Prinzips und über den zweiten Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie 413

Schlesinger, Ludwig, in Klausenburg. Bemerkung zu dem Kontinuitätsbeweise für die Lösbarkeit des Riemannschen Problems 273

— — Über asymptotische Darstellungen der Lösungen linearer Differentialsysteme als Funktionen eines Parameters 277

Schmidt, Erhard, in Bonn. Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. I. Teil: Entwicklung willkürlicher Funktionen nach Systemen vorgeschriebener 433

Study, E., in Bonn. Einige elementare Bemerkungen über den Prozeß der analytischen Fortsetzung 239

Woronetz, P., in Kiew. Über das Problem der Bewegung von vier Massenpunkten unter dem Einflusse von inneren Kräften. 387

Zemplén, G., Berichtigung zu seiner Arbeit: Über die Kompatibilitätsbedingungen bei Unstetigkeiten in der Elektrodynamik, Math. Ann. Bd. 60 144

Lüroth, J., Berichtigung zu seiner Arbeit: Historische Bemerkung zur Funktionentheorie, Math. Ann. Bd. 60. 239

Einladung zum 4. Internationalen Mathematiker-Kongreß in Rom 1908 59

Allgemeiner Existenzbeweis für den Klassenkörper eines beliebigen algebraischen Zahlkörpers.

Von

PHILIPP FURTWÄNGLER in Bonn.

Inhaltsübersicht.

Seite

§ 1. Einleitung. Gang des Beweises 1
§ 2. Ein Hilfssatz transzendenter Natur 5
§ 3. Die singulären Primärzahlen im Grundkörper k. 7
§ 4. Obere Grenze für die Anzahl der aus ambigen Idealen entspringenden ambigen Komplexe des Körpers $K\left(\sqrt[l]{\omega}, k\right)$, wo ω eine singuläre Primärzahl bedeutet 10
§ 5. Obere Grenze für die Anzahl aller ambigen Komplexe in K. 12
§ 6. Für welche Primideale in k hat eine singuläre Primärzahl den Restcharakter 1?. 14
§ 7. Die Unverzweigtheit der Körper K 16
§ 8. Die genaue Anzahl der ambigen Komplexe und die Einheiten in den Körpern K 19
§ 9. Konstruktion der unverzweigten Körper vom Relativgrad l, wenn der Grundkörper keine l^{te} Einheitswurzel enthält 20
§ 10. Konstruktion der unverzweigten relativquadratischen Körper, wenn unter den konjugierten Körpern des Grundkörpers k reelle vorhanden sind . . . 24
§ 11. Der Aufbau des Klassenkörpers 32
§ 12. Zusammenhang mit der komplexen Multiplikation der elliptischen Funktionen. 35
§ 13. Existenz von unendlich vielen Primidealen in jeder Idealklasse eines Zahlkörpers 37

§ 1.

Einleitung. Gang des Beweises.

In drei Mitteilungen, die in den Nachrichten von der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen erschienen sind*), habe ich allgemein den Nachweis geführt, daß zu jedem algebraischen Zahlkörper ein

*) Math.-physik. Klasse 1903, Heft 4 und Heft 5, 1904, Heft 3.

Klassenkörper existiert. Ich gebe im folgenden auf Wunsch der Redaktion dieser Zeitschrift eine zusammenfassende Bearbeitung dieser Entwicklungen, bei der einzelne Abschnitte wörtlich der genannten Stelle entnommen sind.

Die ersten Andeutungen über eine Theorie des Klassenkörpers finden sich wohl bei L. Kronecker, dem die Frage der „zu assoziierenden Gattungen" als ein „erstrebenswertes höchstes Ziel der Theorie der algebraischen Zahlen" erschien.*) Kronecker war durch die Beschäftigung mit der komplexen Multiplikation der elliptischen Funktionen, die für die imaginären quadratischen Bereiche $\sqrt{-n}$ die zu assoziierenden Gattungen liefert, zu der allgemeinen Fragestellung geführt. Er scheint auch über dieses spezielle Beispiel hinaus Einsicht in charakteristische Eigenschaften der zu assoziierenden Gattungen, d. h. des Klassenkörpers, gewonnen zu haben, hat jedoch keine bestimmten Angaben darüber gemacht.**) Den entscheidenden Schritt nach vorwärts hat dann D. Hilbert getan.***) Er hat, vorbereitet durch das Studium der Reziprozitätsgesetze in beliebigen algebraischen Zahlkörpern, das sowohl inhaltlich wie methodisch mit der Theorie des Klassenkörpers auf das engste zusammenhängt, die allgemeinen Eigenschaften des Klassenkörpers aufgedeckt und sie in dem einfachsten Falle, daß die Klassenzahl des Grundkörpers gleich 2 und der Grundkörper nebst sämtlichen konjugierten imaginär ist, bewiesen.

Der Klassenkörper eines beliebigen Grundkörpers k ist ein Oberkörper desselben, der folgende charakteristische Eigenschaften aufweist:

1. Seine Relativgruppe in bezug auf k ist zur Gruppe der Idealklassen in k holoedrisch isomorph, er ist also relativ-Abelsch in bezug auf k.

2. Er ist unverzweigt in bezug auf k, d. h. seine Relativdiskriminante ist gleich 1.

3. Alle Ideale des Grundkörpers werden im Klassenkörper Hauptideale, sie werden also durch wirkliche Zahlen des Klassenkörpers dargestellt.

4. Alle Primideale derselben Klasse des Grundkörpers werden im Klassenkörper gleichartig zerlegt oder genauer: Ist die Klassenzahl des Grundkörpers h und ist g der kleinste Exponent, für den die Äquivalenz

*) Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Größen, Journal für die reine und angew. Math. 92 (1882), p. 1; speziell sei auf p. 65—68 verwiesen.

**) Er sagt (l. c. p. 68), daß er zur aprioristischen Erkenntnis, nämlich zu einer von der analytischen Entstehung unabhängigen Auffassung der Natur jener den Gattungen $\sqrt{-n}$ assoziierten Gattungen gelangt sei und damit Gesichtspunkte für das Studium der allgemeinen Frage dieser Art der Assoziation gewonnen habe.

***) Über die Theorie der relativ-Abelschen Zahlkörper. Nachr. v. d. Kgl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, Math.-physik. Kl. 1898, p. 370; abgedruckt in Acta Math., Bd. 26.

$\mathfrak{p}^g \sim 1$ in k erfüllt ist, so zerfällt das Primideal $\mathfrak{p}$ aus k im Klassenkörper in $\frac{h}{g}$ verschiedene Primfaktoren.

Die beiden Eigenschaften 1. und 2. definieren den Klassenkörper vollständig und werden deshalb im folgenden zur Konstruktion desselben benutzt werden. Das Problem, das uns beschäftigen soll, läßt sich daher so formulieren:

Es sei ein beliebiger algebraischer Zahlkörper k mit der Klassenzahl h gegeben. Es soll dann ein relativ-Abelscher unverzweigter Oberkörper von k gefunden werden, dessen Relativgruppe mit der Gruppe der Idealklassen in k holoedrisch isomorph ist.

Der Gang der Untersuchung ist kurz folgender. Ebenso wie der Klassenkörper der Gesamtheit der Klassen in k entspricht, so entsprechen jeder Untergruppe der Klassengruppe bestimmte unverzweigte Körper in bezug auf k, die ebenfalls relativ-Abelsch sind, da jede Untergruppe einer Abelschen Gruppe selbst eine Abelsche Gruppe ist. Wie man daher die Klassenzahl h in Potenzen verschiedener Primzahlen zerlegen kann

$$h = l_1^{h_1} \cdot l_2^{h_2} \cdots,$$

so kann man den gesamten Klassenkörper dadurch aufbauen, daß man sukzessive unverzweigte relativ-Abelsche Körper von den Relativgraden $l_1^{h_1}, l_2^{h_2}, \cdots$ in bezug auf k konstruiert. Es genügt, die Konstruktion eines solchen Körpers zu zeigen, da sie für die übrigen analog verläuft. Man setzt daher $h = l^{h'} \cdot q$, wo l eine beliebige Primzahl bedeutet und $q \not\equiv 0 (l)$ ist, und betrachtet nur die in der Klassengruppe von k enthaltene Untergruppe vom Grade $l^{h'}$, die alle q^{ten} Potenzen von Idealklassen enthält. Es läuft das auf dasselbe hinaus, als ob die Klassenzahl von k genau gleich $l^{h'}$ wäre, was wir um der einfachen Ausdrucksweise willen ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen können.

Es sei also das Klassensystem von k in der Gestalt darstellbar:

$$(c)_k = c_1^{x_1} c_2^{x_2} \cdots c_e^{x_e} (x_i = 0, 1, \cdots, l^{h_i'} - 1), \quad h_1' + h_2' + \cdots + h_e' = h',$$

so daß die Klassengruppe in k genau e Basisklassen enthält. Es läßt sich dann der Klassenkörper von k durch Zusammensetzung von e Körpern erzeugen, die relativ zyklisch in bezug auf k von den Relativgraden $l^{h_1'}, \cdots, l^{h_e'}$ sind. Jeder dieser Körper besitzt einen Unterkörper vom Relativgrad l in bezug auf k, so daß im ganzen genau e unabhängige unverzweigte Körper vom Relativgrad l in bezug auf k existieren, die zuerst konstruiert werden müssen.

Ein relativzyklischer Körper vom Primzahlrelativgrad l läßt sich aber am einfachsten definieren, wenn der Grundkörper eine l^{te} Einheitswurzel enthält, da in diesem Falle der Oberkörper durch Adjunktion der Wurzel einer reinen Gleichung $x^l = \omega$ zu k erzeugt wird.

Wir machen daher zuerst die Voraussetzung, daß der Grundkörper k eine primitive l^{te} Einheitswurzel enthalte, und bestimmen unter dieser Voraussetzung e Zahlen $\omega_1, \cdots, \omega_e$ in k, die wir als singuläre Primärzahlen bezeichnen, so daß durch Adjunktion von $\sqrt[l]{\omega_1}, \cdots, \sqrt[l]{\omega_e}$ zu k e voneinander unabhängige unverzweigte Körper vom Relativgrad l in bezug auf k entstehen (§ 2 bis § 7). Um die Unverzweigtheit der entstehenden Körper zu beweisen, ist eine obere Grenze für die Anzahl ihrer ambigen Komplexe zu ermitteln, die sich gleich $e-1$ ergibt, wenn e, wie oben angegeben, die Anzahl der Basisklassen der Klassengruppe von k bedeutet (§ 3 bis § 5). Auf dieser Grundlage ergibt sich, daß alle Primideale, von denen eine bestimmte singuläre Primärzahl ω l^{ter} Potenzrest ist, in einer Untergruppe der Klassengruppe vom Grade $l^{h'-1}$ liegen, wodurch der Zusammenhang der Zahlen ω mit der Klasseneinteilung der Ideale von k hervortritt (§ 6). Diese Tatsache führt in Verbindung mit einem Satze über gewisse Dirichletsche Reihen (§ 2) zum Nachweis der Unverzweigtheit der Körper $(\sqrt[l]{\omega}, k)$ (§ 7).

Um die unverzweigten Körper vom Relativgrad l zu konstruieren, wenn der Grundkörper k keine l^{te} Einheitswurzel ζ enthält (§ 9), adjungieren wir zu k eine solche und erhalten dadurch einen Körper $k' = (k, \zeta)$, dessen Klassensystem in der Form

$$(c)_k \cdot d$$

darstellbar ist, wo $(c)_k$ das System der Idealklassen von k bedeutet und d alle Klassen aus k', deren Relativnorm in bezug auf k in die Hauptklasse fällt, bezeichnet. Wir konstruieren nun in k' das System der e unabhängigen unverzweigten Körper vom Relativgrad l, die zu der Klassengruppe $(c)_k$ gehören. Es zeigt sich dann, daß jeder dieser Körper nicht nur in bezug auf k', sondern auch in bezug auf k relativ-Abelsch ist. Suchen wir daher diejenigen Unterkörper der konstruierten Körper auf, die zu der Relativgruppe von k' in bezug auf k gehören, so erhalten wir dadurch e unverzweigte unabhängige relativ-Abelsche Körper vom Relativgrad l in bezug auf k.

Eine besondere Behandlung erfordert der Fall $l = 2$, wenn der Körper k oder einer seiner konjugierten reell ist (§ 10). Man muß dann, um sämtliche unverzweigten relativquadratischen Körper in bezug auf den Grundkörper zu erhalten, einen schärferen Äquivalenzbegriff zugrunde legen, nach dem zwei Ideale nur dann äquivalent heißen, wenn ihr Quotient eine total positive Körperzahl ist.

Auf Grund der so geschilderten Entwicklungen gelingt dann der vollständige Aufbau des Klassenkörpers (§ 11).

Die letzten beiden Paragraphen bilden einen Anhang, der mit dem eigentlichen Existenzbeweis in keinem Zusammenhange steht. Im § 12

ist der Nachweis erbracht, daß die komplexe Multiplikation der elliptischen Funktionen für die imaginären quadratischen Körper den zugehörigen Klassenkörper liefert, wobei die Zerlegung der Primideale des Grundkörpers im Klassenkörper den springenden Punkt des Beweises bildet. Im letzten Paragraphen endlich ist aus der Existenz des Klassenkörpers auf Grund der Untersuchungen von H. Weber*) über Zahlengruppen in algebraischen Zahlkörpern gefolgert, daß in jeder Idealklasse eines solchen unendlich viele Primideale existieren.

Es sei hier zum Schluß noch diejenige Literatur angegeben, die für die folgenden Entwicklungen von Wichtigkeit ist, wobei in Klammern die Abkürzung angegeben ist, unter der die betreffende Abhandlung hier zitiert ist:

D. Hilbert, Über die Theorie der relativ-Abelschen Zahlkörper. Nachrichten von der Kgl. Gesellschaft der Wiss. in Göttingen 1898. (Hilbert, Rel. Abelsche Zahlk.)

D. Hilbert, Über die Theorie des relativquadratischen Zahlkörpers. Math. Ann. 51 (1898). (Hilbert, Rel. quadr. Zahlk.)

Ph. Furtwängler, Über das Reziprozitätsgesetz der l^{ten} Potenzreste in algebraischen Zahlkörpern, wenn l eine ungerade Primzahl bedeutet. Abhandlungen der Kgl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, math.-phys. Klasse. Neue Folge, Bd. II, Nr. 3 (1902). (Furtwängler, Reziprozitätsgesetz.)

Ein Auszug aus dieser Arbeit ist in den Math. Ann. 58 (1903), p. 1 erschienen.

D. Hilbert, Die Theorie der algebraischen Zahlkörper. Bericht, erstattet der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. 189?. (Hilbert, Algebr. Zahlk.)

§ 2.

Ein Hilfssatz transzendenter Natur.

Wir haben in diesem Paragraphen zunächst einen Satz über die Summe einer unendlichen Reihe zu entwickeln, der eine der Grundlagen der folgenden Ausführungen bildet.

Satz 1: *Es sei k ein algebraischer Zahlkörper mit der Klassenzahl $q \cdot l^h$, wo l eine beliebige Primzahl bedeutet und $q \not\equiv 0 (l)$ ist. Es bezeichne ferner G_{l^h} die Gruppe, welche die q^{ten} Potenzen der Idealklassen aus k enthält, und $G_{l^{h-1}}$ eine Untergruppe von G_{l^h} vom Grade l^{h-1}. Läßt man dann $\mathfrak{w}^{(+)}$ alle Primideale durchlaufen, deren q^{te} Potenzen einer Klasse aus $G_{l^{h-1}}$ angehören, so gilt:*

$$(1) \qquad \sum_{(\mathfrak{w}^{(+)})} \frac{1}{n(\mathfrak{w}^{(+)})^s} \leqq \frac{1}{l} \log \frac{1}{s-1} + f(s), \qquad (s > 1),$$

*) Math. Ann. 49 (1897), p. 83.

wo $f(s)$ eine Funktion der reellen Veränderlichen s bedeutet, die endlich bleibt, wenn sich s der Grenze 1 nähert.

Beweis: Bedeutet C das System aller Klassen aus k, deren q^{te} Potenz in $G_{\mu-1}$ liegt, so läßt sich das System sämtlicher Klassen von k in der Gestalt:

$$Cc^x, \quad (x = 0, 1, \cdots, l-1) \tag{2}$$

darstellen, wo c eine Klasse bedeutet, deren q^{te} Potenz nicht in $G_{\mu-1}$ liegt.

Bezeichnet man nun mit T die Anzahl aller Ideale einer bestimmten Klasse aus k, deren Normen $\leqq t$ sind, unter t eine reelle positive Größe verstanden, so gilt*):

$$T = t\varkappa + Rt^{1-\frac{1}{m}}, \tag{3}$$

wo $\varkappa$ eine nur vom Körper k und nicht von t abhängende Konstante und R eine derart von t abhängige Größe bedeutet, die für unendlich wachsendes t zwischen endlichen Grenzen bleibt. Aus (3) folgt:

$$\sum_{(\mathfrak{j})} \frac{1}{n(\mathfrak{j})^s} = \sum_{(t)} \frac{\varkappa}{t^s} + f(s), \qquad (s > 1), \tag{4}$$

wo die Summe links über alle Ideale einer bestimmten Klasse aus k und die Summe rechts über alle Zahlen $t = 1, 2, \cdots, \infty$ zu erstrecken ist; $f(s)$ bedeutet eine Funktion der reellen Veränderlichen s, die endlich bleibt, wenn s gegen 1 konvergiert.

Ich ordne jetzt allen Klassen aus k l^{te} Einheitswurzeln zu, indem ich der Klasse $C_i c^{x_i}$ die Einheitswurzel ζ^{x_i} zuweise, wo C_i eine beliebige Klasse aus C bedeutet und ζ eine von 1 verschiedene l^{te} Einheitswurzel. Bei dieser Zuordnung entspricht dem Produkt zweier Klassen auch das Produkt der zugeordneten Einheitswurzeln. Bezeichne ich nun mit $\zeta_{\mathfrak{j}}$ diejenige Einheitswurzel, die der durch $\mathfrak{j}$ repräsentierten Idealklasse zugeordnet ist, so bleibt die Summe

$$\sum_{(\mathfrak{j})} \sum_{(e)} \zeta_{\mathfrak{j}}^e \frac{1}{n(\mathfrak{j})^s} \; (e = 1, 2, \cdots, l-1), \qquad (s > 1), \tag{5}$$

in der $\mathfrak{j}$ alle Ideale der l Klassen $c_i = C_i c^{x_i}$, $c_i^2, \cdots, c_i^l$ $(x_i \not\equiv 0(l))$ durchläuft, stets endlich, wenn sich s der Grenze 1 nähert; dies folgt aus (4). Das gleiche gilt dann offenbar, wenn ich in (5) $\mathfrak{j}$ alle Ideale aus k durchlaufen lasse.

Andererseits ist, wenn $\mathfrak{w}$ alle Primideale aus k durchläuft:

$$\log \sum_{(\mathfrak{j})} \sum_{(e)} \zeta_{\mathfrak{j}}^e \frac{1}{n(\mathfrak{j})^s} = \sum_{(\mathfrak{w})} \sum_{(e)} \zeta_{\mathfrak{w}}^e \frac{1}{n(\mathfrak{w})^s} + f_1(s), \quad (e = 1, 2, \cdots, l-1), \quad (s > 1). \tag{6}$$

*) Hilbert, Rel. quadr. Zahlk., § 22, p. 53.

Versteht man daher unter $\mathfrak{w}^{(+)}$ alle Primideale aus k, deren q^{te} Potenz in einer Klasse aus G_l^{h-1} liegt, unter $\mathfrak{w}^{(-)}$ alle übrigen Primideale aus k, so folgt aus (5) und (6):

$$(7) \qquad (l-1)\sum_{(\mathfrak{w}^{(+)})} \frac{1}{n(\mathfrak{w}^{(+)})^s} - \sum_{(\mathfrak{w}^{(-)})} \frac{1}{n(\mathfrak{w}^{(-)})^s} \leqq f_2(s), \qquad (s>1).$$

Ferner ist:

$$(8) \qquad \sum_{(\mathfrak{w}^{(+)})} \frac{1}{n(\mathfrak{w}^{(+)})^s} + \sum_{(\mathfrak{w}^{(-)})} \frac{1}{n(\mathfrak{w}^{(-)})^s} = \log \frac{1}{s-1} + f_3(s), \qquad (s>1).$$

Durch Addition von (7) und (8) folgt die zu beweisende Ungleichung:

$$\sum_{(\mathfrak{w}^{(+)})} \frac{1}{n(\mathfrak{w}^{(+)})^s} \leqq \frac{1}{l} \log \frac{1}{s-1} + f(s), \qquad (s>1).$$

Im vorstehenden bedeuten $f_i(s)$ Funktionen der reellen Veränderlichen s, die endlich bleiben, wenn s gegen 1 konvergiert.

§ 3.

Die singulären Primärzahlen.

Wir setzen in diesem und den folgenden Paragraphen von dem Grundkörper k voraus, daß er eine primitive l^{te} Einheitswurzel ζ enthalte, daß er also ein Oberkörper des Kreiskörpers der l^{ten} Einheitswurzeln und zwar vom Relativgrad m sei. Unter l verstehen wir eine ungerade Primzahl; es sei indessen gleich bemerkt, daß die folgenden Entwicklungen auch für den Fall $l=2$ gelten, vorausgesetzt, daß der Körper k samt seinen sämtlichen konjugierten imaginär ist. Die Klassenzahl des Körpers k sei gleich $ql^{h'}$, wo $q \not\equiv 0 (l)$ ist. Da uns im folgenden zunächst nur die Untergruppe der Klassengruppe vom Grade $l^{h'}$ interessiert, so wollen wir das System aller Klassen, deren q^{te} Potenz in die Hauptklasse fällt, mit 1 bezeichnen; wir drücken uns also so aus, als ob die Klassenzahl des Körpers k genau gleich $l^{h'}$ wäre. Eine Beschränkung liegt darin nicht. Die Klassengruppe von k möge e Basisklassen enthalten und dementsprechend das Klassensystem von k durch folgendes Schema dargestellt werden:

$$(1) \qquad c_1^{x_1} c_2^{x_2} \cdots c_e^{x_e} \quad (x_i = 0, 1, \cdots, l^{h_i}-1), \quad h_1 + h_2 + \cdots + h_e = h'.$$

Ich bezeichne nun mit $\mathfrak{r}_1, \cdots, \mathfrak{r}_e$ Ideale aus den Klassen $c_1, \cdots, c_e$ und setze:

$$(2) \qquad \mathfrak{r}_1^{l^{h_1}} = (\varrho_1), \cdots, \mathfrak{r}_e^{l^{h_e}} = (\varrho_e),$$

wo $\varrho_1, \cdots, \varrho_e$ ganze Zahlen aus k bedeuten. Es sei ferner $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_{m'-1}$ ein volles System von Grundeinheiten für k $\left(\text{also } m' = \frac{m(l-1)}{2}\right)$ und ε_m

eine in k liegende Einheitswurzel, deren l^{te} Wurzel nicht in k liegt. Wir setzen dann:

$$\varepsilon_{m'+1} = \varrho_1, \cdots, \varepsilon_{m'+e} = \varrho_e \tag{3}$$

und bestimmen ein System von $m' + e$ Primidealen $\mathfrak{q}$, das die Bedingungen:

$$\left(\frac{\varepsilon_i}{\mathfrak{q}_i}\right)_l + 1, \left(\frac{\varepsilon_j}{\mathfrak{q}_i}\right)_l = 1, \ (i \neq j), \ (i, j = 1, 2, \cdots, m' + e) \tag{4}$$

befriedigt, was stets möglich ist.*)

Weiter wählen wir die Exponenten w so, daß

$$\begin{aligned} \mathfrak{q}_1 \mathfrak{r}_1^{w_1^{(1)}} \cdots \mathfrak{r}_e^{w_e^{(1)}} &= (\varkappa_1), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \mathfrak{q}_{m'+e} \mathfrak{r}_1^{w_1^{(m'+e)}} \cdots \mathfrak{r}_e^{w_e^{(m'+e)}} &= (\varkappa_{m'+e}) \end{aligned} \tag{5}$$

wird, wo $\varkappa_1, \cdots, \varkappa_{m'+e}$ ganze Zahlen aus k bedeuten. Bildet man dann das System der Zahlen:

$$\varepsilon_1^{u_1} \cdots \varepsilon_{m'+e}^{u_{m'+e}} \varkappa_1^{v_1} \cdots \varkappa_{m'+e}^{v_{m'+e}}, \quad (u, v = 0, 1, \cdots, l-1), \tag{6}$$

indem man die Exponenten v den Bedingungen:

$$\begin{aligned} v_1 w_1^{(1)} + \cdots + v_{m'+e} w_1^{(m'+e)} &\equiv 0 (l), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ v_1 w_e^{(1)} + \cdots + v_{m'+e} w_e^{(m'+e)} &\equiv 0 (l), \end{aligned} \tag{7}$$

unterwirft, so erhält man dadurch sicher $l^{2m'+e}$ verschiedene Zahlen, die die Eigenschaft haben, daß sie die Ideale $\mathfrak{r}_1, \cdots, \mathfrak{r}_e$ nur in l^{ten} Potenzen als Faktoren enthalten.

Wir nennen jetzt nach D. Hilbert**) zwei Zahlen α, β aus k von *gleicher Art*, wenn sie eine Kongruenz:

$$\alpha \equiv \beta \gamma^l (\mathfrak{l}^l) \tag{8}$$

befriedigen, wo γ eine Zahl aus k bedeutet und $\mathfrak{l} = (1 - \zeta)$ ist. Die Primärzahlen in k, die zu $\mathfrak{l}$ prim und der l^{ten} Potenz einer Zahl aus k nach $\mathfrak{l}^l$ kongruent sind, bilden für sich eine Art. Die Gesamtheit der zu $\mathfrak{l}$ primen ganzen Zahlen in k liefert genau $l^{2m'}$ verschiedene Arten, wie leicht nachzuweisen ist.

Bedeutet nämlich α_i ein System von Zahlen, das die sämtlichen Arten der zu $\mathfrak{l}$ primen Zahlen repräsentiert, und β_k ein volles Restsystem von ganzen zu $\mathfrak{l}$ primen nach $\mathfrak{l}$ inkongruenten Zahlen, so bildet $\alpha_i \beta_k^l$ ein

*) Hilbert, Algebr. Zahlk., Satz 152, p. 426. $(-)_l$ bedeutet das l^{te} Potenzrestsymbol.

**) Rel. Abelsche Zahlk., p. 382.

volles Restsystem der zu $\mathfrak{l}$ primen nach $\mathfrak{l}'$ inkongruenten Zahlen. Denn ist α eine beliebige ganze Zahl aus k, so gilt zunächst eine Kongruenz

$$\alpha \equiv \alpha_i \beta^l (\mathfrak{l}'),$$

wo β eine ganze Zahl aus k bedeutet. Genügt diese der Kongruenz

$$\beta \equiv \beta_k (\mathfrak{l}),$$

so ist auch

$$\beta^l \equiv \beta_k^l (\mathfrak{l}'),$$

folglich

$$\alpha \equiv \alpha_i \beta_k^l (\mathfrak{l}').$$

Wäre andererseits:

$$\alpha_i \beta_k^l \equiv \alpha_{i'} \beta_{k'}^l (\mathfrak{l}'),$$

so müßte zunächst $i = i'$ sein, also auch

$$\beta_k^l \equiv \beta_{k'}^l (\mathfrak{l}')$$

und daher

$$\beta_k \equiv \beta_{k'} (\mathfrak{l}), \quad \text{also} \quad k = k'.$$

Da nun das System $\alpha_i \beta_k^l$ im ganzen $\varphi(\mathfrak{l}')$ Zahlen enthält und das System β_k $\varphi(\mathfrak{l})$ Zahlen, so bleiben für das System α_i $n(\mathfrak{l}'^{-1}) = l^{2m'}$ Zahlen, was nachzuweisen war.

Wie wir oben gesehen haben, enthält das System (6) sicher $l^{2m'+e}$ verschiedene Zahlen; es müssen daher notwendig unter diesen zwei Zahlen derselben Art ω_1 und ω_2 enthalten sein. Die Zahl $\omega = \omega_1 \omega_2^{l-1}$ ist dann eine Primärzahl von der Gestalt:

$$\omega = \varepsilon_1^{u_1} \cdots \varepsilon_{m'+1}^{u_{m'+1}} \varkappa_1^{v_1} \cdots \varkappa_{m'+1}^{v_{m'+1}} \alpha^l, \tag{9}$$

bei der nicht sämtliche Exponenten u und v durch l teilbar sind; α bedeutet eine Zahl aus k. Wir nennen ω kurz eine *singuläre Primärzahl.*

Es ist leicht einzusehen, daß man mit Hilfe des Systems (6) sogar e voneinander unabhängige singuläre Primärzahlen erhalten kann, was wir später (§ 7) benutzen werden. Vorläufig genügt uns aber die Existenz einer einzigen solchen Zahl ω, die einen relativzyklischen Körper $K(\sqrt[l]{\omega}, k)$ vom Relativgrad l in bezug auf k definiert. Die Untersuchung dieses Körpers K bildet den Inhalt der nächsten Paragraphen, und speziell der Nachweis, daß er unverzweigt in bezug auf k ist. Dies wird dann und nur dann der Fall sein, wenn die Exponenten v in (9) sämtlich Null sind.*) Um das zu beweisen, müssen wir in den nächsten Paragraphen zunächst die ambigen Komplexe in K betrachten und eine obere Grenze für ihre Anzahl ableiten.

*) Furtwängler, Reziprozitätsgesetz, p. 7, Satz 6.

§ 4.

Obere Grenze für die Anzahl der aus ambigen Idealen entspringenden ambigen Komplexe des Körpers $K(\sqrt[l]{\omega}, k)$, wo ω eine singuläre Primärzahl bedeutet.

Es sei ω eine singuläre Primärzahl, wie wir sie im vorigen Paragraphen ermittelt haben, von der Gestalt:

$$\omega = \varepsilon_1^{u_1} \cdots \varepsilon_{m'+e}^{u_{m'+e}} \varkappa_1^{v_1} \cdots \varkappa_{m'+e}^{v_{m'+e}} \tag{1}$$

und es mögen die Exponenten $v_{i_1}, v_{i_2}, \cdots, v_{i_t}$ die einzigen der Exponenten v sein, die nicht durch l teilbar sind. Es gilt dann, wie wir nachweisen wollen, folgender Satz:

Satz 2: *Ist die Anzahl aller ambigen Ideale des Körpers $K(\sqrt[l]{\omega}, k)$ gleich l^t, und machen die sämtlichen Einheiten in k, die Relativnormen von Einheiten in K sind, l^{e^*} Einheitenverbände aus, so gilt, wenn wir die Anzahl aller ambigen Komplexe, die aus ambigen Idealen entspringen, mit l^{a^*} bezeichnen, die Ungleichung:*

$$a^* \leqq t + v^* - m' - 1 + e_1. \tag{2}$$

*Die Zahl e_1 ist dadurch bestimmt, daß l^{e_1} Idealklassen aus k in K in die Hauptklasse übergehen.**)

Beweis: Bezeichnet man mit $\mathsf{H}_1, \cdots, \mathsf{H}_{m'}$ ein System relativer Grundeinheiten von K in bezug auf k**) und mit $\eta_1, \cdots, \eta_{m'}$ ihre Relativnormen in k, so ist jede Einheit ε in k, die Relativnorm einer Einheit in K ist, in der Form darstellbar***):

$$\varepsilon = \eta_1^{r_1} \cdots \eta_{m'}^{r_{m'}} \xi^l, \tag{3}$$

wo ξ eine Einheit aus k und $r_1, \cdots, r_{m'}$ irgend welche Zahlen $0, 1, \cdots, l-1$ bedeuten. Vorausgesetzt ist dabei, daß ω nicht das Produkt einer Einheit mit der l^{ten} Potenz einer Zahl aus k ist, was nach unserer Annahme über die Exponenten v zutrifft.

Da nun zusammen l^{e^*} Einheitenverbände, die Relativnormen von Einheiten aus K enthalten, existieren, so muß man unter den Einheiten $\eta_1, \cdots, \eta_{m'}$ v^* auswählen können, etwa $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{v^*}$, so daß jede Einheit ε in k, die Relativnorm einer Einheit in K ist, sich eindeutig in die Gestalt bringen läßt:

$$\varepsilon = \eta_1^{r_1} \cdots \eta_{v^*}^{r_{v^*}} \xi^l, \quad (r_1, \cdots, r_{v^*} = 0, 1, \cdots, l-1). \tag{4}$$

---

*) Über die Definition der Komplexe und speziell der ambigen Komplexe vgl. Hilbert, Rel. quadr. Zahlk., § 12, p. 22.

**) Hilbert, Algebr. Zahlk., § 55, p. 272.

***) Hilbert, Algebr. Zahlk., § 146, p. 448, Hilfssatz 32.

Wendet man dies auf die Einheiten $\eta_i (i = v^* + 1, \cdots, m')$ an, so ergibt sich:

$$\eta_i = \eta_1^{r_1^{(i)}} \cdots \eta_{v^*}^{r_{v^*}^{(i)}} (\xi^{(i)})^l, \quad (i = v^* + 1, \cdots, m'), \tag{5}$$

wo $\xi^{(i)}$ eine Einheit aus k ist und die Exponenten r bestimmte Werte $0, 1, \cdots, l-1$ haben. Daraus folgt, daß die $m' - v^*$ Ausdrücke:

$$\mathsf{H}_i' = \mathsf{H}_i \mathsf{H}_1^{-r_1^{(i)}} \cdots \mathsf{H}_{v^*}^{-r_{v^*}^{(i)}} (\xi^{(i)})^{-1}, \quad (i = v^* + 1, \cdots, m') \tag{6}$$

Einheiten in K mit der Relativnorm 1 sind und daß man deshalb:

$$\mathsf{H}_i' = \mathsf{M}_i^{(1-S)} \tag{7}$$

setzen kann, wo M_i eine ganze Zahl aus k und S die Substitution $\sqrt[l]{\omega}, \xi \sqrt[l]{\omega}$ bedeutet. Die Ideale (M_i) und $(\mathsf{M}) = (\sqrt[l]{\omega})$ sind dann mit ihren relativ konjugierten Idealen identisch und darum Produkte aus den ambigen Primidealen in K, die wir mit $\mathfrak{D}_1, \cdots, \mathfrak{D}_t$ bezeichnen, und Idealen aus k:

$$\begin{aligned} \mathsf{M} &= \mathfrak{D}_1^{a_1} \cdots \mathfrak{D}_t^{a_t} \mathfrak{j}, \\ (\mathsf{M}_i) &= \mathfrak{D}_1^{a_1^{(i)}} \cdots \mathfrak{D}_t^{a_t^{(i)}} \mathfrak{j}^{(i)}, \quad (i = v^* + 1, \cdots, m'). \end{aligned} \tag{8}$$

Es ist nun zu untersuchen, wieviel voneinander unabhängige Beziehungen

$$(\mathsf{M})^b \cdot (\mathsf{M}_{v^*+1})^{b_{v^*+1}} \cdots (\mathsf{M}_{m'})^{b_{m'}} = \mathfrak{j}^* \tag{9}$$

bestehen können, wo die Exponenten b irgend welche Werte $0, 1, \cdots, l-1$ haben, die nicht sämtlich Null sind, und $\mathfrak{j}^*$ ein Ideal aus k ist. Es ist zunächst leicht zu erkennen, daß $\mathfrak{j}^*$ nicht Hauptideal in k sein kann, daß also keine Relation:

$$(\mathsf{M})^b (\mathsf{M}_{v^*+1})^{b_{v^*+1}} \cdots (\mathsf{M}_{m'})^{b_{m'}} = iE \tag{10}$$

gelten kann, wo i eine Zahl aus k und E eine Einheit aus K ist. Denn potenziert man (10) symbolisch mit $(1 - S)$, so ergibt sich:

$$\xi^{-b} (\mathsf{H}_{v^*+1}')^{b_{v^*+1}} \cdots (\mathsf{H}_{m'}')^{b_{m'}} = E^{(1-S)} \tag{11}$$

und hieraus schließt man mit Hilfe der fundamentalen Eigenschaft des Systems relativer Grundeinheiten, daß $b = b_{v^*+1} = \cdots = b_{m'} = 0$ sein muß, wenn man noch beachtet, daß ω nicht das Produkt aus einer Einheit mit der l^{ten} Potenz einer Zahl aus k ist.

Da keine Relation (10) bestehen kann und andererseits das Ideal $\mathfrak{j}^*$ aus (9) in K Hauptideal ist, so können höchstens e_1 voneinander unabhängige Relationen (9) gelten, wenn l^{r_1} Idealklassen aus k in K in die Hauptklasse übergehen. Daraus ergibt sich die Richtigkeit der Ungleichung (2).

Die Ungleichung (2) gilt auch in dem Falle, daß ω eine Einheit aus k ist. Denn in diesem Falle sind die Einheiten $\omega, \eta_1, \cdots, \eta_{m'}$ Relativ-

normen von Einheiten aus K, und wir können als Repräsentanten der v^* unabhängigen Einheitenverbände, die Relativnormen von Einheiten aus K enthalten, etwa die Einheiten $\omega, \eta_{11}, \cdots, \eta_{1r^*-1}$ wählen. Dadurch, daß man die übrigen $m' - v^* + 1$ Einheiten $\eta_{1r^*}, \cdots, \eta_{1m'}$ durch diese ausdrückt, gelangt man zu $m' - v^* + 1$ Relationen von der Art (8). Da jetzt wieder zwischen $M_{r^*}, M_{r^*+1}, \cdots, M_{m'}$ höchstens e_1 Relationen von der Art (9) bestehen können, gilt auch jetzt die Ungleichung (2).

§ 5.

Obere Grenze für die Anzahl aller ambigen Komplexe in K.

Satz 3: *Ist a die Anzahl der unabhängigen ambigen Komplexe in K und e die Anzahl der Basisklassen der Klassengruppe von k, so gilt:*

$$a \leqq e - 1. \tag{1}$$

Beweis: Ist l^ν die Anzahl aller Einheiten, die Relativnormen von ganzen oder gebrochenen Zahlen aus K sind, so gibt es $r - v^*$ unabhängige Einheiten in k, die Relativnormen von gebrochenen Zahlen sind. Diese definieren $v - v^*$ ambige Idealklassen in K, die wir mit $A_1, \cdots, A_{v-v^*}$ bezeichnen. Der Weg, auf dem man dieselben erhält, ist genau derselbe wie in dem Beweise zu Satz 20 meiner Abhandlung über die Reziprozitätsgesetze.*) Bedeuten $\mathfrak{A}_1, \cdots, \mathfrak{A}_{v-v^*}$ diejenigen Ideale, welche die ambigen Klassen $A_1, \cdots, A_{v-v^*}$ definieren, und ist $\mathfrak{A}$ ein beliebiges Ideal eines ambigen Komplexes A aus K, so ist zu untersuchen, ob $\mathfrak{A}$ einem Produkt aus Potenzen von $\mathfrak{A}_1, \cdots, \mathfrak{A}_{v-v^*}$ mit Potenzen der a^* unabhängigen ambigen Ideale aus K und einem Ideal aus k äquivalent ist.

Es gilt:

$$\mathfrak{A}^{(1-S)} = \Theta \mathfrak{j}, \tag{2}$$

wo Θ eine Zahl aus k und $\mathfrak{j}$ ein Ideal aus k bedeutet. S bezeichnet eine erzeugende Substitution der Relativgruppe von K in bezug auf k.

Wir wollen nun zunächst sehen, welchen Bedingungen die Ideale $\mathfrak{j}$, die eine Beziehung (2) erfüllen, unterworfen sind. Wir stellen zu diesem Zweck die Klassen in k, deren l^{te} Potenz in k die Hauptklasse ergibt, in der Gestalt dar:

$$(c_1^*)^{x_1} \cdots (c_e^*)^{x_e} \begin{pmatrix} x_1 = 0, 1, \cdots l-1 \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_e = 0, 1, \cdots l-1 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

indem wir:

$$c_1^* = c_1^{h_1 - 1}, \quad \cdots c_e^* = c_e^{h_e - 1} \tag{4}$$

setzen. Gehört nun $\mathfrak{j}$ der Klasse c' an und ist:

*) Furtwängler, Reziprozitätsgesetz, p. 23.

(5) $$c' = (c_1^*)^{x_1'} \cdots (c_e^*)^{x_e'},$$

so kann man setzen:

(6) $$\mathfrak{j} = \alpha \mathfrak{r}_1^{x_1' h_1 - 1} \cdots \mathfrak{r}_e^{x_e' h_e - 1},$$

wo α eine Zahl aus k bedeutet. Andererseits ist nach (2)

$$\mathfrak{j}^l = N_k(\Theta^{-1}),$$

wenn N_k die Relativnorm in bezug auf k bedeutet; folglich

(7) $$N_k(\Theta\alpha)^{-1} = \varepsilon' \varrho_1^{x_1'} \cdots \varrho_e^{x_e'},$$

wenn ε' eine geeignete Einheit aus k bezeichnet.

Aus (7) folgt*):

(8) $$\left(\frac{\varepsilon' \varrho_1^{x_1'} \cdots \varrho_e^{x_e'}}{\mathfrak{q}_{i_1}}\right) = 1, \cdots \left(\frac{\varepsilon' \varrho_1^{x_1'} \cdots \varrho_e^{x_e'}}{\mathfrak{q}_{i_t}}\right) = 1.$$

Unter den Indizes $i_1, \cdots i_t$ mögen nun aus der Reihe der Indizes $m'+1, \cdots m'+e$ genau f vorkommen und zwar mögen dies die Indizes

(9) $$m'+e^{(1)}, \cdots m'+e^{(f)}$$

sein. Es folgt dann, wenn man die Bedingungen (4) in § 3 beachtet, denen die $\mathfrak{q}$ genügen müssen, daß:

(10) $$x'_{e^{(1)}} \equiv 0(l), \cdots x'_{e^{(f)}} \equiv 0(l)$$

sein muß; d. h. es gibt höchstens $e-f$ unabhängige Klassen in k, die in K der $(1-S)^{\text{ten}}$ Potenz einer Klasse gleich werden. Unter diesen sind e_1 Klassen, die in K in die Hauptklasse übergehen; geht aber $\mathfrak{j}$ in K in ein Hauptideal über, so folgt genau wie an der zitierten Stelle**), daß sich $\mathfrak{A}$ in der oben angegebenen Weise ausdrücken läßt. Es kann demnach in K höchstens $e-f-e_1$ unabhängige Klassen aus ambigen Komplexen geben, die sich nicht aus den Klassen $A_1, \cdots A_{v-v^*}$ und den aus den ambigen Idealen in K entspringenden Klassen zusammensetzen lassen. Es ist also

(11) $$a \leqq a^* + v - v^* + e - f - e_1.$$

Alle Einheiten ε in k nun, die Relativnormen von Zahlen aus K sind, müssen die Bedingungen:

(12) $$\left(\frac{\varepsilon}{\mathfrak{q}_{i_1}}\right) = 1, \cdots \left(\frac{\varepsilon}{\mathfrak{q}_{i_t}}\right) = 1$$

befriedigen. Da unter den Indizes $i_1, \cdots i_t$ f Indizes aus der Reihe $m'+1, \cdots, m'+e$ vorkommen, folgt aus (12)

(13) $$v \leqq m' - t + f.$$

Addiert man jetzt endlich (2) des vorigen Paragraphen und (11) und (13) aus diesem Paragraphen, so ergibt sich $a \leqq e-1$.

*) Furtwängler, Reziprozitätsgesetz, Satz 15, p. 16.

**) Furtwängler, Reziprozitätsgesetz, p. 24.

§ 6.

Für welche Primideale in k hat eine singuläre Primärzahl den Restcharakter 1?

Von ausschlaggebender Bedeutung für die folgenden Entwicklungen ist die Beziehung, welche die singulären Primärzahlen in K zur Einteilung der Ideale in Klassen besitzen. Es zeigt sich nämlich, daß eine bestimmte singuläre Primärzahl ω nur von solchen Primidealen l^{ter} Potenzrest sein kann, die einer bestimmten Untergruppe der Klassengruppe von K angehören. Die Entscheidung über die Frage, ob ω Rest oder Nichtrest eines gegebenen Primideals $\mathfrak{p}$ ist, hängt also davon ab, welcher Idealklasse $\mathfrak{p}$ angehört.

Um den angedeuteten Zusammenhang aufdecken zu können, müssen wir zunächst noch einige Festsetzungen treffen. Es sei P ein beliebiger ambiger Komplex in K, der nicht der Hauptkomplex ist, und es möge in K die Äquivalenz gelten:

$$P \sim Q^{(1-S)^p},$$

wo Q einen Komplex aus K bedeutet. Dagegen möge es keinen Komplex R in K geben, der die Äquivalenz:

$$P \sim R^{(1-S)^{p+1}}$$

befriedigt. Ich nenne dann kurz p den Exponenten des ambigen Komplexes P. Die Möglichkeit einer solchen Definition ist ersichtlich, wenn man bedenkt, daß nicht für beliebig hohe Werte von p eine Äquivalenz der angegebenen Art erfüllt sein kann, weil die $(1-S)^{l^{\text{te}}}$ symbolische Potenz eines Komplexes immer auch die l^{te} wirkliche Potenz eines Komplexes ist. Ich bestimme in K jetzt a unabhängige Komplexe in folgender Weise:

Ich wähle zunächst einen ambigen Komplex P_1 in K, dessen Exponent p_1 von keinem Exponenten eines anderen ambigen Komplexes übertroffen wird, darauf einen von P_1 unabhängigen ambigen Komplex P_2, dessen Exponent von keinem Exponenten eines von P_1 unabhängigen Komplexes übertroffen wird usf. Der letzte so auszuwählende Komplex ist mit P_a zu bezeichnen; er hat einen Exponenten p_a, der von keinem Exponenten eines ambigen Komplexes unterschritten wird.

Es gelten dann in K Äquivalenzen folgender Art:

$$P_i \sim Q_i^{(1-S)^{p_i}}, \quad (i = 1, 2, \cdots a) \tag{1}$$

wo Q_i gewisse Komplexe aus K bedeuten, und die Exponenten p_i erfüllen die Bedingungen:

$$p_1 \geqq p_2 \cdots \geqq p_a.$$

Mit Hilfe der vorstehenden Festsetzungen können wir folgenden Satz aussprechen:

Satz 4: *Ist* $\mathfrak{J}$ *ein Ideal aus* K *und* $\mathfrak{J}^{(1-S)}$ *einem Idealquotienten von der Gestalt:*

$$\mathfrak{j}\mathfrak{D}_1^{F_1(S)} \cdots \mathfrak{D}_a^{F_a(S)} \tag{2}$$

äquivalent, wo $F_1(S), \cdots F_a(S)$ *ganze ganzzahlige Funktionen von* S *sind, so ist auch* $\mathfrak{J}$ *einem Idealquotienten dieser Gestalt äquivalent. Dabei bedeutet* $\mathfrak{j}$ *ein Ideal aus* k, $\mathfrak{D}_1, \cdots, \mathfrak{D}_a$ *Ideale aus Klassen in* K, *die resp. den Komplexen* $Q_1, \cdots, Q_a$ *angehören; diese sind, wie im vorstehenden erläutert ist, durch* (1) *bestimmt.*

Beweis: Wir betrachten zunächst den Fall, daß für sämtliche Funktionen F gilt:

$$F_i(1) \equiv 0(l) \quad (i = 1, \cdots a).$$

Wir können dann auch annehmen, daß die sämtlichen Funktionen $F(S)$ durch $(1-S)$ teilbar seien; denn es gilt

$$\mathfrak{D}_i^l \sim \mathfrak{q}_i \mathfrak{D}_i^{(1-S)G_i(S)}, \tag{3}$$

wo $\mathfrak{q}_i$ die Relativnorm von $\mathfrak{D}_i$ und $G_i(S)$ eine ganze, ganzzahlige Funktion von S bedeutet. Die Richtigkeit von (3) erkennt man leicht, wenn man die Funktion

$$l - (1 + S + \cdots S^{l-1})$$

nach Potenzen von $(1-S)$ entwickelt. Wir setzen daher jetzt:

$$F_i(S) = -(1-S)F'_i(S),$$

wo die Funktionen $F'_i(S)$ wieder ganze, ganzzahlige Funktionen von S sind.

Bezeichnet man dann den Ausdruck:

$$\mathfrak{D}_1^{F'_1(S)} \cdots \mathfrak{D}_a^{F'_a(S)}$$

mit $\mathfrak{J}'$, so gilt offenbar:

$$(\mathfrak{J}\mathfrak{J}')^{(1-S)} \sim \mathfrak{j}$$

d. h. $\mathfrak{J}\mathfrak{J}'$ gehört einem ambigen Komplex an, woraus sich ohne weiteres die Richtigkeit unserer Behauptung in dem betrachteten Falle ergibt.

Wir nehmen zweitens an, daß nicht sämtliche Funktionen $F_i(1)$ durch l teilbar sind und zwar sei F_b die erste unter den nicht teilbaren; ich setze dann wieder voraus, daß sämtliche Funktionen $F_1(S), \cdots F_{b-1}(S)$ durch $(1-S)$ teilbar sind, was nach (3) gestattet ist. Ich potenziere jetzt die vorausgesetzte Äquivalenz:

$$\mathfrak{J}^{(1-S)} \sim \mathfrak{j}\mathfrak{D}_1^{F_1(S)} \cdots \mathfrak{D}_{b-1}^{F_{b-1}(S)} \mathfrak{D}_b^{F_b(S)} \cdots \mathfrak{D}_a^{F_a(S)}$$

symbolisch mit $(1-S)^{p_b}$. Ich erhalte dadurch eine Äquivalenz von folgender Gestalt:

$$(\mathfrak{J}\mathfrak{J}')^{(1-S)^{p_b+1}} \sim \mathfrak{j}_1 \mathfrak{A}_b^{c_b} \mathfrak{A}_{b+1}^{c_{b+1}} \cdots \mathfrak{A}_a^{c_a}, \tag{4}$$

wo $\mathfrak{j}_1$ ein Ideal aus k, $\mathfrak{J}'$ einen leicht angebbaren Idealquotienten aus $\mathfrak{I}$ und $\mathfrak{A}_s, \mathfrak{A}_{s+1}, \cdots, \mathfrak{A}_n$ Ideale aus Klassen der ambigen Komplexe $P_s, \cdots, P_n$ bedeuten. Da der Exponent e_s wegen $F_s(1) \not\equiv 0 \pmod{l}$ nicht durch l teilbar ist, so steht die Äquivalenz (4) in Widerspruch mit unserer Festsetzung über die Auswahl der Komplexe P_s. Denn sie lehrt, daß es einen von den Komplexen $P_1, \cdots, P_{s-1}$ unabhängigen ambigen Komplex gibt, dessen Exponent größer als p_s ist. Der angenommene zweite Fall ist deshalb unmöglich; hiermit ist unser Satz vollständig bewiesen.

Satz 5: *Ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal aus k mit der Eigenschaft $\left(\frac{\omega}{\mathfrak{p}}\right)_l = 1$, so gehört $\mathfrak{p}$ einer durch ω völlig bestimmten Untergruppe der Klassengruppe von k an, deren Grad den Betrag l^{n-1} nicht übersteigt.*

Beweis: Ich bezeichne die Klassen in k, in die die Relativnormen von $\mathfrak{C}_1, \cdots, \mathfrak{C}_n$ hineinfallen, mit $c_1, \cdots, c_n$. Bezeichne ich dann die kleinste Gruppe, der diese Klassen und außerdem sämtliche l^{ten} Potenzen von Klassen in k angehören, mit G, so hat G höchstens den Grad l^{n-1}. Denn da $a \sim c^l \sim 1$ ist, so können höchstens $c-1$ Basisklassen von k durch Produkte aus Potenzen von $c_1, \cdots, c_n$ dargestellt werden; es muß daher sicher eine Basisklasse in G fehlen und der Grad von G ist daher höchstens l^{n-1}. Das Primideal $\mathfrak{p}$ gehört aber, wie leicht einzusehen ist, zu einer Klasse aus G. Denn wegen $\left(\frac{\omega}{\mathfrak{p}}\right) = 1$ ist $\mathfrak{p}$ in $K\left(\sqrt[l]{\omega}, k\right)$ zerlegbar. Ist $\mathfrak{P}$ ein Primfaktor von $\mathfrak{p}$, so gibt es sicher einen Exponenten b, so daß die Äquivalenz

$$\mathfrak{P}^{\cdots} \sim 1$$

in K gilt, wo $\cdots \not\equiv 0 \pmod{l}$ ist. Daraus folgt nach Satz 4, daß $\mathfrak{P}^{\cdots}$ einem Ausdruck von der Gestalt $\cdots$ äquivalent ist, woraus man sofort erkennt, daß $\mathfrak{p}$ zu einer Klasse der Gruppe G gehört. Von der Gruppe G, die durch ω vollständig bestimmt ist, weil ja $\cdots$ sind, daß sie zu ω gehört.

Der Grad der Gruppe G ist genau gleich $\cdots$. Die Richtigkeit dieser Behauptung wird sich aber erst im nächsten Paragraphen ergeben. Ich trage deshalb die durch Satz 5 definierte Untergruppe, die G enthält und deren Grad höchstens gleich $\cdots$ ist, als $\cdots$ gehörig bezeichne.

§ 7.

Die Unverzweigtheit der Körper K.

Wir können nunmehr den Nachweis erbringen, daß in bezug auf $\cdots$ genau $\cdots$ voneinander unabhängige unverzweigte Körper K vom Relativgrade l über $k(\omega)$ existieren. Wir beweisen zu diesem Zwecke zunächst folgenden Hilfssatz:

Ist der in den vorigen Paragraphen betrachtete Körper $K(\sqrt[l]{\omega}, k)$ nicht unverzweigt in bezug auf k, so wähle man ein zweites System von Primidealen $\mathfrak{q}'_1, \cdots, \mathfrak{q}'_{m'+e}$, das ebenfalls die Bedingungen (4) in § 3 befriedigt. Man gelangt dadurch zu einer primären Zahl ω', die von ω verschieden ist. Ist jetzt der Köper $K(\sqrt[l]{\omega'}, k)$ unverzweigt in bezug auf k, so ist unsere Behauptung bewiesen; ist er verzweigt, so schließen wir aus Satz 5, daß zu ω' eine Untergruppe G' gehört, die von G verschieden sein muß. Wäre nämlich $G = G'$, so würde man dadurch zu einem Widerspruche mit Satz 1 kommen. Denn bezeichnet man alle Primideale, für die

$$\left(\frac{\omega}{\mathfrak{p}}\right)_l = 1,$$

mit $\mathfrak{p}$, und diejenigen, für die

$$\left(\frac{\omega}{\mathfrak{p}'}\right)_l \neq 1, \quad \left(\frac{\omega'}{\mathfrak{p}'}\right)_l = 1, \text{ mit } \mathfrak{p}',$$

so gilt bekanntlich:

$$\sum_{(\mathfrak{p})} \frac{1}{n(\mathfrak{p})^s} = \frac{l}{l^2} \log \frac{1}{s-1} + f(s) \qquad (s>1)$$

$$\sum_{(\mathfrak{p}')} \frac{1}{n(\mathfrak{p}')^s} = \frac{l-1}{l^2} \log \frac{1}{s-1} + f'(s) \qquad (s>1)$$

$$\text{(1)} \qquad \sum_{(\mathfrak{p})} \frac{1}{n(\mathfrak{p})^s} + \sum_{(\mathfrak{p}')} \frac{1}{n(\mathfrak{p}')^s} = \frac{2l-1}{l^2} \log \frac{1}{s-1} + f(s) + f'(s). \qquad (s>1)$$

$f(s)$ und $f'(s)$ haben die bekannte Bedeutung. Da die Primideale $\mathfrak{p}$ sämtlich von den Primidealen $\mathfrak{p}'$ verschieden sind und beide Arten zu Klassen aus der Gruppe $G = G'$ gehören, so involviert Gleichung (1) einen Widerspruch gegen Satz 1, weil

$$\text{(2)} \qquad \frac{2l-1}{l^2} > \frac{1}{l}, \text{ wenn } l > 1 \text{ ist.}$$

Wir können nun den begonnenen Prozeß beliebig fortsetzen, indem wir immer neue Systeme von Primidealen $\mathfrak{q}$ mit den Eigenschaften (4) in § 3 wählen. Ich behaupte, daß wir dadurch sicher zu einer primären Zahl ω_1 gelangen müssen, welche einen unverzweigten Körper $K(\sqrt[l]{\omega_1}, k)$ in bezug auf k definiert. Denn wäre dies nicht der Fall, so müßten, da nur eine endliche Anzahl Untergruppen der Gruppe der Klassen von k existieren, sicher in der Reihe der erhaltenen primären Zahlen zwei auftreten, zu denen dieselbe Untergruppe der Klassengruppe von k gehört. Dies ist nach den eben gegebenen Ausführungen unmöglich und daher unsere Behauptung bewiesen.

Wir haben jetzt noch zu zeigen, daß genau e voneinander unabhängige unverzweigte relativzyklische Körper vom Relativgrad l in bezug auf k existieren.

Wir nennen ein System von Körpern unabhängig, wenn keiner in dem aus der Gesamtheit der übrigen Körper zusammengesetzten Körper enthalten ist.

Wir haben im vorhergehenden gesehen, daß es in bezug auf k einen unverzweigten Körper $K_1\,(\sqrt[l]{\omega_1}, k)$ gibt. Es sei:

$$\omega_1 = \varepsilon_1^{u_1} \cdots \varepsilon_{m'+e}^{u_{m'+e}},$$

wo $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{m'+e}$ die früher angegebene Bedeutung haben und es sei der Exponent u_{i_1} von Null verschieden. Es gibt nun in dem früher betrachteten System von Zahlen (6) in § 3 $l^{2m'+e}$ verschiedene Zahlen und deshalb auch, wenn $e \geqq 2$ ist, sicher zwei Zahlen derselben Art, für die der Exponent von ε_{i_1} denselben Wert hat. Der Quotient dieser beiden Zahlen liefert dann eine primäre Zahl $\omega^{(i_1)}$, für die der Exponent von ε_{i_1} Null ist, und die deshalb sicher einen von K_1 unabhängigen Relativkörper in bezug auf k definiert. Ist dieser unverzweigt, so ist der zweite der gesuchten e Körper gefunden; ist er verzweigt, so wiederholen wir die Betrachtungen der ersten Hälfte dieses Paragraphen, indem wir jetzt aber nur solche primäre Zahlen heranziehen, für die der Exponent von ε_{i_1} Null ist.

Wir kommen dadurch sicher zu einer primären Zahl ω_2, die einen von K_1 unabhängigen unverzweigten Körper $K_2\,(\sqrt[l]{\omega_2}, k)$ definiert. Dies Verfahren können wir fortsetzen, wenn $e \geqq 3$ ist.

Ist nämlich in dem Ausdruck für ω_2 der Exponent von ε_{i_2} von Null verschieden, so bestimmen wir in der geschilderten Weise eine primäre Zahl ω_3, die einen unverzweigten Körper $K(\sqrt[l]{\omega_3}, k)$ in bezug auf k definiert und bei der die Exponenten von ε_{i_1} und ε_{i_2} Null sind; K_3 ist dann von K_2 und K_1 unabhängig. So können wir offenbar fortfahren, bis wir e unabhängige, in bezug auf k unverzweigte Körper vom Relativgrad l erhalten haben, da das Zahlensystem (6) in § 3 $l^{2m'+e}$ verschiedene Zahlen enthält.

Wir haben jetzt noch nachzuweisen, daß es nicht mehr derartige unabhängige Körper gibt. Wir müssen zu diesem Zweck die Untergruppen der Klassengruppe von k vom Grade l^{h-1} und ihre Zusammengehörigkeit mit den im vorigen betrachteten primären Zahlen ω etwas näher untersuchen.

Die Klassengruppe von k war:

$$(3) \qquad c_1^{x_1} \cdots c_e^{x_e}\ (x_i = 0, 1, \cdots, l^{h_i} - 1), \qquad h_1 + h_2 + \cdots + h_e = h'.$$

Jede Untergruppe von k vom Grade l^{h-1} läßt sich dann durch eine bestimmte Kongruenz

$$f_1 x_1 + \cdots + f_e x_e \equiv 0 \,(l) \tag{4}$$

charakterisieren, wo die $f_1, \cdots, f_e$ feste ganze rationale Zahlen bedeuten, die nicht sämtlich durch l teilbar sind; d. h. man erhält alle Klassen der Untergruppe und jede nur einmal, wenn man die Exponenten $x_1, \cdots, x_e$ in (3) alle Werte durchlaufen läßt, welche der Kongruenz (4) genügen. Man erkennt dies leicht, wenn man bedenkt, daß die Untergruppe als Abelsche Gruppe selbst eine Basis besitzt, und dann die Klassen dieser Basis durch $c_1, \cdots, c_e$ darstellt.

Eine leichte Abzählung vermittelst (4) lehrt dann, daß es $\frac{l^e - 1}{l - 1}$ verschiedene Untergruppen vom Grade l^{h-1} in der Klassengruppe gibt; andererseits folgt aus der Existenz der Zahlen $\omega_1, \cdots, \omega_e$, daß es mindestens $\frac{l^e - 1}{l - 1}$ verschiedene unverzweigte Körper vom Relativgrade l in bezug auf k gibt. Da nun aber zu zwei verschiedenen Körpern nicht zwei gleiche Untergruppen gehören können, weil man sonst in der zu Anfang dieses Paragraphen ausgeführten Weise zu einem Widerspruch mit Satz 1 kommen würde, so lassen sich die verschiedenen unverzweigten Körper und die Untergruppen eindeutig zuordnen. Daraus folgt zugleich, daß weiter keine unverzweigten relativzyklischen Körper vom Relativgrad l in bezug auf k existieren können und daß zu jedem solchen Körper eine Untergruppe der Klassengruppe von k gehört, die genau den Grad l^{h-1} hat.

§ 8.

Die genaue Anzahl der ambigen Komplexe und die Einheiten in den Körpern K.

Satz 6: *Die Anzahl der unabhängigen ambigen Komplexe in*

$$K_j(\sqrt[l]{\omega_j}, k) \quad (j = 1, 2, \cdots, e)$$

ist gleich $e - 1$.

Beweis: Wir werden im folgenden den Index j immer fortlassen, da die Ausführungen gleichmäßig für die e Körper $K_1, \cdots, K_e$ gelten, und die in den vorigen Paragraphen gebrauchten Bezeichnungen anwenden. Es mögen $Q_1, \cdots, Q_a$ die durch (1) in § 6 definierten Komplexe aus K sein und $A_1, \cdots, A_a$ mögen Idealklassen aus den Komplexen $Q_1, \cdots, Q_a$ sein. Es sind dann sämtliche Idealklassen aus K in der Gestalt darstellbar:

$$c A_1^{F_1(S)} \cdots A_a^{F_a(S)}, \tag{1}$$

wo c eine Klasse aus k und $F_1(S), \cdots, F_a(S)$ ganze, ganzzahlige Funktionen von S bedeuten. S ist die Substitution, durch die $\sqrt[l]{\omega}$ in $\zeta\sqrt[l]{\omega}$ übergeführt wird. Bezeichnet man nun die Klassen in k, in welche die Relativnormen der Ideale aus $A_1, \cdots, A_a$ hineinfallen, mit $c_1, \cdots, c_a$, so muß die Gruppe der Klassen in k, die $c_1, \cdots, c_a$ und außerdem sämtliche l^{ten} Potenzen von Klassen enthält, vom Grade l^{h-1} sein.

Wäre aber $a < e-1$, so wäre dies offenbar unmöglich; es ist also notwendig

$$a \geqq e-1$$

und folglich wegen Satz 3:

$$a = e-1. \tag{2}$$

Auch die Anzahlen v und v^* lassen sich jetzt leicht bestimmen, wie folgender Satz lehrt:

Satz 7: *Haben v, v^*, e, e_1 und m' dieselbe Bedeutung wie in den Sätzen 2 und 3, so gilt*

$$v^* = m' - e_1 + 1, \tag{3}$$

$$v = m' \tag{4}$$

oder in Worten:

Jede Einheit in k ist Relativnorm einer Zahl aus $K(\sqrt[l]{\omega}, k)$, dagegen sind nur $l^{m'-e_1+1}$ Einheiten Relativnormen von Einheiten aus K.

Beweis: Aus den Ungleichungen (2) in § 4 und (11) in § 5 folgt, wenn man beachtet, daß a^*, t und f den Wert Null haben, und $a = e-1$ ist:

$$v^* \geqq m' + 1 - e_1, \tag{5}$$

$$v \geqq v^* + e_1 - 1, \tag{6}$$

also auch

$$v \geqq m'.$$

Da v nicht größer als m' sein kann, muß $v = m'$ sein. Aus (6) folgt dann:

$$v^* \leqq m' + 1 - e_1,$$

also wegen (5)

$$v^* = m' - e_1 + 1.$$

Aus der letzten Gleichung schließt man noch, daß e_1 mindestens den Wert 1 haben muß, d. h. *daß es sicher eine Klasse in k geben muß, die in k nicht Hauptklasse ist, aber in K in die Hauptklasse übergeht.*

§ 9.

Konstruktion des unverzweigten Körpers vom Relativgrad l, wenn der Grundkörper keine l^{te} Einheitswurzel enthält.

Wir haben in den vorhergehenden Paragraphen immer vorausgesetzt, daß der Grundkörper k eine l^{te} Einheitswurzel enthalte. Von dieser

beschränkenden Voraussetzung haben wir uns jetzt zu befreien, indem wir folgenden Satz beweisen:

Satz 8: *Es sei k ein beliebiger algebraischer Zahlkörper mit der Klassenzahl $ql^{h'}$, wo l eine ungerade Primzahl bedeutet und q zu l prim ist. Ist dann das System der q^{ten} Potenzen der Idealklassen aus k in der Gestalt darstellbar:*

$$(c)_k = c_1^{x_1} \cdots c_e^{x_e} \quad (x_i = 0, 1, \cdots, l^{h_i} - 1), \quad h_1 + \cdots + h_e = h',$$

so existieren in bezug auf k genau e unabhängige unverzweigte relativzyklische Körper vom Relativgrad l. Dasselbe gilt für $l = 2$, wenn der Körper K samt seinen konjugierten imaginär ist.

Beweis: Ich erinnere zunächst daran, daß wir wieder das System aller Klassen, deren q^{te} Potenz in die Hauptklasse fällt, mit 1 bezeichnen und in diesem Sinne die Äquivalenz $\mathfrak{a} \sim 1$ verstehen. Ist dann l^{h_i} der kleinste Exponent, für den die Äquivalenz

$$\mathfrak{b}^{l^{h_i}} \sim 1$$

gilt, so soll l^{h_i} der zum Ideal $\mathfrak{b}$ oder zu der betreffenden Idealklasse gehörige Exponent heißen. Ferner sei noch auf folgende Bezeichnungsweise hingewiesen, die weiterhin benutzt wird. Ist K ein beliebiger Oberkörper von k nnd fallen die Relativnormen der Ideale aus einer Klasse C in K in die Klasse c in k, so werde ich kurz c die Relativnorm von C nennen und schreiben:

$$C = N_k^K(c).$$

Wenn die Deutlichkeit nicht darunter leidet, kann bei N der obere oder der untere Index fortbleiben.

Ich adjungiere jetzt zu dem Körper k die l^{te} Einheitswurzel ζ und bezeichne den Körper (k, ζ) mit k', dessen Relativgrad l' in bezug auf k als Faktor von $l-1$ zu l prim ist. Aus dieser Tatsache folgt leicht, daß jede Idealklasse aus k' in der Form cC darstellbar ist, wo c eine Klasse aus k bedeutet und C eine solche Klasse aus k', die der Bedingung:

$$N_k^{k'}(C) = 1 \tag{2}$$

genügt. Das gesamte Klassensystem von k' ist also in der Gestalt:

$$(c)_k C \tag{3}$$

darstellbar, wo C eine beliebige Klasse mit der Eigenschaft (2) bedeutet.

Zwischen den Klassen $c_1, \cdots, c_e$ kann in k' keine Äquivalenz von der Gestalt:

$$c_1^{a_1} \cdots c_e^{a_e} \sim C_i B^l \tag{4}$$

bestehen, wo C_i eine beliebige Klasse aus dem System C, und B eine beliebige Klasse aus k' bedeutet, außer wenn sämtliche a_i durch l teilbar

sind. Die Unmöglichkeit von (4) erkennt man, wenn man auf beiden Seiten die Relativnorm in bezug auf k bildet. Es folgt daher aus § 7, daß e unabhängige primäre Zahlen $\omega_1, \cdots, \omega_e$ in k' existieren, welche unverzweigte relativzyklische Körper vom Relativgrad l in bezug auf k' definieren und respektive zu den durch die Kongruenzen:

$$x_i \equiv 0 \,(l)$$

definierten Untergruppen der Klassengruppe von k' gehören. Ich betrachte jetzt den Körper $(k', \sqrt[l]{\omega_1})$ und will zunächst zeigen, daß er in bezug auf k relativ-Abelsch ist. Bezeichnet man die erzeugende Substitution der Relativgruppe von k' in bezug auf k mit

$$s = \zeta \,|\, \zeta^r,$$

so gilt:

$$s^{l'} = 1, \quad r^{l'} \equiv 1 \,(l). \tag{5}$$

Da nun die Untergruppe der Klassengruppe von k', zu der ω_1 gehört, gegenüber s invariant ist, so muß dasselbe von dem Körper $(k', \sqrt[l]{\omega_1})$ gelten, d. h. es muß eine Beziehung:

$$s\omega_1 = \omega_1^{\alpha} \beta^l \tag{6}$$

bestehen, wo a eine rationale ganze Zahl und β eine Zahl aus k' bedeutet. Um zu zeigen, daß $(k', \sqrt[l]{\omega_1})$ in bezug auf k relativ-Abelsch ist, hat man nachzuweisen, daß die Kongruenz:

$$a \equiv r \,(l) \tag{7}$$

gilt. Wir setzen zu diesem Zweck:

$$l' = p_1^{q_1} r_1 = p_2^{q_2} r_2 = \cdots, \tag{8}$$

wo $p_1^{q_1}, p_2^{q_2}, \cdots$ die verschiedenen in l' aufgehenden Primzahlpotenzen bedeuten, und beweisen, daß die Kongruenzen

$$\begin{aligned} a^{r_1} &\equiv r^{r_1} \,(l), \\ a^{r_2} &\equiv r^{r_2} \,(l), \\ &\cdots\cdots \end{aligned} \tag{9}$$

gelten. Aus der Gesamtheit derselben folgt leicht die Richtigkeit von (7). Denn da die Zahlen $r_1, r_2, \cdots$ nicht sämtlich einen gemeinsamen Teiler haben, so läßt sich die Gleichung:

$$y_1 r_1 + y_2 r_2 + \cdots = 1$$

durch ganze rationale y erfüllen und es folgt dann aus (9)

$$a^{y_1 r_1 + y_2 r_2 + \cdots} \equiv r^{y_1 r_1 + y_2 r_2 + \cdots} \,(l),$$

d. h.

$$a \equiv r \,(l).$$

Es genügt, von den Kongruenzen (9) die Richtigkeit der ersten nachzuweisen, da der Beweis für die übrigen sich analog gestaltet. Zu diesem Nachweis müssen wir uns ein Primideal $\mathfrak{P}_1$ in k' verschaffen, das folgende beiden Eigenschaften besitzt: 1) es muß in einer Idealklasse liegen, die der Bedingung $x_1 \not\equiv 0 (l)$ genügt, wo x_1 den Exponenten von c_1 in der Klassengruppe von k' bedeutet; 2) es muß $s'\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{P}_1$ sein, wenn wir mit s' die Substitution s^{r_1} bezeichnen. Haben wir ein solches Primideal gefunden, so ist die Richtigkeit der Kongruenz:

$$a^{r_1} \equiv r^{r_1} (l) \tag{10}$$

in folgender Weise einzusehen. Nach den Annahmen über $\mathfrak{P}_1$ gilt:

$$\left(\frac{\omega_1}{\mathfrak{P}_1}\right)_l = \zeta^* + 1 \tag{11}$$

und folglich, wenn wir die Substitution s' auf (11) anwenden:

$$\left(\frac{\omega_1^{a^{r_1}}}{\mathfrak{P}_1}\right)_l = (\zeta^*)^{r^{r_1}}. \tag{12}$$

Daraus ergibt sich die Gültigkeit von (10).

Wir haben also jetzt nur noch, um den Beweis vollständig zu machen, zu zeigen, daß ein Primideal $\mathfrak{P}_1$ in k' mit den oben angegebenen Eigenschaften existiert. Wir betrachten zu diesem Zweck den Oberkörper k_1 von k, der zu der Gruppe $\left(s^{p_1 q_1}\right)^x$ $(x = 0, 1, \cdots, r_1 - 1)$ gehört. Derselbe ist relativzyklisch in bezug auf k vom Relativgrad $p_1^{q_1}$ und besitzt einen Unterkörper Uk_1, der relativzyklisch vom Relativgrad p_1 in bezug auf k ist. Ich behaupte nun, daß es in einer Klasse von k, die der Bedingung $x_1 \not\equiv 0 (l)$ genügt, ein Primideal gibt, das in Uk_1 und folglich dann auch in k_1 Primideal bleibt. Bezeichnet nämlich $\mathfrak{P}_i$ ein beliebiges Primideal aus Uk_1, so gilt

$$\sum \frac{1}{n(\mathfrak{P}_i)^s} = \log \frac{1}{s-1} + f_1(s) \qquad (s > 1)$$

und daher

$$\sum \frac{1}{n(\mathfrak{p}_i)^s} = \frac{1}{p_1} \cdot \log \frac{1}{s-1} + f_2(s), \qquad (s > 1)$$

wenn

$$\mathfrak{p}_i = N_k^{Uk_1}(\mathfrak{P}_i)$$

gesetzt wird. Bezeichne ich andererseits alle Primideale in k, die in einer Klasse mit $x_1 \not\equiv 0 (l)$ liegen, mit $\mathfrak{q}_i$, so folgt aus Satz 1:

$$\sum \frac{1}{n(\mathfrak{q}_i)^s} \geqq \frac{l-1}{l} \log \frac{1}{s-1} + f_3(s) \qquad (s > 1).$$

Die Funktionen $f(s)$ bleiben endlich, wenn sich s der Grenze 1 nähert. Da $\frac{l-1}{l} > \frac{1}{p_1}$ ist, so ergibt sich somit, daß unendlichviele Primideale

aus einer Klasse, die der Bedingung $x_1 \not\equiv 0 (l)$ genügt, in Uk_1 und deshalb in k_1 Primideale bleiben. Ist $\mathfrak{p}_1$ ein solches Primideal und $\mathfrak{P}_1$ ein Primfaktor desselben in k', so erfüllt $\mathfrak{P}_1$ die beiden oben angegebenen Bedingungen.

Wir haben damit bewiesen, daß der Körper $(k', \sqrt[l]{\omega_1})$ in bezug auf k relativ Abelsch vom Relativgrad $l'l$ ist. Die Relativgruppe besitzt deshalb eine ausgezeichnete Untergruppe vom Grade l', zu der der Körper K_1 gehören möge. K_1 ist dann relativzyklisch vom Relativgrad l in bezug auf k und unverzweigt, wie sich leicht zeigen läßt. Ginge nämlich das Primideal $\mathfrak{p}$ aus k in der Relativdiskriminante von K_1 in bezug auf k auf, so müßte $\mathfrak{p}$ in K_1 in l gleiche Primfaktoren zerfallen. Wenn man dann $\mathfrak{p}$ in $(k', \sqrt[l]{\omega_1})$ zerlegt, so müßten sich die Primfaktoren in Systeme von je l gleichen anordnen lassen. Daraus würde folgen, daß es ein Primideal $\mathfrak{P}$ in k' geben müßte, das in $(k', \sqrt[l]{\omega_1})$ in l gleiche Primfaktoren zerfällt, was unmöglich ist. Es ist also K_1 in bezug auf k unverzweigt.

Verfährt man jetzt in derselben Weise mit $(k', \sqrt[l]{\omega_2})$, $(k', \sqrt[l]{\omega_3})$, $\cdots$, wie wir es eben mit $(k', \sqrt[l]{\omega_1})$ getan haben, so erhält man die Körper $K_2, K_3, \cdots$. Das System der Körper

$$K_1, K_2, \cdots, K_e$$

liefert dann e unverzweigte unabhängige relativzyklische Körper vom Relativgrad l in bezug auf k, womit unser Satz bewiesen ist.

§ 10.

Konstruktion der unverzweigten relativquadratischen Körper, wenn unter den konjugierten Körpern des Grundkörpers k reelle vorhanden sind.

Die bisherigen Entwicklungen bezogen sich auf den Fall, daß l eine ungerade Primzahl ist; sie gelten, wie bereits erwähnt ist, auch für $l = 2$, wenn noch die weitere Voraussetzung erfüllt ist, daß der Grundkörper nebst allen konjugierten imaginär ist. Ist das nicht der Fall, so sind besondere Entwicklungen nötig, die in diesem Paragraphen gegeben werden sollen. Es genügt jetzt, wenn man alle unverzweigten relativquadratischen Körper erhalten will, nicht mehr der gewöhnliche Äquivalenzbegriff, sondern es ist der von D. Hilbert*) eingeführte schärfere Äquivalenzbegriff zugrunde zu legen, nach dem zwei Ideale nur dann äquivalent heißen, wenn ihr Quotient als total positive**) Körperzahl darstellbar ist.

*) Rel. Abelsche Zahlk., § 5.

**) Eine Körperzahl heißt total positiv, wenn ihre sämtlichen konjugierten Zahlen, soweit sie reell sind, positiv sind.

Es sei noch bemerkt, daß im folgenden, wenn von den zu k konjugierten Körpern die Rede ist, immer der Körper k einbegriffen ist.

Wir nehmen an, daß der Grad des Körpers k gleich m sei und daß sich unter den konjugierten Körpern s reelle befinden. Wir haben dann zunächst noch eine für k charakteristische Zahl p zu definieren, wobei wir festsetzen, daß die zu einer Zahl α aus k konjugierte Zahl, die in dem mit k konjugierten Körper $k^{(i)}$ liegt, mit $\alpha^{(i)}$ bezeichnet werden soll.

Es sei ε_1^* eine Einheit aus k, unter deren konjugierten sich wenigstens eine negative befindet und zwar sei dies $\varepsilon_1^{*(s_1)}$ in $k^{(s_1)}$; es sei dann ε_2^* eine solche Einheit, daß $\varepsilon_2^{*(s_1)}$ positiv und $\varepsilon_2^{*(s_2)}$ negativ ist; weiter sei ε_3^* eine solche Einheit, daß $\varepsilon_3^{*(s_1)}$ und $\varepsilon_3^{*(s_2)}$ positiv sind und $\varepsilon_3^{*(s_3)}$ negativ usw. Die letzte auf solche Weise zu wählende Einheit sei ε_p^*; es folgt dann, daß jede Einheit ε in k, deren konjugierte in $k^{(s_1)}, \cdots, k^{(s_p)}$ positiv sind, auch in den noch übrigen reellen Körpern $k^{(s_{p+1})}, \cdots, k^{(s_s)}$ positive konjugierte Einheiten hat. Die Zahl p läßt sich auch in folgender Weise charakterisieren. Die Anzahl der Grundeinheiten von k ist $m' - 1$, wo $m' = \frac{m+s}{2}$ ist. Nimmt man zu diesen noch eine Einheitswurzel aus k hinzu, deren Quadratwurzel nicht in k liegt, so erhält man $2^{m'}$ Einheitenverbände in k, unter denen sich mindestens $2^{m'-s}$ Verbände von total positiven Einheiten finden. Ist $s - p = p' > 0$, so wird diese Minimalzahl überschritten und es gibt in k genau $2^{m'-p}$ Verbände von total positiven Einheiten.

Aus den im vorstehenden für den Körper k gemachten Annahmen, die keine Beschränkung enthalten, folgt, daß man zu jeder Zahl α in k eine Einheit ε so bestimmen kann, daß die Zahlen $(\varepsilon\alpha)^{(s_1)}, \cdots, (\varepsilon\alpha)^{(s_p)}$ positiv werden. Daraus folgt, daß zwischen den Klassenzahlen 2^h und $2^{h'}$ von k, von denen die erste im engeren, die zweite im weiteren Sinne verstanden sei, die Beziehung besteht:

$$2^h = 2^{h'} \cdot 2^{p'}, \quad p' = s - p.$$

Es möge nun das Klassensystem von k, wenn der engere Äquivalenzbegriff zugrunde gelegt wird, in der Gestalt:

$$c_1^{x_1} \cdots c_e^{x_e} d_1^{y_1} \cdots d_{e'}^{y_{e'}} \; (x_i = 0, 1, \cdots, 2^{h_i} - 1; \; y_i = 0, 1); \; h_1 + \cdots + h_e + e' = h,$$

darstellbar sein, wo $d_1, \cdots, d_{e'}$ solche Klassen bedeuten, die bei Zugrundelegung des weiteren Äquivalenzbegriffes in die Hauptklasse fallen. Die Erhöhung der Klassenzahl in k bei der schärferen Fassung des Äquivalenzbegriffes kommt also dadurch zustande, daß erstens e' neue Basisklassen zur Klassengruppe hinzutreten und daß zweitens $e'' = p' - e'$ Basisklassen in k eine Verdoppelung ihres Exponenten erfahren. Die Bezeichnung der Klassen möge so gewählt sein, daß dies die Klassen $c_1, \cdots, c_{e''}$ sind.

Wir behaupten jetzt, daß genau $e + e'$ unabhängige unverzweigte relativquadratische Körper in bezug auf k existieren.

Zum Beweise bezeichnen wir die Grundeinheiten in k, zu denen noch eine Einheitswurzel, deren Quadratwurzel nicht in k liegt, hinzugenommen ist, mit $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{m'}$, wo $m' = \frac{m+s}{2}$ ist. Die Gesamtheit der Einheitenverbände ist dann in der Gestalt:

$$\varepsilon_1^{u_1} \cdots \varepsilon_{m'}^{u_{m'}} \xi^2 \tag{1}$$

darstellbar, wo ξ alle Einheiten aus k durchläuft; wir wollen uns dabei die Bezeichnung so gewählt denken, daß $\varepsilon_{p+1}, \cdots, \varepsilon_{m'}$ total positive Einheiten sind. Wir bezeichnen ferner mit $\mathfrak{r}_1, \cdots, \mathfrak{r}_e$ Ideale aus den Klassen $c_1, \cdots, c_e$ und setzen

$$\mathfrak{r}_1^{2^{h_1}-1} = \varrho_1, \cdots, \mathfrak{r}_{e''}^{2^{h_{e''}}-1} = \varrho_{e''}, \ \mathfrak{r}_{e''+1}^{2^{h_{e''+1}}} = \varrho_{e''+1}, \cdots, \mathfrak{r}_e^{2^{h_e}} = \varrho_e,$$

wo die Größen $\varrho_1, \cdots, \varrho_e$ Zahlen aus k bedeuten, die nicht Quadrate von Zahlen sind. Wir schreiben nun:

$$\varepsilon_{m'+1} = \varrho_1, \cdots, \varepsilon_{m'+e} = \varrho_e$$

und bestimmen $m' + e - p$ Primideale $\mathfrak{q}_i$ derart, daß:

$$\left(\frac{\varepsilon_i}{\mathfrak{q}_i}\right)_2 = -1, \quad \left(\frac{\varepsilon_j}{\mathfrak{q}_i}\right)_2 = 1, \quad \begin{pmatrix} i = p+1, \cdots, m'+e; \\ j = 1, 2, \cdots, m'+e; \end{pmatrix} \ i \neq j\Big).$$

Man wähle darauf die Exponenten w so, daß

$$\mathfrak{q}_{p+1}\mathfrak{r}_1^{w_{p+1}^{(1)}} \cdots \mathfrak{r}_e^{w_{p+1}^{(e)}} = (\varkappa_{p+1}),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\mathfrak{q}_{m'+e}\mathfrak{r}_1^{w_{m'+e}^{(1)}} \cdots \mathfrak{r}_e^{w_{m'+e}^{(e)}} = (\varkappa_{m'+e})$$

wird, wo $\varkappa_{p+1}, \cdots, \varkappa_{m'+e}$ Zahlen aus k bedeuten. Bildet man jetzt das System von Zahlen

$$\omega = \varepsilon_1^{u_1} \cdots \varepsilon_{m'+e}^{u_{m'+e}} \varkappa_{p+1}^{v_{p+1}} \cdots \varkappa_{m'+e}^{v_{m'+e}}, \tag{2}$$

indem man die v den bekannten e Bedingungen unterwirft, damit kein Faktor der Ideale $\mathfrak{r}_1, \cdots, \mathfrak{r}_e$ in der Relativdiskriminante von $(k, \sqrt{\omega})$ in bezug auf k aufgeht, so enthält dasselbe im ganzen $2^{2m'+e-p}$ Zahlen. Da nun im ganzen nur $2^{2m'-s}$ Arten von Zahlen in k existieren, so gibt es $e + p'$ unabhängige primäre Zahlen von der Gestalt (2).*) Wir bezeichnen mit:

---

*) Primär nennen wir eine zu 2 prime Zahl, wenn sie dem Quadrat einer Zahl aus k nach dem Modul 4 kongruent ist; dagegen fordern wir nicht, daß sie total positiv sei, wie D. Hilbert für die Aufstellung der Reziprozitätsgesetze im Körper k definiert hat. In diesem Sinne sind auch seine Ausführungen auf p. 378 der Rel. Abelschen Zahlk., speziell Satz 9, zu berichtigen, da an dieser Stelle ebenfalls die obige Definition der primären Zahl anzuwenden ist.

$$\omega_1 = \varepsilon_1^{u_1} \cdots \varepsilon_{m'+e}^{u_{m'+e}} \varkappa_{p+1}^{v_{p+1}} \cdots \varkappa_{m'+e}^{v_{m'+e}}$$

eine solche und untersuchen jetzt den Körper $K_1 = (k, \sqrt{\omega_1})$. Es mögen die Exponenten $v_{i_1}, \cdots, v_{i_f}$ von Null verschieden sein, ferner möge ω_1 in n der reellen Körper $k^{(s_1)}, \cdots, k^{(s_s)}$ negativ werden und es mögen l^{e_1} Idealklassen aus k in weiterem Sinne in K in die Hauptklasse (in weiterem Sinne) übergehen.*) Haben dann a^*, a, v^*, v dieselbe Bedeutung wie früher, so gilt die Ungleichung:

$$a^* \leqq t - m' + v^* + n + e_1 - 1. \tag{3}$$

Man erhält dieselbe, wenn man zunächst in analoger Weise, wie es D. Hilbert**) für ungerades l ausgeführt hat, ein System von $\frac{m+s}{2} - n$ relativen Grundeinheiten von K_1 in bezug auf k konstruiert und dann ebenso wie in § 4 verfährt.

Um eine Ungleichung für a, die Anzahl der unabhängigen ambigen Komplexe in K_1, zu gewinnen (bei ihrer Definition werde der weitere Äquivalenzbegriff zugrunde gelegt), bezeichnen wir die Anzahl negativer unter den Zahlen:

$$\omega_1^{(s_1)}, \omega_1^{(s_2)}, \cdots, \omega_1^{(s_p)}$$

mit n_1; die Anzahl negativer unter den Zahlen:

$$\omega_1^{(s_{p+1})}, \cdots, \omega_1^{(s_s)}$$

ist dann $n - n_1$. Sind ferner unter den Indizes $i_1, \cdots, i_f$ f aus der Reihe $m'+1, \cdots, m'+e$ vorhanden, so gilt:

$$a \leqq a^* + v - v^* + e - f - e_1. \tag{4}$$

Die Überlegungen zur Ableitung dieser Ungleichung sind völlig analog denen in § 5.

Jede Zahl α nun, die Relativnorm einer Zahl aus K_1 ist, muß die Bedingungen***):

$$\left(\frac{\alpha, \omega_1}{1^{(s_i)}}\right) = 1, \quad (i = 1, 2, \cdots, s)$$

erfüllen. Denn ist $\omega_1^{(s_i)}$ positiv, so ist das Vorzeichensymbol selbstverständlich positiv; ist aber $\omega_1^{(s_i)}$ negativ, so folgt aus:

$$\alpha^{(s_i)} = (\alpha_1 + \alpha_2 \sqrt{\omega_1^{(s_i)}})(\alpha_1 - \alpha_2 \sqrt{\omega_1^{(s_i)}}) = \alpha_1^2 - \alpha_2^2 \omega_1^{(s_i)},$$

*) Für die Konstruktion der ersten e unverzweigten relativquadratischen Körper genügt der weitere Äquivalenzbegriff.

**) Algebr. Zahlk., § 55, p. 572.

***) Vgl. Hilbert, Rel. Abelsche Zahlk., § 6, p. 376.

daß $\alpha^{(s_i)}$ positiv ist; es ist also auch in diesem Falle das Vorzeichensymbol gleich $+1$. Beachtet man dies, so ergibt sich:

$$v \leqq m' - t + f - n_1. \tag{5}$$

Addiert man jetzt die Ungleichungen (3), (4) und (5), so folgt:

$$a \leqq e - 1 + n - n_1. \tag{6}$$

Um jetzt sämtliche Ideale aus K_1 darzustellen, definiert man in analoger Weise wie in § 6 die Ideale $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2, \cdots, \mathfrak{Q}_a$ in K_1 und zeigt wie dort, daß für jedes Ideal $\mathfrak{J}$ in K_1 eine Relation gilt:

$$\mathfrak{J}^q = A\mathfrak{j}\mathfrak{Q}_1^{F_1(S_1)} \cdots \mathfrak{Q}_a^{F_a(S_1)}, \tag{7}$$

wo A eine Zahl aus K_1, $\mathfrak{j}$ ein Ideal aus k, q einen ungeraden Exponenten und S_1 die Substitution $\sqrt{\omega_1} \mid -\sqrt{\omega_1}$ bedeutet.

Ist nun $e > 0$, so kann man offenbar, da $e + p'$ unabhängige primäre Zahlen ω zur Verfügung stehen, ω_1 so wählen, daß die sämtlichen Zahlen $\omega_1^{(z_{p+1})}, \cdots, \omega_1^{(z_s)}$ positiv werden. Es ist dann $n = n_1$ und folglich:

$$a \leqq e - 1.$$

Aus der letzten Ungleichung schließt man mit Hilfe von (7), daß alle Primideale $\mathfrak{p}$ in k mit der Eigenschaft $\left(\frac{\omega_1}{\mathfrak{p}}\right)_2 = 1$ in einer Untergruppe vom Grade 2^{h-1} (oder $2^{h'-1}$ bei Zugrundelegung des weiteren Äquivalenzbegriffes) der Klassengruppe von k liegen, die durch eine Kongruenz:

$$a_1 x_1 + \cdots + a_e x_e \equiv 0 (2)$$

definiert wird. Daraus schließt man in bekannter Weise die Unverzweigtheit von K_1. In gleicher Weise wie K_1 kann man noch $e - 1$ unabhängige unverzweigte relativquadratische Körper $K_1, \cdots, K_e$ konstruieren durch Benutzung der primären Zahlen $\omega_2, \cdots, \omega_e$, die ebenso wie ω_1 die Eigenschaft haben, daß ihre konjugierten in den Körpern $k^{(z_{p+1})}, \cdots, k^{(z_s)}$ sämtlich positiv sind.

Wir haben jetzt noch p' unabhängige primäre Zahlen aus (2) zur Verfügung und wollen zeigen, daß man mit ihrer Hilfe noch genau e' unabhängige unverzweigte relativquadratische Körper in bezug auf k konstruieren kann. Ich wähle zu diesem Zweck eine Zahl δ_1 aus der Klasse d_1' des Klassensystems $d_1^{y_1} \cdots d_e^{y_e}$, die nicht Hauptklasse im engeren Sinne ist, und normiere δ_1 durch Multiplikation mit einer Einheit so, daß die zu δ_1 konjugierten Zahlen in den Körpern $k^{(z_1)}, \cdots, k^{(z_p)}$ positiv sind. Es muß dann unter den Zahlen:

$$\delta_1^{(z_{p+1})}, \cdots, \delta_1^{(z_s)} \tag{8}$$

sicher eine negative sein; man kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß die erste unter ihnen negativ sei. Ferner wollen wir noch voraussetzen, daß die Klasse d_1' so gewählt sei, daß unter den Zahlen (8) möglichst wenige negative vorkommen.

Unter den p' unabhängigen primären Zahlen aus (2), die noch zur Verfügung stehen, gibt es nun keine einzige mehr, deren sämtliche konjugierte in den Körpern $k^{(s_{p+1})}, \cdots, k^{(s_g)}$ positiv wären. Denn sonst könnte man noch einen unabhängigen Körper von der Art der Körper $K_1, \cdots, K_e$ konstruieren, was unmöglich ist. Denn es existieren in der Klassengruppe von k im weiteren Sinne nur $2^e - 1$ Untergruppen vom Grade $2^{h'-1}$, denen die $2^e - 1$ konstruierten unverzweigten Körper eindeutig zugeordnet sind. Es folgt daraus, daß man stets eine primäre Zahl ω_{e+1} von der Gestalt (2) angeben kann, so daß $\omega_{e+1}^{(s_{p_1+1})}$ negativ und $\omega_{e+1}^{(s_{p_1+2})}, \cdots, \omega_{e+1}^{(s_g)}$ positiv ausfallen. Wir untersuchen jetzt den Körper $K_{e+1} = (k, \sqrt{\omega_{e+1}})$ und behaupten, daß die Anzahl der ambigen Komplexe in ihm größer als $e - 1$ ist. Wäre sie nämlich gleich oder kleiner als $e - 1$, so würde folgen, daß der Körper K_{e+1} zu einer Untergruppe der Klassengruppe von k gehört, zu der bereits ein unverzweigter Körper konstruiert ist, was unmöglich ist. Es gilt also für K_{e+1}:

$$a \geqq e,$$

andererseits folgt aus (6), da $n - n_1 = 1$ ist,

$$a \leqq e,$$

es ist also die Anzahl der ambigen Komplexe genau gleich e. Daraus schließt man, daß

$$v = m' - t + f - n_1 \tag{9}$$

ist; denn nach (4) ist v nicht kleiner und nach (5) nicht größer als die rechte Seite von (9). Die Ideale in K_{e+1} lassen sich nun wieder in der Form darstellen:

$$\mathfrak{J}^q = A\mathfrak{j}\mathfrak{Q}_1^{F_1(S_1)} \cdots \mathfrak{Q}_e^{F_e(S_1)}, \tag{10}$$

wo die Bezeichnungen die analoge Bedeutung wie in (7) haben. Die Ideale $\mathfrak{Q}_1, \cdots, \mathfrak{Q}_e$ kann man sich so gewählt denken, daß ihre Relativnormen resp. in die Klassen $c_1, \cdots, c_e$ fallen. Ich behaupte jetzt, daß die Relativnormen von Zahlen aus K_{e+1} nicht in die Klasse c_1' fallen können. Ist nämlich α die Relativnorm einer beliebigen Zahl A aus k, so gilt zunächst für jeden Index i:

$$\left(\frac{\alpha, \omega_{e+1}}{1^{(i)}}\right) = 1. \tag{11}$$

Um unsere Behauptung zu beweisen, normieren wir α, d. h. wir verwandeln α durch Multiplikation mit einer geeignet gewählten Einheit ξ_α aus k in eine Zahl, deren konjugierte in den Körpern $k^{(s_1)}, \cdots, k^{(s_p)}$ positiv sind. Wir wollen zeigen, daß wir dies stets mit Hilfe einer Einheit bewerkstelligen können, die selbst Relativnorm einer Zahl aus K_{e+1} ist.

Bedeuten nämlich $k^{(y_1)}, \cdots, k^{(y_{n_1})}$ diejenigen unter den Körpern $k^{(z_1)}, \cdots, k^{(z_p)}$, in denen die zu ω_{e+1} konjugierten Zahlen negativ werden, so ist zunächst klar, daß alle Einheiten ξ, welche die Bedingungen:

$$\left(\frac{\xi}{q_{i_1}}\right) = 1, \cdots, \left(\frac{\xi}{q_{i_t}}\right) = 1 \tag{12}$$

$$\left(\frac{\xi, \omega_{e+1}}{1^{(y_1)}}\right) = 1, \cdots, \left(\frac{\xi, \omega_{e+1}}{1^{(y_{n_1})}}\right) = 1 \tag{13}$$

befriedigen, Relativnormen von Zahlen aus K_{e+1} sind. Denn alle Einheiten, welche diese Eigenschaft haben, müssen (12) und (13) erfüllen. Es kann daher höchstens $m' - t + f - n_1$ unabhängige Einheitenverbände geben, deren Einheiten Relativnormen von Zahlen aus K_{e+1} sind; daraus folgt in Verbindung mit (9), daß alle Einheiten, welche die Bedingungen (12) und (13) erfüllen, Relativnormen von Zahlen aus K_{e+1} sind.

Es mögen nun unter den Zahlen $\alpha^{(z_1)}, \cdots, \alpha^{(z_p)}$ im ganzen n' negative vorhanden sein, die mit:

$$\alpha^{(x_1)}, \cdots, \alpha^{(x_{n'})} \tag{14}$$

bezeichnet seien. Die gesuchte Einheit ξ_α hat dann außer den Bedingungen (12) und (13) noch die weiteren:

$$\xi_\alpha^{(x_1)}, \cdots, \xi_\alpha^{(x_{n'})} \text{ negativ} \tag{15}$$

zu erfüllen. Um die Einheit ξ_α bequemer darstellen zu können, wollen wir noch über die Einheiten $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p$ in (1) eine besondere Verfügung treffen. Wir wollen uns ε_i so gewählt denken, daß

$$\varepsilon_i^{(z_i)} < 0, \ \varepsilon_i^{(z_j)} > 0 \quad \begin{pmatrix} i, j = 1, 2, \cdots, p \\ j \neq i \end{pmatrix}.$$

Daß diese Wahl, durch die die Ideale $\mathfrak{q}_i$ nicht weiter berührt werden, stets möglich ist, erkennt man leicht, wenn man bedenkt, daß die Vorzeichenanordnungen, die sich durch die Reihen:

$$\varepsilon^{(z_1)}, \cdots, \varepsilon^{(z_p)}$$

ergeben, wenn man ε alle Einheiten des Systems:

$$\varepsilon_1^{u_1} \cdot \varepsilon_2^{u_2} \cdot \cdots \cdot \varepsilon_p^{u_p}, \ (u = 0, 1)$$

durchlaufen läßt, alle überhaupt möglichen sind. Setzt man jetzt:

$$\xi_\alpha = \varepsilon_{x_1} \cdot \varepsilon_{x_2} \cdot \cdots \cdot \varepsilon_{x_{n'}},$$

so ist ξ_α eine Einheit der gewünschten Art. Denn sie befriedigt die Bedingungen (12) und (15). Daß sie auch (13) befriedigt, folgt daraus, daß alle Indizes $x_1, \cdots, x_{n'}$ von den Indizes $y_1, \cdots, y_{n_1}$ verschieden sind. Denn aus (11) und (14) folgt, daß:

$$\omega^{(x_1)}, \cdots, \omega^{(x_{n'})}$$

positiv sind. Damit ist unsere Behauptung bewiesen, daß sich α mit Hilfe einer Einheit normieren läßt, die Relativnorm einer Zahl aus K_{e+1} ist. Ich kann daher direkt annehmen, daß α normiert sei. Fiele nun α in die Klasse d_1', so wäre α mit δ_1 im engeren Sinne äquivalent und folglich $\alpha^{(s_p+1)}$ negativ. Da auch $\omega_{e+1}^{(s_p+1)}$ negativ ist, so widerspricht dies der Relation:

$$\left(\frac{\alpha, \omega_{e+1}}{1^{(s_p+1)}}\right) = 1.$$

Damit ist gezeigt, daß α nicht in der Klasse d_1' liegen kann, und deshalb folgt aus (10), daß alle Relativnormen von Idealen aus K_{e+1} in einer Untergruppe der Klassengruppe von k vom Grade 2^{h-1} liegen. Daraus schließt man in bekannter Weise, daß K_{e+1} unverzweigt in bezug auf k ist.

Ist $e' > 1$, so kann man noch einen weiteren unverzweigten relativquadratischen Körper in bezug auf k konstruieren. Wir nehmen zu diesem Zweck an, daß K_{e+1} zu der durch die Kongruenz:

$$y_1 \equiv 0 \,(2)$$

definierten Untergruppe der Klassengruppe von k gehört, was offenbar durch nachträgliche Abänderung der Bezeichnung der Klassen d stets erreicht werden kann. Es sei nun δ_2 eine Zahl aus einer Klasse d_2' des Systems $d_2^{y_2} \cdots d_{e'}^{y_{e'}}$, die nicht Hauptklasse im engeren Sinne ist, und zwar sei δ_2 normiert. Es muß dann unter den Zahlen:

$$\delta_2^{(s_p+2)}, \cdots, \delta_2^{(s_s)} \tag{16}$$

eine negative sein. Denn wären alle Zahlen (16) positiv, so müßten auch alle Zahlen $\delta_1^{(s_p+2)}, \cdots, \delta_1^{(s_s)}$ positiv sein, weil δ_1 so gewählt sein sollte, daß unter den Zahlen (8) möglichst wenige negative vorkommen. Es wäre dann δ_2 mit δ_1 äquivalent, was der Wahl der Klasse d_2' widerspricht. Wir nehmen deshalb an, die erste der Zahlen (16) sei negativ, und setzen außerdem voraus, daß die Klasse d_2' so gewählt sei, daß sich unter den Zahlen (16) möglichst wenige negative befinden. Wir wählen dann unter den $p'-1$ noch zur Verfügung stehenden unabhängigen primären Zahlen aus (21) eine solche ω_{e+2} aus, daß $\omega_{e+2}^{(s_p+2)}$ negativ und $\omega_{e+2}^{(s_p+3)}, \cdots, \omega_{e+2}^{(s_s)}$ positiv ausfallen. Durch Multiplikation mit einer geeigneten Potenz von ω_{e+1} können wir es offenbar auch noch erreichen, daß $\omega_{e+2}^{(s_p+1)}$ positiv wird. Wir wollen also voraussetzen, daß unter den Zahlen:

$$\omega_{e+2}^{(s_p+1)}, \ \omega_{e+2}^{(s_p+2)}, \cdots, \omega_{e+2}^{(s_s)}$$

nur die zweite negativ sei. Es lassen sich dann für ω_{e+2} die ganz analogen Überlegungen durchführen wie für ω_{e+1}, womit die Existenz eines

zweiten unabhängigen unverzweigten relativquadratischen Körpers in bezug auf k bewiesen ist. Den angegebenen Konstruktionsprozeß kann man offenbar fortsetzen und zu den Körpern $K_1, \cdots, K_e$ noch weitere e' Körper $K_{e+1}, \cdots, K_{e+e'}$ konstruieren, so daß damit im ganzen $e + e'$ unabhängige unverzweigte relativquadratische Körper in bezug auf k gewonnen sind, deren Existenz wir beweisen wollten.

§ 11.

Der Aufbau des Klassenkörpers.

Wir haben jetzt durch die Entwicklungen der vorstehenden Paragraphen die Bausteine gewonnen, aus denen wir den vollständigen Klassenkörper aufbauen können.

Es sei die Klassenzahl h von k gleich $l_1^{h_1'} \cdots l_i^{h_i'}$, wo $l_1, \cdots, l_i$ verschiedene Primzahlen sind; bei der Klassenzahlbestimmung ist der schärfere Äquivalenzbegriff zugrunde zu legen, nach dem zwei Ideale nur dann äquivalent heißen, wenn ihr Quotient eine total positive Körperzahl ist. Wir konstruieren dann, wie bereits in der Einleitung angegeben, unverzweigte relativ-Abelsche Körper in bezug auf k von den resp. Relativgraden $l_1^{h_1'}, \cdots, l_i^{h_i'}$. Durch Zusammensetzung dieser Körper entsteht dann der vollständige Klassenkörper. Es genügt, wenn wir hier die Konstruktion eines solchen Körpers angeben. Wir setzen deshalb $h = l_1^{h_1'} \cdot q$, wo q zu l_1 prim sei, und verstehen unter l_1 eine beliebige Primzahl.

Es sei wieder das System der q^{ten} Potenzen der Idealklassen von k in der Gestalt darstellbar:

$$(c)_k = c_1^{x_1} \cdots c_e^{x_e}, \quad \left(x_i = 0, 1, \cdots, l_1^{h_i''} - 1\right), \quad h_1'' + \cdots + h_e'' = h_1',$$

und es werde wieder, wie früher schon, um der einfacheren Ausdrucksweise willen, das System aller Klassen, deren q^{te} Potenz in die Hauptklasse fällt, mit 1 bezeichnet. Es möge nun $K_1^{(1)}$ derjenige unverzweigte Körper vom Relativgrad l_1 in bezug auf k sein, der zu der durch die Kongruenz $x_1 \equiv 0 (l_1)$ definierten Untergruppe der Klassengruppe von k gehört. Ist jetzt $h_1'' > 1$, also $c_1^{l_1} \sim 1$ in k, so ist in $K_1^{(1)}$ die Äquivalenz $c_1 \sim C^{l_1}$, wo C eine beliebige Klasse aus $K_1^{(1)}$ bedeutet, unmöglich. Denn aus der Annahme, daß $K_1^{(1)}$ zu der genannten Untergruppe gehört, folgt, daß

$$N_k(C) \sim c^{l_1} c_2^{a_2} \cdots c_e^{a_e} \quad \text{in} \quad k,$$

wo c eine Klasse aus k und $a_2, \cdots, a_e$ ganze rationale Zahlen bedeuten. Es müßte also auch gelten:

$$c_1^{l_1} \sim N_k(C^{l_1}) \sim c^{a_1} c_2^{a_2 l_1} \cdots c_e^{a_e l_1} \quad \text{in} \quad k,$$

und hieraus würde folgen, daß

$$c_1^{b_1 l_1} c_2^{b_2 l_1} \cdots c_e^{b_e l_1} \sim 1 \quad \text{in} \quad k,$$

wo $b_1, \cdots, b_e$ wieder ganze rationale Zahlen bedeuten, von denen die erste nicht durch l_1 teilbar ist. Da die letzte Äquivalenz unmöglich ist, wenn $c_1^{l_1} \not\sim 1$ in k, so ist auch die Äquivalenz $c_1 \sim C^{l_1}$ in $K_1^{(1)}$ unmöglich.

Führen wir den Begriff des *Klassenverbandes* ein als eines Systems von Klassen, das durch Multiplikation einer fest gegebenen Klasse mit den l_1^{ten} Potenzen aller Klassen des Körpers entsteht, und nennen Hauptklassenverband denjenigen, der die l_1^{ten} Potenzen aller Klassen enthält, so können wir die vorstehenden Entwicklungen dahin zusammenfassen, daß c_1 einen vom Hauptverbande verschiedenen Klassenverband in $K_1^{(1)}$ definiert. Es existiert dann, wie aus den Entwicklungen der vorigen Paragraphen folgt, in bezug auf $K_1^{(1)}$ ein unverzweigter relativzyklischer Körper $K_1^{(2)}$ vom Relativgrad l_1, der zu der durch die Bedingung „Exponent von c_1 durch l_1 teilbar" definierten Untergruppe der Klassengruppe von $K_1^{(1)}$ gehört. Bezeichnet man jetzt die erzeugende Substitution der Relativgruppe von $K_1^{(1)}$ in bezug auf k mit S_1, so folgt aus dem Umstande, daß die genannte Bedingung gegenüber S_1 invariant ist, daß $K_1^{(2)}$ ein relativ-Galoisscher Körper vom Relativgrad l_1^2 in bezug auf k ist. Daß er auch relativ-Abelsch ist, folgt aus der Darstellung der Substitutionen seiner Relativgruppe, die die Vertauschbarkeit derselben ohne weiteres erkennen läßt. Daß er endlich relativzyklisch sein muß, folgt aus dem Umstande, daß er nur einen relativzyklischen Unterkörper vom Relativgrad l_1 in bezug auf k besitzt. Denn unter den Abelschen Gruppen vom Grade l_1^2 besitzt nur die zyklische die Eigenschaft, daß sie nur *eine* Untergruppe vom Grade l_1 besitzt. Ist nämlich eine Abelsche Gruppe vom Grade l_1^2 nicht zyklisch, so ist sie in der Gestalt

$$S_1^{x_1} S_2^{x_2} \, (x_i = 0, 1, \cdots, l_1 - 1)$$

darstellbar und besitzt daher mehr als eine Untergruppe vom Grade l_1.

Daß $K_1^{(2)}$ nur einen Unterkörper vom Relativgrad l_1 in bezug auf k, nämlich den Körper $K_1^{(1)}$, besitzt, ist nach der Konstruktion der Körper beinahe selbstverständlich. Besäße nämlich $K_1^{(2)}$ noch einen zweiten Unterkörper K_1', so wäre dieser unverzweigt vom Relativgrad l_1 in bezug auf k und gehörte daher zu einer bestimmten Untergruppe der Klassengruppe von k, die von der durch die Bedingung $x_1 \equiv 0 (l_1)$ definierten Untergruppe verschieden wäre. $K_1^{(2)}$ würde dann durch Zusammensetzung zweier in bezug auf k unverzweigter Körper vom Relativgrad l_1 entstehen, nämlich der Körper $K_1^{(1)}$ und K_1'. Das ist unmöglich, wie aus folgender

Überlegung hervorgeht. Das Klassensystem des Körpers $K_1^{(1)}$ läßt sich nach § 6 in der Gestalt schreiben:

$$C_2^{F_2(S_1)} \cdots C_e^{F_e(S_1)}(c)_k C^{l_1},$$

wo $C_2, \cdots, C_e$ Klassen aus $K_1^{(1)}$ bedeuten, deren Relativnormen in k in die Klassen $c_2, \cdots, c_e$ fallen; $(c)_k$ bedeutet das Klassensystem aus k, und C eine beliebige Klasse aus $K_1^{(1)}$. $F_2(S_1), \cdots, F_e(S_1)$ sind ganze ganzzahlige Funktionen von S_1 vom Grade $l_1 - 2$. Die Körper $K_2^{(1)}, \cdots, K_e^{(1)}$ nun, die unverzweigt vom Relativgrad l_1 in bezug auf k sind und zu den Untergruppen $x_2 \equiv 0(l_1), \cdots, x_e \equiv 0(l_1)$ resp. gehören, sind natürlich auch in bezug auf $K_1^{(1)}$ unverzweigt und gehören in $K_1^{(1)}$ resp. zu den durch folgende Bedingungen definierten $e-1$ Untergruppen der Klassengruppe von $K_1^{(1)}$:

$$F_2(1) \equiv 0(l_1), \cdots, F_e(1) \equiv 0(l_1).$$

Denn die Relativnormen aller Klassen aus $K_1^{(1)}$, die z. B. der Bedingung $F_2(1) \equiv 0(l_1)$ entsprechen, liefern in k die durch die Bedingung $x_2 \equiv 0(l_1)$ charakterisierte Untergruppe der Klassengruppe von k, und analog für die übrigen Indizes. Daraus folgt, daß K_1' in dem Körper $(K_1^{(1)}, K_2^{(1)}, \cdots, K_e^{(1)})$ nicht enthalten sein kann, weil K_1' in bezug auf $K_1^{(1)}$ zu der durch die Bedingung „Exponent von c_1 durch l_1 teilbar" definierten Untergruppe der Klassengruppe von $K_1^{(1)}$ gehört. Damit ist gezeigt, daß $K_1^{(2)}$ relativzyklisch vom Relativgrad l_1^2 in bezug auf k ist.

Ist h_1'' auch größer als 2, also $c_1^{l_1^2} \sim 1$ in k, so kann man das Verfahren fortsetzen, und es gelingt auf dem angegebenen Wege, einen relativzyklischen Körper vom Relativgrad $l_1^{h_1''}$ in bezug auf k zu konstruieren. In analoger Weise konstruiert man die unverzweigten relativzyklischen Körper $K_2^{(h_2'')}, \cdots, K_e^{(h_e'')}$ in bezug auf k, die resp. die Relativgrade $l_1^{h_2''}, \cdots, l_1^{h_e''}$ besitzen, indem man mit den Klassen $c_2, \cdots, c_e$ ebenso operiert wie oben mit c_1. Durch Zusammensetzung der e Körper entsteht ein unverzweigter relativ-Abelscher Körper vom Relativgrad $l_1^{h_1'}$ in bezug auf k.

In entsprechender Weise erhält man unverzweigte, relativ-Abelsche Körper von den Relativgraden $l_2^{h_2'}, \cdots, l_i^{h_i'}$ in bezug auf k. Durch Zusammensetzung aller dieser Körper erhält man einen unverzweigten relativ-Abelschen Körper vom Relativgrad h in bezug auf k, dessen Relativgruppe offenbar seiner Entstehungsweise nach mit der Klassengruppe von k holoedrisch isomorph ist. Wir haben damit folgenden fundamentalen Satz bewiesen:

Satz 9: Es sei k ein beliebiger algebraischer Zahlkörper, dessen Klassenzahl gleich h ist, wenn wir zwei Ideale als äqui-

valent betrachten, deren Quotient als total positive Körperzahl dargestellt werden kann. Es existiert dann in bezug auf k ein unverzweigter relativ-Abelscher Körper vom Relativgrad h, dessen Relativgruppe mit der Gruppe der Idealklassen in k holoedrisch isomorph ist. Dieser Körper heiße der Klassenkörper von k.

§ 12.

Zusammenhang mit der komplexen Multiplikation der elliptischen Funktionen.

Ist der Grundkörper k ein imaginärer quadratischer Körper, so liefert die Theorie der komplexen Multiplikation der elliptischen Funktionen einen Relativkörper $\overline{K}$ in bezug auf k, dessen Relativgruppe ebenfalls mit der Gruppe der Idealklassen von k holoedrisch isomorph ist.*) Es soll im folgenden kurz gezeigt werden, daß dieser Körper $\overline{K}$, den wir als Klassenkörper der komplexen Multiplikation bezeichnen, identisch ist mit dem arithmetisch konstruierten Klassenkörper K in bezug auf k. Die Eigenschaft von $\overline{K}$, auf die wir uns bei dem Identitätsbeweise stützen, ist folgende: Ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal aus k, das nicht in der Relativdiskriminante von $\overline{K}$ aufgeht, und ist g der niedrigste Exponent, für den die Äquivalenz:

$$\mathfrak{p}^g \sim 1 \tag{1}$$

in k gilt, so zerfällt $\mathfrak{p}$ in $\overline{K}$ in $\frac{h}{g}$ verschiedene Primfaktoren, wenn mit h die Klassenzahl von k bezeichnet wird.**)

Wir können wieder ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß die Klassenzahl von k gleich $l^{h'}$ sei, wo l eine Primzahl bedeutet; denn man kann, wie auch bei der Konstruktion des Klassenkörpers ausgeführt wurde, die einzelnen Untergruppen der Klassengruppe von k, deren Grade Potenzen verschiedener Primzahlen sind, für sich betrachten. Es sei also das Klassensystem von k in der Gestalt darstellbar:

$$c_1^{x_1} c_2^{x_2} \cdots c_e^{x_e} \quad (x_i = 1, 2, \cdots, l^{h_i})$$

und dementsprechend das Klassensystem von $k' = (k, \zeta)$ in der Gestalt:

$$c_1^{x_1} c_2^{x_2} \cdots c_e^{x_e} d,$$

wo d das System von Klassen bedeutet, deren Relativnormen in k in die Hauptklasse fallen. Es bedeute wie oben K den arithmetischen Klassen-

*) Vgl. H. Weber, Elliptische Funktionen und algebraische Zahlen, Braunschweig 1891, III. Teil.

**) H. Weber, l. c., p. 444 u. 445.

körper und $\bar{K}$ den Klassenkörper der komplexen Multiplikation und es sei:

$$(K, \zeta) = K', \quad (\bar{K}, \zeta) = \bar{K}'.$$

Die Körper K' und $\bar{K}'$ setzen sich dann jeder aus e relativzyklischen Körpern in bezug auf k' zusammen, deren Relativgrade $l^{h_1}, \cdots, l^{h_e}$ sind. Wir nehmen an, daß die Bezeichnung der Klassen c so gewählt sei, daß $h_1 \geqq h_2 \cdots \geqq h_e$ sei. Es gibt dann in K' e unabhängige relativzyklische Körper vom Relativgrad l in bezug auf k', die durch Adjunktion von $\sqrt[l]{\omega_1}, \cdots, \sqrt[l]{\omega_e}$ erzeugt werden mögen, und zwar möge ω_i zu der durch die Kongruenz $x_i \equiv 0\,(l)$ definierten Untergruppe der Klassengruppe von k' gehören. Ebenso enthält $\bar{K}'$ e unabhängige relativzyklische Körper vom Relativgrad l in bezug auf k', die durch Adjunktion von $\sqrt[l]{\bar{\omega}_1}, \cdots, \sqrt[l]{\bar{\omega}_e}$ erzeugt werden mögen, und zwar möge die Bezeichnung so gewählt sein, daß $(\sqrt[l]{\bar{\omega}_i}, k')$ als Unterkörper in einem in $\bar{K}'$ enthaltenen relativzyklischen Körper vom Relativgrad l^{h_i} liegt.

Es möge jetzt $h_1 = h_2 = \cdots = h_{e'}$ sein und $h_{e'+1} < h_{e'}$. Ich fasse dann ein Primideal $\mathfrak{p}$ aus k' ins Auge mit den Eigenschaften:

$$\left(\frac{\omega_1}{\mathfrak{p}}\right)_l = 1, \cdots, \left(\frac{\omega_{e'}}{\mathfrak{p}}\right)_l = 1, \tag{1}$$

wobei die Primideale, die in der Relativdiskriminante von $\bar{K}$ in bezug auf k aufgehen, ausgeschlossen bleiben. Es gilt dann offenbar:

$$\mathfrak{p}^{l^{h_1-1}} \sim 1 \text{ in } k',$$

wo diese Äquivalenz wieder die Bedeutung haben soll, daß $\mathfrak{p}^{l^{h_1-1}}$ in einer Klasse des Systems d liegt. Denn $\mathfrak{p}$ liegt nach (1) in einer Klasse, die der durch die Kongruenzen:

$$x_1 \equiv 0, \cdots, x_{e'} \equiv 0\,(l)$$

definierten Untergruppe der Klassengruppe von k' angehört. Es zerfällt daher $\mathfrak{p}$ in $\bar{K}'$ in mindestens l^{h-h_1+1} verschiedene Primfaktoren; daraus folgt, daß auch

$$\left(\frac{\bar{\omega}_1}{\mathfrak{p}}\right)_l = 1, \cdots, \left(\frac{\bar{\omega}_{e'}}{\mathfrak{p}}\right)_l = 1 \tag{2}$$

sein muß. Wenn aber die Gleichungen (1) für alle Primideale aus k' (mit Ausnahme einer endlichen Anzahl) die Gleichungen (2) zur Folge haben, so muß:

$$K_1' = (k', \sqrt[l]{\omega_1}, \cdots, \sqrt[l]{\omega_{e'}}) = (k', \sqrt[l]{\bar{\omega}_1}, \cdots, \sqrt[l]{\bar{\omega}_{e'}})$$

sein.*) Operiert man jetzt mit K_1' so weiter, wie wir eben mit k' operiert haben, so ergibt sich dadurch die Identität von K' mit $\bar{K}'$. Daß dann auch K und $\bar{K}$ identisch sind, ergibt sich wieder daraus, daß

*) Furtwängler, Reziprozitätsgesetz, Satz 26, p. 28.

diese Körper zu derselben Untergruppe der Relativgruppe von K' in bezug auf k gehören. Hiermit ist folgender Satz bewiesen:

Satz 10: *Ist k ein beliebiger imaginärer quadratischer Körper, so ist der auf arithmetischem Wege zu k konstruierte Klassenkörper identisch mit dem zu k gehörigen Klassenkörper aus der Theorie der komplexen Multiplikation der elliptischen Funktionen. Der letzte ist daher unverzweigt in bezug auf k.*

§ 13.

Existenz von unendlich vielen Primidealen in jeder Klasse eines Zahlkörpers.

Auf Grund des Existenzbeweises für den Klassenkörper eines beliebigen Zahlkörpers k kann man den Nachweis führen, daß in jeder Idealklasse von k unendlich viel Primideale liegen. Wir zeigen es zunächst für die Hauptklasse von K. Ist K der Klassenkörper von k und h die Klassenzahl von k, so zerfallen nur solche Primideale aus k in K in h verschiedene Primfaktoren, die in k in der Hauptklasse liegen. Ist $\mathfrak{P}_i$ ein beliebiges Primideal aus K, so gilt:

$$\sum_{(\mathfrak{P}_i)} \frac{1}{n(\mathfrak{P}_i)^s} = \log \frac{1}{s-1} + f(s) \qquad (s>1). \tag{1}$$

Daraus folgt, wenn man mit $\mathfrak{p}_i$ ein beliebiges Primideal der Hauptklasse in k bezeichnet:

$$\sum_{(\mathfrak{p}_i)} \frac{1}{n(\mathfrak{p}_i)^s} \geqq \frac{1}{h} \log \frac{1}{s-1} + f_1(s) \qquad (s>1). \tag{2}$$

$f(s)$ und $f_1(s)$ bedeuten Funktionen der reellen Veränderlichen s, die für $s=1$ endlich bleiben. Aus (2) folgt sofort unsere Behauptung.

Daß auch in jeder Klasse von k unendlich viele Primideale liegen, folgt durch einen ganz analogen Beweis, wie ihn Herr H. Weber in seinen Untersuchungen über Zahlengruppen in algebraischen Körpern (Zweite Abhandlung, § 1) gegeben hat.*) Wir können auf Grund der Weberschen Entwickelungen, da alle wesentlichen Voraussetzungen hier erfüllt sind, ohne weiteres folgendes Theorem aussprechen:

Satz 11: *Durchläuft $\mathfrak{p}_i$ alle Primideale einer bestimmten Idealklasse des Körpers k, dessen Klassenzahl gleich h ist, so gilt:*

$$\sum_{(\mathfrak{p}_i)} \frac{1}{n(\mathfrak{p}_i)^s} = \frac{1}{h} \log \frac{1}{s-1} + f(s), \qquad (s>1)$$

wo $f(s)$ eine Funktion der reellen Veränderlichen s bedeutet, die endlich bleibt, wenn sich s der 1 nähert. In jeder Idealklasse von k liegen daher unendlich viele Primideale.

*) H. Weber, Über Zahlengruppen in algebraischen Körpern. Math. Ann. 49 (1897), p. 83.

Die Reihenentwicklungen der Potentialtheorie.

Von

EMIL HILB in Augsburg.

Herr Bôcher gibt in seinem Buche: „Über die Reihenentwicklungen der Potentialtheorie“ (Leipzig 1894) im Anschlusse an eine von Prof. Klein im Winter 1889—90 gehaltene Vorlesung eine zusammenfassende Ableitung der wichtigsten Reihenentwicklungen, welche hier in Betracht kommen. Die verschiedenen in der Potentialtheorie benutzten Orthogonalsysteme erscheinen dabei als Spezialfälle des Systems konfokaler Zykliden. Die einzelnen Reihenglieder bez. die Konstanten in den die einzelnen Reihenglieder definierenden Differentialgleichungen werden durch das von Herrn Klein aufgestellte Oszillationstheorem*) festgelegt. Dadurch ist das formale Gesetz der Reihenentwicklung gegeben; doch findet sich bei Bôcher kein Beweis für die Möglichkeit und Konvergenz der Entwicklungen. Der Konvergenzbeweis wurde später von Herrn Jaccottet in seiner Doktordissertation: „Über die allgemeine Reihenentwicklung nach Laméschen Produkten“ (Göttingen 1895) in Angriff genommen, aber nicht zu Ende geführt. In dieser Arbeit sollen nun die von Herrn Prof. Hilbert geschaffenen Methoden der Integralgleichungen**) auf diese Probleme angewendet werden. Es wird sich dabei der *Konvergenzbeweis* nahezu von selbst ohne jede Rechnung aus den viel allgemeineren Sätzen der obigen Theorie ergeben, ebenso läßt sich jetzt auch die *Möglichkeit der Entwicklungen* streng beweisen. Es handelt sich nämlich nur mehr darum, zu zeigen, daß die bisher hier bekannten Eigenfunktionen***) oder die ausgezeichneten Lösungen†), welche sich durch Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen ergaben, alle überhaupt möglichen erschöpfen. Für eine Anzahl von Fällen ist dieses nun schon längst streng bewiesen, und

* Der Name findet sich zuerst bei Klein in den Göttinger Nachrichten 1890, S. 90.

**) Göttinger Nachrichten 1904, S. 49—91 u. S. 213—259.

***) Hilbert, ib. S. 67.

†) Pockels, $\Delta u + k^2 u = 0$, S. 33.

wenn das von Klein ausgesprochene Kontinuitätsprinzip*), welches aussagt, daß bei stetiger Abänderung irgend welcher in diesem Probleme auftretender Parameter kein Eigenwert verloren geht, richtig ist, so gilt der Satz in allen Fällen. Da aber die Theorie der Integralgleichungen uns in den Stand setzt, die Abhängigkeit der Eigenwerte von den Parametern zu untersuchen, so läßt sich jetzt tatsächlich das Kontinuitätsprinzip wenigstens für die in Betracht kommenden Fälle streng beweisen, nachdem gewisse von H. A. Schwarz**) zuerst aufgestellte Sätze über die Eigenwerte verallgemeinert sind.

In Verfolgung dieses Gedankenganges wird in dieser Arbeit zunächst von der Möglichkeit der Entwicklung nach Kugelfunktionen ausgegangen, und es werden die Reihenentwicklungen nach den gewöhnlichen Laméschen Funktionen und den Eigenfunktionen behandelt, welche zu Gebieten auf der Kugel gehören, die von vier konfokalen sphärischen Kegelschnitten begrenzt sind. Durch diese Beispiele soll nur die allgemeine Lösungsmethode***) vorbereitet werden, welche aber nicht von der Differentialgleichung der Kugelfunktionen ausgeht, sondern von einer anderen, neuen Differentialgleichung, welche wir Normalgleichung nennen wollen. Mit dieser lassen sich in der Tat alle vorkommenden Differentialgleichungen leicht in Verbindung bringen, und sie hat ferner die ausgezeichnete Eigenschaft, daß man ohne weiteres ersieht, daß alle ihre Eigenfunktionen sich aus gewöhnlichen Differentialgleichungen ergeben. In bezug auf ihre weiteren Eigenschaften ist auf die Arbeit zu verweisen. Es ist dann eine Leichtigkeit, die Möglichkeit der von Bôcher gegebenen Reihenentwicklungen für das Zyklidensechsflach und das von 6 konfokalen Flächen 2. Grades begrenzte Sechsflach zu erweisen; alle anderen Fälle lassen sich auf analoge Weise behandeln.

§ 1.

Die Laméschen Polynome.

In seiner 2. Abhandlung über Integralgleichungen gibt Herr Prof. Hilbert†) eine ausführliche Ableitung für die Entwicklung nach Kugelfunktionen. Die hier gegebene Ableitung für die Laméschen Polynome schließt sich auf das engste daran an.

---

*) Pockels, S. 95.

**) H. A. Schwarz, Gesammelte Abhandlungen I, S. 260.

***) Die für die allgemeine Lösungsmethode selbst wesentlichen Sätze sind durch Kursivdruck hervorgehoben.

†) Hilbert l. c. S. 241.

Es sei

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

$$\frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - b^2} - \frac{z^2}{c^2 - \mu^2} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{x^2}{\nu^2} - \frac{y^2}{b^2 - \nu^2} - \frac{z^2}{c^2 - \nu^2} = 0$$

und

$$-b < \nu < b < \mu < c.$$

Man hat also eine Kugel und zwei Systeme von Kegeln 2. Ordnung. Die von den Kegeln auf der Kugel ausgeschnittenen Kurven $\mu = C_1$, $\nu = C_2$ führen wir als krummlinige Koordinaten ein und bilden den Ausdruck:

$$L(u) = \frac{p}{\sqrt{eg - f^2}} \left\{ \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\frac{g \frac{\partial u}{\partial \mu} - f \frac{\partial u}{\partial \nu}}{\sqrt{eg - f^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{e \frac{\partial u}{\partial \nu} - f \frac{\partial u}{\partial \mu}}{\sqrt{eg - f^2}} \right) \right\}, \tag{2}$$

wobei

$$ds^2 = e d\mu^2 + 2f d\mu d\nu + g d\nu^2,$$

p irgend eine Funktion von ξ, η ist. Also hat man in unserem Falle:

$$\begin{aligned} ds^2 &= (\mu^2 - \nu^2) \left(\frac{d\mu^2}{(\mu^2 - b^2)(c^2 - \mu^2)} + \frac{d\nu^2}{(b^2 - \nu^2)(c^2 - \nu^2)} \right) \\ &= (\mu^2 - \nu^2) \left(\frac{d\mu^2}{R(\mu)} + \frac{d\nu^2}{R_1(\nu)} \right) \end{aligned} \tag{3}$$

und

$$L(u) = \frac{p}{\mu^2 - \nu^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right), \tag{4}$$

wenn

$$d\xi = \frac{d\mu}{\sqrt{R(\mu)}}, \quad d\eta = \frac{d\nu}{\sqrt{R_1(\nu)}} \tag{5}$$

ist. Führt man aber in bekannter Weise Polarkoordinaten für die Kugel ein, so erhält man, wenn man noch $p = \frac{1}{2\pi}$ setzt:

$$L_1(u) = \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right\}. \tag{6}$$

Die Greensche Funktion ist in bekannter Weise definiert. Es seien μ, ν irgend welche orthogonale Koordinaten auf einem singularitätenfreien Flächenstücke; μ^*, ν^* sei ein beliebiger Punkt, in welchem e^* und g^* im Linienelemente nicht verschwinden und nicht unendlich werden, dann ist die Greensche Funktion, für welche $L(u) = 0$ ist, von der Form:

$$g(\mu, \nu; \mu^*, \nu^*) = -\frac{1}{2} \log \left(e^* (\mu - \mu^*)^2 + g^* (\nu - \nu^*)^2 \right) + \gamma_1(\mu, \nu; \mu^*, \nu^*), \tag{7}$$

wobei γ_1 auf dem ganzen Flächenstücke regulär ist und so bestimmt werden muß, daß gewisse vorgegebene Randbedingungen erfüllt sind. In Punkten, wo e^* und g^* nicht die obigen Bedingungen erfüllen, ist die

obige Form etwas zu modifizieren, wie die kommenden Beispiele*) zeigen. Bei der Kugel führen wir als Randbedingung ein, daß γ_1 auf der ganzen Kugel regulär ist. Eine solche Greensche Funktion gibt es aber unter Zugrundelegung von $L_1(u) = 0$ nicht, wohl aber eine solche, für welche $L_1(u) = \frac{1}{4\pi}$ ist, und diese Funktion $G(\vartheta, \varphi; \vartheta^* \varphi^*)$ nennt man die erweiterte Greensche Funktion**), und zwar muß

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} G(\vartheta, \varphi; \vartheta^*, \varphi^*) \frac{1}{2\pi} \sin\vartheta d\varphi d\vartheta = 0$$

sein. Man findet dann

$$(8) \quad \begin{aligned} G &= -\left[\pi + \pi \log\left(\frac{1 - \cos\vartheta\cos\vartheta^* - \sin\vartheta\sin\vartheta^*\cos(\varphi - \varphi^*)}{2}\right)\right], \\ &= -\pi\left[\log\left(\frac{1-\cos\varrho}{2}\right) + 1\right] = -\pi\left[\log\sin^2\frac{\varrho}{2} + 1\right], \end{aligned}$$

wobei ϱ die kleinste sphärische Entfernung der zwei Punkte ϑ, φ; ϑ^*, φ^* bedeutet.

Die Eigenfunktionen von $L_1(u) + \lambda u = 0$ sind dann identisch mit den Eigenfunktionen, welche zu der Integralgleichung gehören:

$$(9) \qquad \lambda^{(n)} \int \varphi(\vartheta^*, \varphi^*)\, G(\vartheta, \varphi; \vartheta^*, \varphi^*)\, dK = \varphi(\vartheta, \varphi).$$

Dabei ergeben sich die $\lambda^{(n)}$ als Wurzeln einer transzendenten Gleichung. Man bestimmt sie leicht direkt (z. B. vergl. Pockels, $\Delta u + k^2 u = 0$, S. 106) und findet

$$(10) \qquad \lambda^{(n)} = \frac{n(n+1)}{2\pi} \quad \text{für} \quad n = 0, 1 \cdots,$$

wobei $\lambda^{(n)}$ ein $2n+1$-facher Eigenwert ist. Daraus folgt aber dann, nach der Hilbertschen Theorie, daß jede zweimal stetig differenzierbare Funktion auf der Kugel nach den obigen Eigenfunktionen, den Kugelflächenfunktionen, entwickelbar ist.

Der Übergang zu den zu der Gleichung

$$(11) \qquad L(u) + \lambda u = \frac{2\pi}{\mu^2 - \nu^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right) + \lambda u = 0$$

gehörigen Eigenfunktionen, den Laméschen Polynomen, ist jetzt leicht.

---

*) Vergl. z. B. Formel (12) für die den Nabelpunkten auf dem Ellipsoide entsprechenden Punkte, welche im übrigen die Anwendbarkeit der Hilbertschen Theorie nicht stören, wie man leicht durch Grenzübergang zeigt, nachdem man die vier Punkte durch kleine Kurven umgeben hat.

**) Hilbert l. c. S. 288.

Aus

$$x = \cos\vartheta = \frac{\mu\nu}{bc},$$

$$y = \cos\varphi\sin\vartheta = \frac{\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{b^2-\nu^2}}{b\sqrt{c^2-b^2}},$$

$$z = \sin\varphi\sin\vartheta = \frac{\sqrt{c^2-\mu^2}\sqrt{c^2-\nu^2}}{c\sqrt{c^2-b^2}}$$

folgt, daß die erweiterte Greensche Funktion gegeben ist durch:

$$G = -\left[\pi + \pi\log\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\mu\mu^*\nu\nu^*}{b^2c^2} - \frac{\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{b^2-\nu^2}\sqrt{\mu^{*2}-b^2}\sqrt{b^2-\nu^{*2}}}{b^2(c^2-b^2)} - \frac{\sqrt{c^2-\mu^2}\sqrt{c^2-\nu^2}\sqrt{c^2-\mu^{*2}}\sqrt{c^2-\nu^{*2}}}{c^2(c^2-b^2)}\right)\right]. \tag{12}$$

Die Oktanten unterscheiden sich durch die Vorzeichen der Wurzeln. Die Eigenwerte sind dann dieselben wie oben, und man erhält bekanntlich alle Eigenfunktionen wenn man setzt:

$$u = E_s^n(\mu)\cdot E_s^n(\nu), \tag{13}$$

wobei $E_s^n(\mu)$ der Gleichung*) genügt:

$$(\mu^2-b^2)(\mu^2-c^2)\frac{d^2E(\mu)}{d\mu^2} + \mu(2\mu^2-b^2-c^2)\frac{dE(\mu)}{d\mu} + [(b^2+c^2)v_s^n - n(n+1)\mu^2]E(\mu) = 0. \tag{14}$$

Es besteht dann ein analoger Satz wie oben über die Entwickelbarkeit von Funktionen nach diesen Laméschen Produkten.

§ 2.

Die Eigenfunktionen für Gebiete auf der Kugel, welche von vier konfokalen Kegeln 2. Grades ausgeschnitten werden.

Gegeben ist ein Rechteck auf der Kugel, welches von den Linien $\mu = \mu_1$, $\nu = \nu_1$, $\mu = \mu_2$, $\nu = \nu_2$ begrenzt ist, wobei noch die Lage der Seiten in bezug auf die verschiedenen Oktanten festgelegt ist. Wir bilden dann eine Funktion, welche jetzt der Gleichung $L(u) = 0$ genügt, für μ^*, ν^* logarithmisch unendlich wird und auf dem Rande verschwindet.

Um diese Funktion zu erhalten, denken wir unseren Bereich auf die $\xi\eta$-Ebene abgebildet, wobei wir die verschiedenen Oktanten durch passende Vermehrung von ξ und η um Perioden unterscheiden. Dem Bereiche entspricht dann in der $\xi\eta$-Ebene ein von geraden Linien begrenztes Rechteck, dessen Seiten die Längen a und b haben sollen. Unsere Gleichung geht dann über in:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} = 0. \tag{15}$$

*) v_s^n ist bekanntlich durch eine algebraische Gleichung zu bestimmen (siehe z. B. Heine, Kugelfunktionen, Bd. 1).

Die Greensche Funktion, welche also jetzt die Form hat:

$$(16)\quad G(\xi, \eta; \xi^*, \eta^*) = -\frac{1}{2}\log((\xi - \xi^*)^2 + (\eta - \eta^*)^2) + g(\xi, \eta; \xi^* \eta^*),$$

läßt sich für unseren Fall in expliziter, wenn auch etwas komplizierter Form vermittelst elliptischer Funktionen darstellen.*) Gehen wir nun von unserem Rechtecke zu benachbarten über, indem wir a durch $a(1+\sigma)$ ersetzen, so kann man durch Potenzreihenentwicklung der Formel für $G(\xi, \eta; \xi^*, \eta^*)$ zeigen, daß $G(\xi, \eta; \xi^*, \eta^*)$ eine analytische Funktion von σ ist, daraus folgt aber, daß auch die Koeffizienten**) δ_λ von λ in $\delta(\lambda)$ analytische Funktionen von σ sind. Dasselbe gilt dann aber, da $\delta(\lambda)$ gleichmäßig konvergiert, von jeder gerade ins Auge gefaßten endlichen Wurzel λ von $\delta(\lambda) = 0$, und es folgt der Satz, daß, wenn $\delta(\lambda) = 0$ eine m-fache Wurzel $\lambda^{(n)}$ hat, $\delta(\lambda)$ für genügend kleine Werte von σ m benachbarte Wurzeln zu $\lambda^{(n)}$ hat, die, ebenso wie die zu ihnen gehörigen Eigenfunktionen, sich als Potenzreihen in bezug auf σ darstellen lassen. Der Konvergenzbereich dieser Reihen ist natürlich von dem Anfangswert $\lambda^{(n)}$ abhängig, und es kann vorkommen, daß, wenn wir σ geeignet verändern, eine solche Wurzel in das Unendliche wächst, wobei dann die dazugehörige Eigenfunktion verloren geht. Wenn also auch in einem Falle alle Eigenfunktionen sich beispielshalber als Lamésche Produkte bestimmen lassen, so dürfen wir nicht ohne weiteres schließen, daß dieses nun für alle anderen Rechtecke auch der Fall sein muß, denn wir dürfen zunächst die Möglichkeit nicht aus dem Auge lassen, daß gerade in dem betrachteten Spezialfalle alle anderen Eigenfunktionen verloren gegangen sein könnten. Und in der Tat werden wir im folgenden auch auf solche Fälle stoßen, in denen Eigenwerte verloren gehen, bezüglich gewonnen werden. Es kommt also darauf an, zu zeigen, daß bei der vorliegenden Fragestellung in allen Fällen die bekannten Eigenfunktionen alle erschöpfen. Die bekannten Eigenfunktionen lassen sich nun in der Form $E'(\mu) \cdot E''(\nu)$ darstellen und zwar ist

$$(17)\quad \frac{d^2E}{dt^2} = -(\lambda z^2 + B)E;$$

wobei $z = \mu$ bezüglich ν, $t = \xi$ bez. ηi ist. Um mit der Literatur in volle Übereinstimmung zu kommen, setzen wir $z^2 = z_1$; ferner wählt man $E'(\mu_1) = 0$, $E''(\nu_1) = 0$ und bestimmt λ und B so, daß

$$(18)\quad \begin{aligned} E'(\mu_2;\ \lambda, B) &= 0, \\ E''(\nu_2;\ \lambda, B) &= 0. \end{aligned}$$

*) Harnack, Theorie des logarithmischen Potentials, S. 78.

**) Hilbert, l. c. S. 58.

Das Oszillationstheorem zeigt dann, daß man zu jedem Wertepaare m, n λ und B auf eine und nur auf eine Weise so bestimmen kann, daß $E'(\mu)$ m mal, $E''(\nu)$ n mal in dem betreffenden Intervalle verschwindet.

Ein einfacher Fall, in welchem diese Eigenfunktionen alle möglichen erschöpfen, ist der Kugeloktant. Wenn wir nämlich diesen Bereich an den ihn begrenzenden Kreisen spiegeln, bleibt die Differentialgleichung unverändert, es folgt also: Die Eigenfunktionen für den Kugeloktanten, welche auf der Begrenzung verschwinden, sind unter den vorher besprochenen Eigenfunktionen enthalten, welche sich auf der ganzen Kugel regulär verhalten, und es folgt in diesem Falle leicht, daß die durch das Oszillationstheorem gelieferten Eigenfunktionen alle möglichen erschöpfen. Um nun auf andere Rechtecke übergehen zu können, benützen wir folgenden wichtigen Satz, den wir im nächsten Paragraphen beweisen wollen: *Wenn wir eine Rechteckseite nach außen verschieben, so nimmt ein jedes gerade ins Auge gefaßte λ ab; jedenfalls nimmt es nie zu.* Nun muß λ immer größer sein als Null. Wenn wir also für ein Rechteck im Inneren des Oktanten Eigenwerte hätten, zu denen Eigenfunktionen gehören, die von den Laméschen Produkten wesentlich verschieden, d. h. linear unabhängig sind, so hätten diese Eigenwerte auch für den Oktanten einen endlichen Wert und wir hätten für den Oktanten Eigenfunktionen, die von den Laméschen Produkten wesentlich verschieden sind, was nach obigem nicht der Fall ist. Damit ist gezeigt, daß die Laméschen Produkte alle Eigenfunktionen erschöpfen, die zu Rechtecken gehören, die kleiner sind als der Oktant, und es gilt ein dem obigen analoges Entwicklungstheorem.

§ 3.

Einige Sätze über Eigenwerte.

Wir haben im letzten Paragraphen den Satz erwähnt, daß die Eigenfunktionen analytische Funktionen des Verschiebungsparameters sind, wenn wir dem Punkte $\xi\eta$ des 1. Rechtecks den Punkt $\xi(1+\sigma)$, η zuordnen (vergl. Fig. 1). Desgleichen folgt aus einem allgemeinen Satze der Integralgleichungen, daß unsere Eigenfunktionen im Inneren beliebig oft differenzierbar und ebenso auch auf dem Rande nach der Normalen stetig differenzierbar sind. Auf den Beweis dieses Satzes komme ich bei

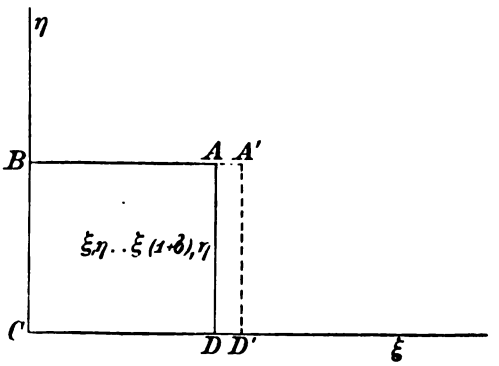


Fig. 1.

anderer Gelegenheit zurück; er läßt sich mit elementaren Hilfsmitteln führen.

Sei nun:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \lambda(\mu - \nu)u = L(u) + \lambda(\mu - \nu)u = 0. \tag{19}$$

Dann hat man:

$$\int (vL(u) - uL(v))\, d\xi d\eta = \int \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n}\right) ds. \tag{20}$$

Dabei ist das linke Integral über das geradlinige Rechteck in der $\xi\eta$-Ebene zu nehmen, das rechte Integral über die Randlinien; $\frac{\partial u}{\partial n}$, $\frac{\partial v}{\partial n}$ bedeuten die Ableitungen nach der in das Innere gerichteten Normalen. u verschwindet auf dem Rande des kleineren Rechtecks, v auf dem des daraus durch Verschiebung entstandenen. Wir umgeben die Nulllinien*) von u und v mit Streifen, so daß außerhalb derselben u und v dasselbe Vorzeichen haben. Wenn σ klein genug gewählt wird, können diese Streifen beliebig schmal gemacht werden. v gehöre nun zum Eigenwerte λ'. Dann hat man

$$-(\lambda - \lambda')\int vu\,(\mu - \nu) d\xi d\eta = -\int v \frac{du}{\partial n}\, ds,$$

$$v(\xi, \eta) = u\left(\frac{\xi}{1+\sigma}, \eta\right) + \sigma^{\alpha} u_1(\xi, \eta);$$

$$u\left(\frac{\xi}{1+\sigma}, \eta\right) = u(\xi, \eta) + \sigma^{\beta} u_2(\xi, \eta) = \sigma^{\beta} u_2(\xi, \eta),$$

wenn ξ, η auf der Rechteckseite AD liegt. Ferner ist noch

$$\lambda = \lambda' + \sigma^{\gamma_1}\lambda_1 + \sigma^{\gamma_2}\lambda_2 + \cdots.$$

Also hat man:

$$-\sigma^{\gamma_1}\lambda_1 \int u^2(\mu - \nu) d\xi d\eta + \cdots = -\sigma^{\alpha}\int u_1 \frac{\partial u}{\partial n}\, ds - \sigma^{\beta}\int u_2 \frac{\partial u}{\partial n}\, ds.$$

Nun ist entweder $\lambda' = \lambda$ oder $\lambda_1 \neq 0$; dann aber ist entweder α oder $\beta = \gamma_1$. Sei z. B. $\alpha < \beta$; dann ist entweder $\alpha = \gamma_1$; oder

$$\int u_1 \frac{\partial u}{\partial n}\, ds = 0, \quad \text{und} \quad \gamma_1 = \beta.$$

Nehmen wir z. B. den ersten Fall, dann ist

$$\lambda_1 \int u^2(\mu - \nu) d\xi d\eta = \int \left[u_1 + \sigma^{\beta - \alpha} u_2\right] \frac{\partial u}{\partial n}\, ds + \varepsilon;$$

die linke Seite hat einen endlichen, von Null verschiedenen Wert, die rechte Seite ist ihr gleich, abgesehen von Größen ε, die mit σ beliebig klein werden. Außerhalb der Streifen hat die eckige Klammer dasselbe Zeichen

*) Mit Ausnahme des Randes.

wie $\frac{\partial u}{\partial n}$; da wir die Streifen beliebig verkleinern können, so folgt, daß die rechte Seite > 0 wird für sehr kleine σ, also ist auch $\lambda_1 > 0$, $\lambda' \leqq \lambda$. λ nimmt also mit wachsendem Bereiche immer ab.

Es soll nebenbei bemerkt werden, daß dieser Satz durch dieselben *geometrisch-physikalischen Anschauungen* evident wird, wie das Kleinsche Oszillationstheorem*), jedoch nur für die *dabei auftretenden* Eigenfunktionen, während der obige analytische Beweis zeigt, daß der Satz für *alle überhaupt möglichen Eigenfunktionen* gilt, woraus dann erst aus den Untersuchungen des letzten Paragraphen folgt, daß die durch das Oszillationstheorem gelieferten Eigenfunktionen eben alle möglichen sind.

Um uns also den Satz nachträglich noch plausibel zu machen, gehen wir aus von:

$$(21) \qquad \frac{d^2E'(\mu)}{d\xi^2} = -(\mu\lambda + B)E'(\mu); \quad \frac{d^2E''(\nu)}{d\eta^2} = (\nu\lambda + B)E''(\nu).$$

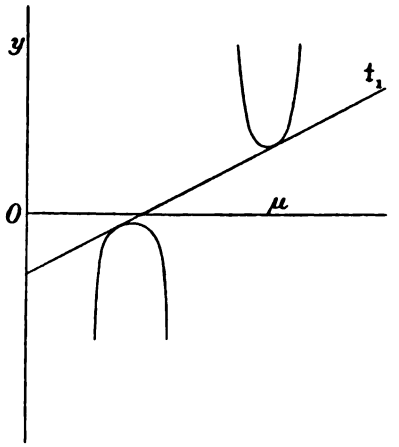


Fig. 2.

Dann erhält man für die Oszillationszahlen m, n zwei Hüllkurven, welche uns Fig. 2 schematisch zeigt. Diese Kurven sind eingehüllt von den Geraden: $y = \mu\lambda + B$ bez. $y = \nu\lambda + B$, die beiden gemeinsame Tangente liefert das zu m, n gehörige Wertepaar λ, B. Wird nun eine Rechteckseite nach außen verschoben, so rückt entweder die untere Hüllkurve nach oben oder die obere Hüllkurve nach unten, gerade wie bei einer Verkleinerung der Oszillationszahlen m bezüglich n**); in beiden Fällen wird die gemeinsame Tangente flacher liegen als vorher, d. h. λ nimmt ab.

Wir behandeln einen anderen Fall. Wir lassen das Rechteck fest und betrachten die Differentialgleichung:

$$(22) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + [-\tau k^2(\xi, \eta) + \lambda(\mu - \nu)]f = 0.$$

Es sei $k^2(\xi, \eta)$ überall positiv, $0 \leqq \tau \leqq 1$. Dann ist die zu

$$(23) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - \tau k^2(\xi, \eta)f = 0$$

*) Eine ausführliche Darstellung davon siehe Bôcher l. c. S. 120, das dort Gebrachte wird als bekannt vorausgesetzt.

**) Das letztere siehe Bôcher S. 128.

gehörige Greensche Funktion, die bekanntlich in diesem Falle immer existiert, eine analytische Funktion von τ, was man wie oben vermittelst der Theorie der Integralgleichungen leicht zeigt, und es folgt dasselbe für die Eigenwerte λ und die dazu gehörigen Eigenfunktionen. Wir setzen $\tau = \tau_0 + \alpha$ und es sei $\alpha > 0$; ferner sei

$$\lambda = \lambda_0 + \alpha^\varrho \lambda_\varrho + \cdots, \quad u_1 = u_0 + \alpha^\sigma u_\sigma + \cdots, \tag{24}$$

wobei u_0 die zu einem beliebigen Wertepaar λ_0 und τ_0, u_1 die zu λ und τ gehörige Eigenfunktion von (22) ist. Dann folgt:

$$\alpha \int k^2(\xi\eta) u_0^2 d\xi d\eta - \alpha^\varrho \lambda_\varrho \int (\mu - \nu) u_0^2 d\xi d\eta = 0, \tag{25}$$

also ist $\varrho = 1$; $\lambda_\varrho > 0$. Wir haben also den für die Verwertung der im nächsten Paragraphen eingeführten Normalgleichung fundamentalen Satz:

I. *Wenn in der Differentialgleichung*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + [-\tau k^2(\xi, \eta) + \lambda(\mu - \nu)] f = 0 \tag{22}$$

das 1. *Glied in der eckigen Klammer verkleinert wird, wächst* λ.

Wir beweisen noch einen andern Satz. Sei

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + \lambda k_\alpha(\xi\eta) f = 0, \tag{26}$$

wobei $k_\alpha(\xi, \eta)$ eine Funktion ist, die immer positiv sein soll und regulär in bezug auf α, sowie auch der Kürze wegen in bezug auf ξ und η. Sei $\gamma(\xi, \eta; \xi^*\eta^*)$ die Greensche Funktion für $\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} = 0$, so ist die zu unserer Gleichung gehörige Integralgleichung

$$F(\xi, \eta) = \varphi(\xi\eta) + \lambda \int \gamma(\xi, \eta; \xi^*\eta^*) k_\alpha(\xi^*\eta^*) \varphi(\xi^*, \eta^*) d\xi^* d\eta^*,$$

also ist der Kern eine analytische Funktion von α und dasselbe gilt von den Eigenwerten und den dazu gehörigen Eigenfunktionen. Es ist also

$$k_\alpha(\xi, \eta) = k_0(\xi\eta) + \alpha k_1(\xi\eta) + \cdots,$$
$$\lambda = \lambda_0 + \alpha^\varrho \lambda_1 + \cdots; \quad u_1 = u_0 + \alpha^\sigma u_\sigma + \cdots,$$

wenn u_0 die zu λ_0 und k_0, u_1 die zu λ und k_α gehörige Eigenfunktion von (26) ist, und wir finden:

$$\alpha^\varrho \lambda_1 \int u_0^2 k_0(\xi\eta) d\xi d\eta + \alpha \lambda \int u_0^2 k_1(\xi\eta) d\xi d\eta = 0.$$

Ist nun überall $k_1(\xi, \eta) > 0$, so folgt, da $\lambda > 0$ ist, daß $\lambda_1 < 0$ ist. Wir haben also den Satz:

II. *Wird in der Differentialgleichung:*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + \lambda k_\alpha(\xi\eta) f = 0 \tag{26}$$

$k_\alpha(\xi, \eta)$ *vergrößert, so nimmt* λ *ab.*

§ 4.

Aufstellung einer Normalform, auf welche die vorkommenden Differentialgleichungen zurückgeführt werden können.

Wir gehen jetzt zu der Untersuchung der Differentialgleichung über:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + \lambda \mu f = 0. \tag{27}$$

Wir versuchen, diese Gleichung durch Funktionen zu integrieren, die die Form $u(\xi)v(\eta)$ haben. Wir finden dann:

$$\frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2} + (\lambda\mu + B)u(\xi) = 0. \tag{28}$$

$$\frac{\partial^2 v(\eta)}{\partial \eta^2} - Bv(\eta) = 0. \tag{29}$$

Als Randbedingungen nehmen wir wieder die des Verschwindens auf dem Rande. Die Eigenfunktionen von (29) lassen sich dann sofort als einfache trigonometrische Funktionen angeben, die Eigenwerte B sind dadurch völlig bestimmt und zwar so, daß man in (28) zu jedem Eigenwerte B von (29) λ auf unendlich viele Weisen so bestimmen kann, daß man Eigenlösungen von (28) erhält.

Sei nun $f(\mu, \nu)$ eine Funktion, die der Einfachheit halber als beliebig oft nach μ und ν differenzierbar angenommen wird. Dann ist

$$f(\mu, \nu) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n v_n(\eta); \tag{30}$$

wobei

$$a_n = \int f(\mu, \nu) v_n(\eta) d\eta; \tag{31}$$

a_n ist also noch abhängig von μ und nach den Voraussetzungen über $f(\mu, \nu)$ in eine Reihe*) nach Eigenfunktionen von (28) entwickelbar, wenn man in (28) B durch B_n ersetzt. Wir finden dann:

$$f(\mu, \nu) = \sum_n \sum_m \int f(\mu, \nu) v_n(\eta) \mu u_{m,n}(\xi) d\xi d\eta \cdot v_n(\eta) u_{m,n}(\xi), \tag{32}$$

eine Reihe, die absolut und gleichmäßig konvergiert und welche wir

*) Hilbert l. c. S. 226.

also beliebig umordnen können. Da $v_n(\eta)u_{m,n}(\xi)$ auch Eigenfunktionen von (27) sind, da ferner nach dem in Fourierscher Weise gebildeten Koeffizientengesetze gleichmäßig konvergierende Nullentwicklungen unmöglich sind, so folgt noch bei geeigneter Spezialisierung von $f(\mu, \nu)$, daß (27) überhaupt keine wesentlich anderen Eigenfunktionen haben kann. Es folgt also der Satz:

III. *Alle Eigenfunktionen der Normalgleichung*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + \lambda \mu f = 0 \tag{27}$$

lassen sich durch das Oszillationstheorem bestimmen.

Wir können aber jetzt leicht diesen Satz auf die Eigenfunktionen der Gleichung

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + \lambda(\mu - \nu) f = 0 \tag{33}$$

übertragen. In der Tat, wir setzen $\mu - \nu = \mu + a - \nu - a$; und führen den Parameter σ ein, so daß wir erhalten:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + \lambda(\mu + a - \sigma(\nu + a)) f = 0 = \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + \lambda(\mu' - \sigma \nu') f. \tag{34}$$

Wir richten a so ein, daß $\nu + a > 0$; dann nehmen nach dem II. Satze des § 3 die λ, welche immer reell und größer als Null sind, mit wachsendem σ zu; ein für $\sigma = 0$ unendlicher Eigenwert ist also auch für $\sigma = 1$ unendlich; (33) kann also keine anderen Eigenfunktionen haben, als die durch das Oszillationstheorem gelieferten.

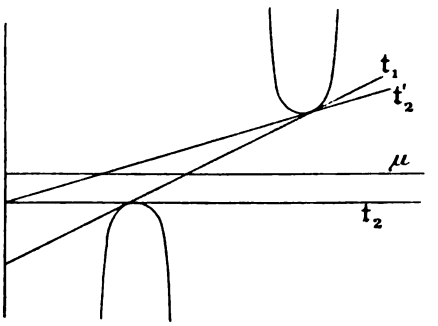


Fig. 3.

Von (33) gehen wir schließlich über auf:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + [-\varrho(\mu^3 - \nu^3) + \lambda(\mu - \nu)] f = 0. \tag{35}$$

Nach Satz I des § 3 nimmt λ mit wachsendem ϱ zu und wir haben den grundlegenden Satz:

IV. *Alle Eigenfunktionen der Differentialgleichung:*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + [-\varrho(\mu^3 - \nu^3) + \lambda(\mu - \nu)] f = 0 \tag{35}$$

lassen sich durch das Kleinsche Oszillationstheorem bestimmen.

Wir wollen jetzt noch die verschiedenen oben erwähnten *Oszillationstheoreme durch Zeichnungen erörtern.* In Fig. 3 ist t_1 die sich aus dem Kleinschen Oszillationstheorem für $\sigma = 1$ zu (34) ergebende gemeinsame Tangente der beiden Kurven. Für $\sigma < 1$ erhält man jedoch 2 verschiedene Tangenten an beide Kurven, die sich auf der y-Achse schneiden, für $\sigma = 0$ t_2 und t'_2. Fig 4 entspricht dem vorher vermiedenen Falle $\mu > 0$, $\nu < 0$. Bewegt man die y-Achse nach rechts, so zeigt Fig. 5, daß man statt der einen Tangente t'_2 zwei Tangenten t'_2 und t''_2 erhält, also statt des Tangentenpaares t_2, t'_2 zwei Paare t_2, t'_2, und t_2, t''_2. Das bedeutet einen Gewinn von Eigenwerten. Fig. 5 führt bei der analytischen Unter-

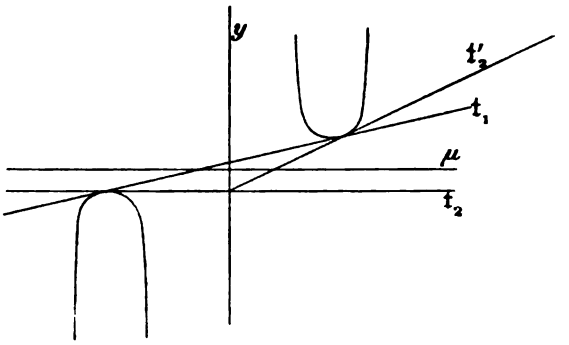


Fig. 4.

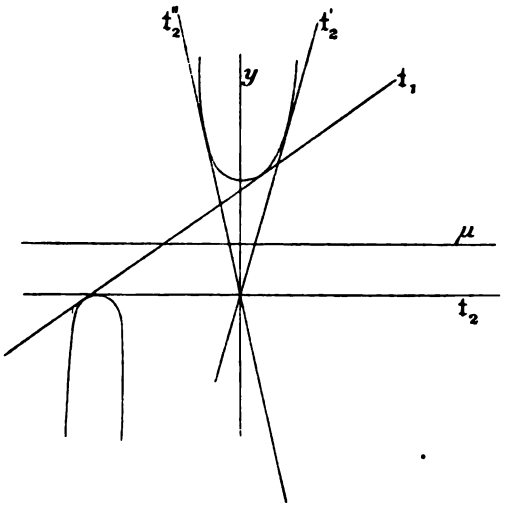


Fig. 5.

suchung auf die von Herrn Professor Hilbert in seinen Vorlesungen behandelten Integralgleichungen 3. Art. Alle diese Fälle bestätigen unsere Sätze über die Eigenwerte.

§ 5.

Die Integration der Potentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$ für ein von sechs konfokalen Flächen 2. Ordnung begrenztes Gebiet. Ausdehnung auf Zyklidensechsflache.

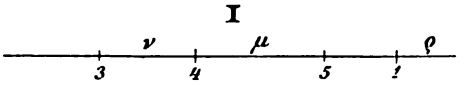
Wir haben jetzt nur noch das in der Literatur gegebene Formelmaterial für unser Problem, welches von Herrn Prof. Klein*) in dem in der Einleitung auseinandergesetzten Sinne ausführlich behandelt wurde, zusammenzustellen und umzuformen, um die Sätze des § 4 anwenden zu können.

Es sei in einem rechtwinkligen Koordinatensysteme:

$$(36)\qquad \begin{aligned}
&\frac{x^2}{\frac{1}{\varrho-e_1}-\frac{1}{e_3-e_1}}+\frac{y^2}{\frac{1}{\varrho-e_1}-\frac{1}{e_4-e_1}}+\frac{z^2}{\frac{1}{\varrho-e_1}-\frac{1}{e_5-e_1}}=1,\\
&\frac{-x^2}{\frac{1}{e_3-e_1}-\frac{1}{\mu-e_1}}-\frac{y^2}{\frac{1}{e_4-e_1}-\frac{1}{\mu-e_1}}+\frac{z^2}{\frac{1}{\mu-e_1}-\frac{1}{e_5-e_1}}=1,\\
&\frac{-x^2}{\frac{1}{e_3-e_1}-\frac{1}{\nu-e_1}}+\frac{y^2}{\frac{1}{\nu-e_1}-\frac{1}{e_4-e_1}}+\frac{z^2}{\frac{1}{\nu-e_1}-\frac{1}{e_5-e_1}}=1,
\end{aligned}$$

wobei wir nebenstehendes Schema zugrunde legen, in welchem die Zahlen die Indizes der e bedeuten.

I



Statt der Potentialfunktion führt man die Potentialform ein:

$$(37)\qquad V(\mu,\nu,\varrho)=\sqrt[4]{(e_1-\mu)(e_1-\nu)(\varrho-e_1)}\,\psi(\mu,\nu,\varrho).$$

Setzt man nun

$$(38)\qquad \begin{aligned}
d\xi&=\frac{d\mu}{2\sqrt{(e_1-\mu)^2(e_5-\mu)(\mu-e_4)(\mu-e_3)}};\\
d\eta&=\frac{d\nu}{2\sqrt{(e_1-\nu)^2(e_5-\nu)(e_4-\nu)(\nu-e_3)}};\\
d\zeta&=\frac{d\varrho}{2\sqrt{(\varrho-e_1)^2(\varrho-e_5)(\varrho-e_4)(\varrho-e_3)}};\\
dt&=\frac{d\tau}{2\sqrt{(\tau-e_1)^2(\tau-e_3)(\tau-e_4)(\tau-e_5)}},
\end{aligned}$$

*) Klein, Annalen Bd. 18. Unsere Bezeichnung ist analog der von Böcher für das Zyklidensechsflach benützten, das in der allgemeinen Theorie auftretende e_2 fällt hier mit e_1 zusammen, welches doppelt zählt.

so geht die Potentialgleichung über in

$$(39)\quad \begin{aligned}&(\varrho-\nu)\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2}+(\mu-\varrho)\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2}+(\nu-\mu)\frac{\partial^2\psi}{\partial\zeta^2}\\&+(\mu-\nu)(\nu-\varrho)(\varrho-\mu)\Big[\frac{5}{4}(\mu+\nu+\varrho)-\frac{3}{4}\Sigma' e_i\Big]\psi=0,\end{aligned}$$

wobei $\Sigma'(e_i)=2e_1+e_3+e_4+e_5$ ist.

Die Gleichung (39) bleibt bekanntlich unverändert, wenn man die zugrunde gelegte Fläche durch eine beliebige Kreisverwandtschaft transformiert.

Wir haben dann als Aufgabe, eine Potentialform zu bestimmen, welche auf fünf Flächen verschwindet, auf der sechsten vorgegebene Werte*) annimmt.

Wir zerlegen versuchsweise $\psi(\mu,\nu,\varrho)$ in Faktoren, $E(\mu)$, $E'(\nu)$, $E''(\varrho)$, wobei dann

$$(40)\qquad \frac{d^2E}{dt^2}=\Big[-\frac{5}{4}\tau^3+\frac{3}{4}\Sigma'(e_i)\tau^2+A\tau+B\Big]E,$$

wenn $\tau=\mu,\nu,\varrho$ ist.

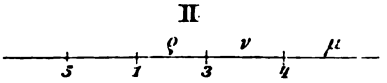
Sei die sechste Fläche $\varrho=\varrho_0$, so bilden wir die Gleichung:

$$(41)\quad \frac{\partial^2 f}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial\eta^2}+\Big[-\frac{5}{4}(\mu^3-\nu^3)+\frac{3}{4}\Sigma' e_i(\mu^2-\nu^2)+A(\mu-\nu)\Big]f=0,$$

welche durch $E(\mu)\cdot E'(\nu)$ befriedigt wird. Setzen wir, was immer erlaubt ist, $\Sigma e_i'=0$, so hat unsere Gleichung die Form (35) und die $E(\mu)\cdot E'(\nu)$ erschöpfen alle Eigenfunktionen von (41). Man kann also jede zweimal stetig differenzierbare Funktion $f(\mu,\nu)$, welche die Randbedingungen erfüllt, in eine Reihe nach Laméschen Produkten entwickeln.

Um dieses Resultat auf die anderen Fälle ausdehnen zu können, ist wesentlich, daß auch hier die ξ entsprechende Größe die Form it, die η entsprechende die Form t hat. Anderenfalls könnte man sich wohl dadurch helfen, daß man B das eine Mal durch $-B$ ersetzt. Allein wir können die obige Forderung immer erreichen auf Grund folgenden Satzes.**) Unsere Flächenschar geht, abgesehen von einer Kreisverwandtschaft, in sich über, wenn man statt τ $\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}$ statt e_i $\frac{\alpha e_i+\beta}{\gamma e_i+\delta}$ setzt. Unter Zugrundelegung dieses Satzes wählen wir für das zweischalige Hyperboloid das Schema:

II

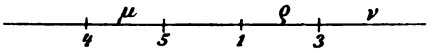


*) Auf den Fall, daß die vorgegebenen Werte auf dem Rande verschwinden, läßt sich der allgemeine Fall durch wiederholte Anwendung des Verfahrens bringen.

**) Klein bei Bôcher, S. 58.

wobei die μ-Schar zweischalige Hyperboloide, die ν-Schar einschalige Hyperboloide, die ϱ-Schar Ellipsoide darstellt. Um die einschaligen Hyperboloide auszuzeichnen, wählen wir das Schema:

III



Bei dem Zyklidensechsflach geht die Untersuchung analog, man hat nur statt des doppelt zu zählenden e_1 je einfach zählend e_1 und e_2 einzuführen, die auch konjugiert imaginär sein können. Für alle diese Fälle gilt also der Satz: *Sei $f(\mu, \nu)$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion, welche auf dem Rande des Rechtecks verschwindet. Das Rechteck liege auf der Fläche $\varrho = r_2$. Dann konvergiert die Reihe:*

$$f(\mu, \nu) = \sum_1^\infty{}_m \sum_1^\infty{}_n A_{m,n} E'''_{m,n}(r_2) E'_{m,n}(\mu) E''_{m,n}(\nu),$$

absolut und gleichmäßig, wobei

$$(42) \qquad B_{m,n} = \frac{\int\int (\mu - \nu) f(\mu, \nu) E'_{m,n}(\mu) E''_{m,n}(\nu) d\xi\, d\eta}{\int\int (\mu - \nu) \left[E'_{m,n}(\mu) E''_{m,n}(\nu)\right]^2 d\xi\, d\eta} = A_{m,n} E'''_{m,n}(r_2).$$

Wir bilden daraus die Reihe:

$$\psi = \sum_1^\infty{}_m \sum_1^\infty{}_n \frac{\int\int (\mu - \nu) f(\mu, \nu) E'_{m,n}(\mu) E''_{m,n}(\nu) d\xi\, d\eta}{E'''_{m,n}(r_2) \int\int (\mu - \nu) \left[E'_{m,n}(\mu) E''_{m.n}(\nu)\right]^2 d\xi\, d\eta} \cdot E'_{m,n}(\mu) E''_{m,n}(\nu) E'''_{m,n}(\varrho).$$

Wir gehen nun vorübergehend zu der Potentialfunktion V zurück, indem wir die linke und rechte Seite mit einem Faktor multiplizieren, der im allgemeinen die Form*) hat:

$$\left(\frac{\sum_1^5{}_i \frac{x_i}{R_i}}{\sqrt{\sum_1^5{}_i e_i x_i^2}} \right)^{\frac{1}{2}},$$

wobei wir uns das System so eingerichtet denken, daß der Faktor innerhalb des Gebietes einen endlichen Wert hat, der von Null verschieden ist. Es sind dann alle Bedingungen des Harnackschen Satzes**) erfüllt, und es folgt, daß die durch die Reihe dargestellte Funktion im Inneren der Potentialgeichung $\Delta V = 0$ genügt und gleichmäßig in die Randwerte übergeht. Analog verhält sich die Sache in den anderen fünf Einzelproblemen.

Augsburg, Juli 1905.

*) Vergl. wegen der Bezeichnung Bôcher, S. 146.

**) Berichte der Sächs. Ges. 1886.

Sulla risoluzione apiristica delle congruenze binomie secondo un modulo primo.

Di

MICHELE CIPOLLA a Palermo.

1. Il problema che ci proponiamo di risolvere nella presente nota, è il seguente: *Data una congruenza binomia*

$$x^n \equiv a \pmod{p}, \tag{1}$$

essendo p un numero primo dispari ed a un numero intero arbitrario non divisibile per p, determinare un polinomio in a, che fornisca una soluzione della congruenza (1) *per ogni residuo n-ico del modulo p.*

La questione risoluta da recente per il caso in cui n sia una potenza di 2*) non è stata finora trattata in generale.

Si può supporre, senza ledere la generalità, che il grado n della congruenza (1) sia un divisore di $p-1$, nel quale caso perchè la (1) sia possibile occorre e basta che sia

$$a^{\frac{p-1}{n}} \equiv 1 \pmod{p}. \tag{2}$$

Diremo che un polinomio della forma

$$A_0 + A_1 a + A_2 a^2 + \cdots + A_{\frac{p-1}{n}-1} a^{\frac{p-1}{n}-1} \tag{3}$$

è una *soluzione apiristica* della (1), quando, per ogni numero a soddisfacente alla condizione (2), esso è una soluzione della congruenza (1).

---

*) Tonelli, Rend della R. Acc. dei Lincei, a. 1892, 1° sem., p. 116; a. 1893, 1° sem., p. 259. Si veggano anche le nostre note nel Rend. della R. Acc. di Napoli, a. 1903, fasc. 5°; a. 1904, fasc. 3° e 4°; a. 1905, fasc. 1° e fasc. 5°. — Per il caso di $n = 2$ una formola non diversa da quella da noi comunicata alla R. Accademia di Napoli (Rendiconti, fasc. 1°, gennaio 1905; v. formola (8) della presente nota) hanno dato in questi »Annalen« (v. 62, p. 409—412) i Sigg. Tamarkine e Friedmann. Anche per questo caso noi qui daremo formole molto più vantaggiose. — Per la letteratura sulla teoria delle congruenze si vegga la nostra monografia: *Theoria de congruentias intra numeros integro,* Revue de Math., publiée par G. Peano, Torino 1905.

La determinazione dei coefficienti A_i di una soluzione apiristica è fondata sul seguente concetto.

2. In un sistema completo di resti secondo il modolo p, possono scegliersi $\frac{p-1}{n}$ numeri, e non più, le cui potenze n^{ime} siano tutte incongrue fra loro (mod. p): un tal sistema lo diremo *un sistema completo di n^{imo} grado (mod. p)*.

Per determinare un sistema completo di n^{imo} grado distribuiamo in quadro i numeri di un sistema completo di resti (mod. p), (i quali formano un gruppo secondo il modolo p) rispetto ai numeri

$$1, \gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_{n-1}, \tag{A}$$

formanti un sistema completo (gruppo) di soluzioni della congruenza

$$x^n \equiv 1 \pmod{p}, \tag{4}$$

nella maniera seguente:

$$\text{(B)} \quad \begin{cases} 1, & \gamma_1, & \gamma_2, \cdots, & \gamma_{n-1}, \\ a_1, & a_1\gamma_1, & a_1\gamma_2, \cdots, & a_1\gamma_{n-1}, \\ a_2, & a_2\gamma_1, & a_2\gamma_2, \cdots, & a_2\gamma_{n-1}, \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{\frac{p-1}{n}-1}, & a_{\frac{p-1}{n}-1}\gamma_1, & a_{\frac{p-1}{n}-1}\gamma_2, \cdots, & a_{\frac{p-1}{n}-1}\gamma_{n-1}. \end{cases}$$

È chiaro che per ottenere un sistema completo di n^{imo} grado basterà scegliere un numero e uno solo di ciascuna riga del quadro B. Ne risulta anche che *in un sistema completo di resti (mod. p), esistono $n^{\frac{p-1}{n}}$ sistemi completi di n^{imo} grado.*

Per $n = 2$, risulta subito che *i numeri*

$$1, 2, 3, \cdots, \frac{p-1}{2} \tag{C}$$

formano un sistema completo di 2° grado, qualunque sia p.

3. Qual parte rappresentino i numeri di un sistema completo di n^{imo} grado nella risoluzione delle congruenze binomie di grado n, apparisce subito dal seguente teorema fondamentale:

Se i numeri

$$r_1, r_2, \cdots, r_{\frac{p-1}{n}} \tag{D}$$

formano un sistema completo di n^{imo} grado (mod. p), posto

$$A_k \equiv -n\left(r_1^{nk-1} + r_2^{nk-1} + \cdots + r_{\frac{p-1}{n}}^{nk-1}\right) \pmod{p}, \tag{5}$$

il polinomio

$$A_0 + A_1 a + A_2 a^2 + \cdots + A_{\frac{p-1}{n}-1} a^{\frac{p-1}{n}-1} \tag{6}$$

è una soluzione apiristica della congruenza binomia (1). *Inoltre, per ogni a residuo n-ico di p, esso è congruo all' associato*) di quel numero del sistema* (D) *che soddisfa alla congruenza*

$$x^n \equiv \frac{1}{a} \pmod{p}.$$

Sia r_0 quel numero del sistema (D) che verifica la (1) e poniamo

$$x_0 \equiv \sum_{k=0}^{\frac{p-1}{n}-1} A_k a^k \pmod{p}.$$

Per l'ipotesi (5) si ha

$$x_0 \equiv -n \sum_{k=0}^{\frac{p-1}{n}-1} r_0^{nk} \sum_{h=1}^{\frac{p-1}{n}} r_h^{nk-1} \equiv -n \sum_{h=1}^{\frac{p-1}{n}} \frac{1}{r_h} \sum_{k=0}^{\frac{p-1}{n}-1} (r_0 r_h)^{nk}$$

$$\equiv -n \sum_{h=1}^{\frac{p-1}{n}} \frac{1}{r_h} \frac{(r_0 r_h)^{p-1} - 1}{(r_0 r_h)^n - 1}. \tag{7}$$

Quando h percorre il sistema degl' indici $1, 2, 3, \cdots, \frac{p-1}{n}$, il prodotto $r_0 r_h$ percorre un sistema completo di n^{imo} grado, e incontrerà quindi uno e un sol numero h_0 tale che sia

$$(r_0 r_{h_0})^n \equiv 1 \pmod{p}.$$

Per tal valore h_0 si ha

$$r_{h_0}^n \equiv \frac{1}{a}, \quad \frac{(r_0 r_{h_0})^{p-1} - 1}{(r_0 r_{h_0})^n - 1} \equiv \frac{p-1}{n} \pmod{p},$$

mentre i termini della somma (7), corrispondenti agli altri valori di h, sono divisibili per p, onde si ottiene

$$x_0 \equiv \frac{1}{r_{h_0}} \pmod{p}.$$

Innalzando ambo i membri di questa congruenza a potenza n^{ima}, si ottiene

$$x_0^n \equiv a \pmod{p}.$$

Il teorema è dunque dimostrato.

---

*) Due numeri α, α_1 si dicono *associati* (*mod. p*), quando sia $\alpha\alpha_1 \equiv 1 \pmod{p}$. L'associato di un numero $\alpha \not\equiv 0 \pmod{p}$ si indica anche con $\frac{1}{\alpha}$ (Gauss).

4. Per $n = 2$, indicando con s_r la somma delle potenze r^{ime} dei numeri del sistema (C), si ottiene la seguente soluzione apiristica della congruenza binomia quadratica:

$$(8) \quad x_0 \equiv -2\left(s_{-1} + s_1 a + s_3 a^2 + s_5 a^3 + \cdots + s_{p-4} a^{\frac{p-3}{2}}\right) \pmod{p}.$$

Se poi s'introducono i numeri B_r di Bernoulli, definiti dall' eguaglianza simbolica

$$(B+1)^r - B^r = r,$$

osservando che, per note proprietà di questi numeri, si ha

$$1^r + 2^r + \cdots + \left(\frac{p-1}{2}\right)^r \equiv -2\left(1 - \frac{1}{2^{r+1}}\right)\frac{B_{r+1}}{r+1} \pmod{p},$$

la (8) si esprimerà in modo elegante, ed introducendo i numeri di Genocchi $G_r = (2^r - 1)B_r$, i quali sono interi, si potrà dire in forma concisa *che lo sviluppo simbolico secondo le potenze di* $\sqrt{a}$ *dell' espressione*

$$4 \log\left(1 - \tfrac{1}{2} G \sqrt{a}\right) + \sqrt{a},$$

arrestato alla potenza di esponente $p - 1$, *è una soluzione apiristica della congruenza binomia quadratica.*

5. Col teorema del n. 3 si può dire risoluta la questione di trovare una soluzione apiristica di una congruenza binomia, anzi, potendo ricondursi la risoluzione di una congruenza binomia qualunque a quella di congruenze binomie di grado primo, può anche dirsi che per risolvere col nostro metodo una congruenza binomia qualunque *non occorrono tentativi.* Difatti, quando n è primo, le soluzioni della congruenza (4), che servono alla costruzione di un sistema completo di n^{imo} grado, sono tutte, tranne quelle congrue a 1, le soluzioni della congruenza

$$x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1 \equiv 0 \pmod{p},$$

che è riducibile a congruenze binomie di grado inferiore a n.

In pratica però il metodo riesce assai lungo e faticoso. Converrà invece applicare le speciali formole di risoluzione dei nn. seguenti assai più semplici nella forma, e sottomettersi alla determinazione per tentativi di alcuni elementi che in dette formole si trovano.

6. È facile dimostrare che, *decomposto* $p - 1$ *in due fattori primi tra loro* m *e* $\frac{p-1}{m}$, *il primo dei quali sia multiplo di* n, *se* γ *e* δ *sono due numeri appartenenti rispettivamente agli esponenti* m *e* $\frac{p-1}{m}$ *secondo il modolo* p, *i numeri*

$$\gamma^r \delta^s, \quad \begin{cases} r = 0, 1, 2, \cdots, \frac{m}{n} - 1, \\ s = 0, 1, 2, \cdots, \frac{p-1}{n} - 1 \end{cases}$$

formano un sistema completo di n^{imo} grado.

Applicando allora il teorema del n. 3, si può porre

$$A_k \equiv -n \sum_{r=0}^{\frac{m}{n}-1} \sum_{s=0}^{\frac{p-1}{m}-1} (\gamma^r \delta^s)^{nk-1} \equiv -n \frac{\gamma^{(nk-1)\frac{m}{n}} - 1}{\gamma^{nk} - 1} \cdot \frac{\delta^{\frac{p-1}{m}(nk-1)} - 1}{\delta^{nk} - 1} \pmod{p},$$

donde segue, se è $nk \equiv 1 \pmod{\frac{p-1}{m}}$:

$$A_k \equiv -n \frac{p-1}{m} \frac{\gamma^{(nk-1)\frac{m}{n}} - 1}{\gamma^{nk-1} - 1} \pmod{p},$$

e se non è $nk \equiv 1 \pmod{\frac{p-1}{m}}$:

$$A_k \equiv 0 \pmod{p}.$$

Ne risulta che *se μ è una soluzione della congruenza*

$$nk \equiv 1 \pmod{\frac{p-1}{m}},$$

l'espressione

$$(9) \qquad -\frac{n}{m} a^{\mu} \left(\gamma^{\frac{m}{n}} - 1\right) \sum_{s=0}^{\frac{m}{n}-1} \frac{\alpha^{s\frac{p-1}{m}}}{\gamma^{\left(\mu + s\frac{p-1}{m}\right)\frac{n-1}{n}} - 1}$$

è una soluzione apiristica della congruenza binomia di n^{imo} grado.

Per applicare la (9) non occorre che la conoscenza di γ. Giova poi osservare che essendo

$$1, \gamma^{\frac{m}{n}}, \gamma^{2\frac{m}{n}}, \cdots, \gamma^{(n-1)\frac{m}{n}}$$

un sistema completo di soluzioni apiristiche della congruenza $x^n \equiv 1 \pmod{p}$, da una soluzione della congruenza (1) potrà dedursi un sistema completo di soluzioni di essa.

Se n è primo con $\frac{p-1}{n}$, si può assumere $m = n$, e dalla (9) si deduce il risultato noto che se n *è primo con* $\frac{p-1}{n}$, *è* a^{μ} *una soluzione apiristica della congruenza* $x^n \equiv a \pmod{p}$.

Se si assume $m = p - 1$, e quindi $\mu = 0$, si dedurrà dalla (9) che *se g è una radice primitiva di p, una soluzione apiristica della congruenza binomia di n^{imo} grado è*

$$n\left(g^{\frac{p-1}{n}} - 1\right) \sum_{s=0}^{\frac{p-1}{n}-1} \frac{a^s}{g^{ns-1} - 1}.$$

7. L'espressione (9) può essere tuttavia semplificata nella forma quando si osservi che esiste sempre un numero γ_1 appartenente all' esponente m (mod. p), che verifichi la congruenza

$$x^{\frac{p-1}{m}} \equiv \gamma \pmod{p}.$$

Allora, mutando γ in γ_1 nella (9), e notando che, posto

$$\mu n - 1 = \nu \frac{p-1}{m},$$

si ha

$$\gamma_1^{\left(\mu + s\frac{p-1}{m}\right)n-1} \equiv \gamma^{\nu+sn}, \quad \gamma^{\frac{m}{n}} \equiv \gamma^{-\nu\frac{m}{n}} \pmod{p},$$

risulta dalla (9) quest' altra soluzione apiristica della congruenza binomia di n^{imo} grado

$$\frac{n}{m} a^{\mu}\left(\gamma^{\nu\frac{m}{n}} - 1\right) \sum_{s=0}^{\frac{m}{n}-1} \frac{a^{s\frac{p-1}{m}}}{\gamma^{\nu+sn} - 1}. \tag{10}$$

8. La risoluzione di una congruenza binomia di grado n, (mod. p), si può sempre ridurre alla risoluzione di congruenze binomie di grado primo. Ora se n è un numero primo ed n^r la massima potenza di n, che divide $p - 1$, essendo ω un non residuo n-ico qualunque di p, si può assumere $\gamma \equiv \omega^{\frac{p-1}{n^r}} \pmod{p}$.

La determinazione di un numero ω non presenta difficoltà in pratica.

In particolare, per $n = 2$, si ottiene che *se ω è un non residuo quadratico di p, una soluzione apiristica della congruenza binomia quadratica è*

$$\frac{1}{2^{r-2}} a^{\frac{p+2^r-1}{2^{r+1}}} \sum_{s=0}^{2^r-1} \frac{a^{s\frac{p-1}{2^r}}}{\omega^{(2s+1)\frac{p-1}{2^r}} - 1}. \tag{11}$$

Per esempio, se p è della forma $8m + 5$, si può assumere $\omega = 2$, e però *una soluzione apiristica della congruenza binomia quadratica, secondo un modulo p della forma $8m + 5$, è*

$$\frac{1}{2} a^{\frac{p+3}{8}} \left[2^{\frac{p-1}{4}} + 1 - \left(2^{\frac{p-1}{4}} - 1\right) a^{\frac{p-1}{4}}\right]. \tag{12}$$

9. In pratica, per la determinazione delle soluzioni minime positive (radici) della congruenza binomia, converrà assumere per m il minimo valore possibile, cioè il prodotto delle potenze dei fattori primi di n, con quell' esponente col quale entrano in $p-1$. Se $u, v, w, \cdots$ sono i diversi fattori primi di n, i quali entrano in $p-1$ alle potenze di grado $r, s, t, \cdots$ rispettivamente, si determineranno i numeri $\omega_u, \omega_v, \omega_w, \cdots$ rispettivamente non residui u-ico, v-ico, w-ico, $\cdots$ di p, e si assumerà

$$\gamma \equiv \omega_u^{\frac{p-1}{u^r}} \cdot \omega_v^{\frac{p-1}{v^s}} \cdot \omega_w^{\frac{p-1}{w^t}}, \cdots \pmod{p}.$$

Posto poi

$$a^{\frac{p-1}{m}} \equiv A, \quad \gamma^\nu - 1 \equiv M_0, \quad \gamma^n \equiv N, \quad M_s \equiv \gamma^{\nu+sn} - 1 \pmod{p},$$

i numeri M_s si otterranno con la relazione ricorrente

$$M_s \equiv N(M_{s-1} + 1) - 1 \pmod{p}.$$

Indicando poi con M il minimo comune multiplo dei numeri

$$M_0, M_1, M_2, \cdots, M_{\frac{m}{n}-1},$$

e con $\overline{M}$ l'associato di M secondo il modolo p, posto

$$U_r \equiv \frac{M}{M_r}\overline{M},$$

la (10) assumerà la forma

$$\frac{n}{m} a^\mu \left[(M_0+1)^{\frac{m}{n}} - 1\right] \sum_{s=0}^{\frac{m}{n}-1} A^s U_s,$$

dalla quale si otterranno le soluzioni minime positive con facile calcolo.

10. Per applicare il metodo ad un esempio, determiniamo una soluzione apiristica della congruenza

$$x^3 \equiv a \pmod{73}.$$

Possiamo assumere $m = 9$, $\mu = 3$, $\nu = 1$. Un non residuo cubico di 73 è 2. Infatti si ha

$$2^8 \equiv 8, \quad 2^6 \equiv -9, \quad 2^9 \equiv -72 \equiv 1, \quad 2^{12} \equiv 8, \quad 2^{24} \equiv -9 \pmod{73}.$$

Possiamo quindi porre

$$\gamma \equiv 2^8 \equiv 37 \pmod{73}.$$

Intanto si ha

$$N \equiv 2^{24} \equiv -9,$$

$$M_0 \equiv \gamma^\nu - 1 \equiv 2^8 - 1 \equiv 36, \quad M_1 \equiv -9 \cdot 37 - 1 \equiv -42,$$

$$M_2 \equiv 9 \cdot 41 - 1 \equiv 3 \pmod{73}.$$

Il minimo comune multiplo dei numeri 36, 42, 3 è $M = 252$ e il suo associato è congruo a 31 (mod. 73). Onde si ha

$$U_0 \equiv \frac{M}{M_0}\overline{M} \equiv 7 \cdot 31 \equiv -2, \qquad U_1 \equiv \frac{M}{M_1}\overline{M} \equiv -6 \cdot 31 \equiv 33,$$

$$U_2 \equiv \frac{M}{M_2}\overline{M} \equiv -24 \pmod{73}.$$

Adunque una soluzione apiristica della congruenza data è

$$21a^3(-2 + 33a^8 - 24a^{16}).$$

Per $a = 7$, essendo 7 un residuo cubico di 73, questa espressione, dà subito come radice della congruenza $x^3 \equiv 7$ (mod. 73), il numero 13. Le altre due radici si ottengono prendendo i resti (mod. 73) dei prodotti di questo numero per $\gamma^{\frac{m}{n}} \equiv 2^{24} \equiv -9$, e per $\gamma^{2\frac{m}{n}} \equiv 8$: esse sono 29 e 31.

Palermo, marzo 1906.

Über aufeinander abwickelbare P-Flächen.

Von

B. Młodziejowski in Moskau.

1.

In seinen Arbeiten über Differentialgeometrie*) beschäftigte sich Peterson eingehend mit einer Klasse von Flächen, denen nachher A. Voß (Mathematische Annalen 39) den Namen P-Flächen beilegte. Sie werden durch die Eigenschaft gekennzeichnet, ein konjugiertes Liniensystem zu besitzen, dessen Linien zugleich Berührungslinien der der Fläche umbeschriebenen Kegel und Zylinder sind. Solche Linien, längs deren eine Fläche von Kegeln oder Zylindern berührt wird, wollen wir nach Peterson *konische* resp. *zylindrische* Linien dieser Fläche nennen. Somit können wir die P-Flächen als diejenigen Flächen erklären, die ein konjugiertes System konischer oder zylindrischer Linien besitzen.

Nehmen wir die Parameter der beiden Linienfamilien dieses Systems als Gaußsche Koordinaten auf der P-Fläche an, so erhalten nach Peterson die Gleichungen dieser Fläche die Form

$$(1) \qquad x = \frac{a+\alpha}{l+\lambda}, \quad y = \frac{b+\beta}{l+\lambda}, \quad z = \frac{c+\gamma}{l+\lambda},$$

worin a, b, c, l Funktionen von u und $\alpha, \beta, \gamma, \lambda$ Funktionen von v sind. Die Spitzen der Kegel, die die Fläche längs der Linien $u = \text{const.}$ berühren, haben die Koordinaten

$$\frac{\frac{da}{du}}{\frac{dl}{du}}, \quad \frac{\frac{db}{du}}{\frac{dl}{du}}, \quad \frac{\frac{dc}{du}}{\frac{dl}{du}}.$$

Ebenso hat man für die Koordinaten der Spitzen der Berührungskegel längs der Linien $v = \text{const.}$ die Ausdrücke

*) Zeitschrift der Moskauer Mathematischen Gesellschaft, Bd. I, II und die Monographie „Über Kurven und Flächen" (Moskau u. Leipzig, 1868). Über Peterson s. Stäckel in Bibliotheca Mathematica, 3. Folge, Bd. II und meinen Aufsatz in den Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 2. sér., t. V.

$$\frac{\frac{d\alpha}{dv}}{\frac{d\lambda}{dv}}, \quad \frac{\frac{d\beta}{dv}}{\frac{d\lambda}{dv}}, \quad \frac{\frac{d\gamma}{dv}}{\frac{d\lambda}{dv}}.$$

Verschwinden $\frac{dl}{du}$ und $\frac{d\lambda}{dv}$ identisch oder für bestimmte Werte von u und v, so gehen die entsprechenden Kegel in Zylinder über, deren Erzeugende die Richtungen $\frac{da}{du} : \frac{db}{du} : \frac{dc}{du}$ resp. $\frac{d\alpha}{dv} : \frac{d\beta}{dv} : \frac{d\gamma}{dv}$ haben. Alle diese Beziehungen sind in der erwähnten Arbeit von A. Voß angegeben. Beiläufig sei bemerkt, daß die Form der Gl. (1) die geometrisch evidente Tatsache bestätigt, daß die Klasse der P-Flächen gegenüber den kollinearen Transformationen des Raumes invariant ist.

Es ist merkwürdig, daß fast alle bedeutenden Ergebnisse, zu welchen Peterson auf dem Gebiete der Theorie der Biegung der Flächen gelangte, sich auf die Biegungen von P-Flächen beziehen. Aus einer Stelle seiner ersten russischen Abhandlung läßt sich schließen, daß Peterson allgemeine Methoden für das Auffinden solcher Biegungen besaß, und daß diese Methoden in Verbindung mit seinen allgemeineren Untersuchungen über konforme Abbildung stehen; leider sind die bezüglichen Untersuchungen Petersons unveröffentlicht geblieben.

Bei meinen Untersuchungen über die geometrischen Arbeiten Petersons ist es mir gelungen, die Frage nach den aufeinander abwickelbaren P-Flächen vollständig zu beantworten. Da ich aber von der konformen Abbildung keinen Gebrauch mache, so vermute ich, daß meine Methode mit der Petersonschen nicht identisch ist. Ich will hier die von mir erhaltenen Resultate kurz darlegen, als Auszug aus meiner in der „Zeitschrift der Moskauer Mathematischen Gesellschaft", Bd. 24 veröffentlichten Arbeit.

2.

Die acht Funktionen $a, \cdots, \lambda$, die in den Gl. (1) auftreten, lassen Veränderungen zu, bei welchen höchstens die Lage der entsprechenden P-Fläche, nicht aber ihre Form sich ändert. Wir können nämlich alle acht Funktionen mit einer Konstanten multiplizieren; dann können wir zu jeder Funktion, z. B. zu a, eine beliebige Konstante hinzuzufügen und zugleich dieselbe Konstante von der entsprechenden Funktion α abziehen. Diese beiden Transformationen sind ohne Einfluß weder auf die Form der P-Fläche, noch auf ihre Lage.

Übt man ferner zwei gleiche orthogonale Substitutionen mit konstanten Parametern auf a, b, c und α, β, γ aus, so entspricht das einer Drehung der Fläche um den Koordinatenanfang, eventuell verbunden mit einer Spiegelung an demselben. Fügt man endlich zu den beiden Funk-

tionen eines Zählers, z. B. a und α, die Glieder des Nenners l und λ, multipliziert mit einer Konstanten k hinzu, so entspricht das einer Verschiebung der Fläche parallel der λ-Achse um die Länge k.

Bei der Lösung der Frage nach den Biegungen einer Fläche dürfen wir die verschiedenen Lagen dieser Fläche als untereinander identisch ansehen. Daher werden wir in die Gleichungen einer P-Fläche alle die Vereinfachungen einführen können, die durch die hier aufgezählten Transformationen erreichbar sind.

3.

Es ist leicht einzusehen, wie sich eine P-Fläche gestaltet, wenn einige der in (1) auftretenden Funktionen sich in Konstanten verwandeln. Sind Zähler und Nenner in (1) durch eine homogene lineare Relation mit konstanten Koeffizienten verbunden, so geht die P-Fläche in eine Ebene über; das tritt speziell ein, wenn einer der Zähler identisch verschwindet. Dieser Fall soll von unseren Betrachtungen ausgeschlossen werden. Wenn ferner eine der Funktionen, z. B. a, zu einer Konstanten wird, so können wir diese Konstante zu α hinzufügen und a gleich Null setzen, so daß wir allen Funktionen in (1), die konstant sind, den Wert Null beilegen werden.

Unter den P-Flächen können auch abwickelbare Linienflächen vorkommen und zwar nur Zylinder und Kegel. Nehmen wir die geradlinigen Erzeugenden einer solchen Fläche als Linien $v = \text{const.}$ und wählen im ersten Falle die z-Achse parallel den Erzeugenden des Zylinders, so verschwinden a, b, l; ebenso wenn im zweiten Falle der Koordinatenanfang in die Spitze des Kegels verlegt wird, verschwinden a, b, c. Führen wir eine Koordinatentransformation aus, so sehen wir, daß (1) eine abwickelbare P-Fläche darstellt, wenn zwischen a, b, c, l oder α, β, γ, λ drei lineare homogene Relationen bestehen. Da die Biegungen der abwickelbaren Flächen wohlbekannt sind, so werden wir diesen Fall von unserer Betrachtung ausschließen. Wir wollen daher im folgenden voraussetzen, daß von den acht Funktionen in (1) höchstens nur je zwei Funktionen desselben Arguments verschwinden, wobei außerdem zwei zusammengehörige Funktionen, wie a und α, l und λ nicht gleichzeitig verschwinden dürfen.

4.

Da auf einer P-Fläche die Linien (u) und (v) ein konjugiertes System bilden, so genügen die Ausdrücke für x, y, z in (1) der Gleichung

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u \partial v} = \left\{ \begin{matrix} 1\,2 \\ 1 \end{matrix} \right\} \frac{\partial \vartheta}{\partial u} + \left\{ \begin{matrix} 1\,2 \\ 2 \end{matrix} \right\} \frac{\partial \vartheta}{\partial v}. \tag{2}$$

Eine direkte Berechnung aus (1) liefert

$$(3)\qquad \left\{\begin{matrix}1&2\\1\end{matrix}\right\} = -\frac{\partial \log(l+\lambda)}{\partial v}, \quad \left\{\begin{matrix}1&2\\2\end{matrix}\right\} = -\frac{\partial \log(l+\lambda)}{\partial u},$$

woraus beiläufig folgt, daß Gl. (2) für die P-Flächen gleiche Invarianten hat.

Ersetzen wir in (3) die Christoffelschen Symbole durch ihre Ausdrücke in den Koeffizienten des Linienelements der P-Fläche, so bekommen wir nach einer einfachen Rechnung

$$\frac{\partial}{\partial v}[E(l+\lambda)^2] + 2F(l+\lambda)\frac{dl}{du} = 0,$$
$$\frac{\partial}{\partial u}[G(l+\lambda)^2] + 2F(l+\lambda)\frac{d\lambda}{dv} = 0.$$

Daraus folgt, daß E, F, G in der Form dargestellt werden können

$$(4)\qquad E = \frac{\partial (l+\lambda)^{-1}}{\partial u}\frac{\partial N}{\partial u}, \quad G = \frac{\partial (l+\lambda)^{-1}}{\partial v}\frac{\partial N}{\partial v}, \quad F = \frac{1}{2}(l+\lambda)^{-1}\frac{\partial^2 N}{\partial u\,\partial v},$$

wo N eine Funktion von u, v ist, die sich aus (1) leicht bestimmen läßt. Wir haben nämlich für eine P-Fläche

$$(5)\qquad \begin{aligned} E &= \frac{\frac{dl}{\partial u}}{(l+\lambda)^2}\left[\frac{\sum\left(\frac{da}{du}\right)^2}{\frac{dl}{du}} - \frac{\partial}{\partial u}\frac{\sum(a+\alpha)^2}{l+\lambda}\right],\\ G &= \frac{\frac{d\lambda}{dv}}{(l+\lambda)^2}\left[\frac{\sum\left(\frac{d\alpha}{dv}\right)^2}{\frac{d\lambda}{dv}} - \frac{\partial}{\partial v}\frac{\sum(a+\alpha)^2}{l+\lambda}\right],\\ F &= \frac{1}{2(l+\lambda)}\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\frac{\sum(a+\alpha)^2}{l+\lambda}, \end{aligned}$$

wobei die Summenzeichen sich auf die drei Koordinaten erstrecken. Aus der Vergleichung dieser Formeln mit den vorangehenden kommt

$$(6)\qquad N = \frac{\sum(a+\alpha)^2}{l+\lambda} - \int\left[\frac{\sum\left(\frac{da}{du}\right)^2}{\frac{dl}{du}}du + \frac{\sum\left(\frac{d\alpha}{dv}\right)^2}{\frac{d\lambda}{dv}}dv\right].$$

Die Integrationskonstante ist hier ohne Bedeutung, da sie aus den Formeln (4) wegfällt.

Die Formeln (4)—(6) haben keinen Sinn, wenn l oder λ zu Konstanten werden. Wenn wir jedoch diesen Fall als einen Grenzfall betrachten, so sehen wir, daß die Formeln (5) auch hier bei dem Grenzübergange bestimmte Ausdrücke liefern, die mit den für diesen Fall direkt berechneten selbstverständlich zusammenfallen.

5.

Wir gehen nunmehr zur Untersuchung über, *ob eine P-Fläche sich in der Weise verbiegen läßt, daß das konjugierte System konischer Linien* (u), (v) *nach dem Verbiegen konjugiert bleibt.* Solche konjugierten Systeme, die auf zwei aufeinander abwickelbaren Flächen sich gegenseitig entsprechen, heißen nach Peterson die *Basis* der Biegung.

Es ist leicht einzusehen, daß, wenn bei einer Biegung der P-Fläche das konjugierte konische System (u), (v) konjugiert bleibt, die Linien (u), (v) notwendig konisch resp. zylindrisch bleiben. In der Tat behält Gl. (2) für alle aufeinander abwickelbaren Flächen dieselbe Form, da die Symbole $\left\{\begin{smallmatrix}1&2\\1\end{smallmatrix}\right\}$, $\left\{\begin{smallmatrix}1&2\\2\end{smallmatrix}\right\}$ nur von den Koeffizienten des Linienelements abhängen; ersetzt man diese Symbole durch ihre Werte (3), so läßt sich (2) auf die Form bringen

$$\frac{\partial^2[\vartheta(l+\lambda)]}{\partial u\,\partial v}=0.$$

Hieraus folgt, daß die Gleichungen einer auf die Fläche (1) mit der Basis (u), (v) abwickelbaren Fläche folgende Form haben müssen

$$x=\frac{a'+\alpha'}{l+\lambda},\quad y=\frac{b'+\beta'}{l+\lambda},\quad z=\frac{c'+\gamma'}{l+\lambda}, \tag{1'}$$

wobei a', b', c' neue Funktionen von u, α', β', γ' solche von v sind. Das sind aber Gleichungen einer neuen P-Fläche, auf der die Linien (u), (v) wieder konisch oder zylindrisch bleiben. Soll also eine P-Fläche derart verbogen werden, daß ihr konjugiertes System konischer Linien zur Basis der Biegung werde, so kann diese ihre Biegung nur eine P-Fläche sein.

6.

Untersuchen wir, unter welchen Bedingungen (1) und (1') zwei aufeinander abwickelbare P-Flächen darstellen. Zuvörderst bemerken wir, daß in diesen Gleichungen derselbe Nenner $l+\lambda$ auftritt. Wir bilden dann die Koeffizienten E', F', G' des Linienelements der Fläche (1')

$$E'=\frac{\frac{dl}{du}}{(l+\lambda)^2}\left[\frac{\sum\left(\frac{da'}{du}\right)^2}{\frac{dl}{du}}-\frac{\partial}{\partial u}\frac{\sum(a'+\alpha')^2}{l+\lambda}\right],$$

$$G'=\frac{\frac{d\lambda}{dv}}{(l+\lambda)^2}\left[\frac{\sum\left(\frac{d\alpha'}{dv}\right)^2}{\frac{d\lambda}{dv}}-\frac{\partial}{\partial v}\frac{\sum(a'+\alpha')^2}{l+\lambda}\right], \tag{5'}$$

$$F'=\frac{1}{2(l+\lambda)}\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\frac{\sum(a'+\alpha')^2}{l+\lambda}.$$

Aus der Vergleichung von (5′) mit (5) kommen wir zu den folgenden Bedingungen für die Abwickelbarkeit zweier P-Flächen auf konischer Basis:

$$\frac{\partial}{\partial u}\frac{\sum(a+\alpha)^2-\sum(a'+\alpha')^2}{l+\lambda}=\frac{\sum\left(\frac{da}{du}\right)^2-\sum\left(\frac{da'}{du}\right)^2}{\frac{dl}{du}},$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\frac{\sum(a+\alpha)^2-\sum(a'+\alpha')^2}{l+\lambda}=\frac{\sum\left(\frac{da}{dv}\right)^2-\sum\left(\frac{da'}{dv}\right)^2}{\frac{d\lambda}{dv}}, \tag{7}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\frac{\sum(a+\alpha)^2-\sum(a'+\alpha')^2}{l+\lambda}=0.$$

Die letzte Gleichung braucht nicht berücksichtigt zu werden, da sie aus den beiden ersten folgt; wir wollen sie jedoch im folgenden beibehalten. Schreibt man sie in der Form

$$\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v}\frac{\sum x^2-\sum x'^2}{l+\lambda}=0,$$

so sieht man, daß sie aus dem bekannten Satze von Königs (Comptes Rendus, Bd. 116) folgt.

Wir wollen die dritte Gleichung (7) in der Form schreiben

$$\Sigma(a+\alpha)^2-\Sigma(a'+\alpha')^2=(l+\lambda)(m+\mu), \tag{8}$$

wobei m eine Funktion von u, μ eine Funktion von v ist. Alsdann erhalten die beiden ersten Gleichungen die Gestalt

$$\sum\left(\frac{da}{du}\right)^2-\sum\left(\frac{da'}{du}\right)^2=\frac{dl}{du}\frac{dm}{du},$$
$$\sum\left(\frac{da}{dv}\right)^2-\sum\left(\frac{da'}{dv}\right)^2=\frac{d\lambda}{dv}\frac{d\mu}{dv}. \tag{9}$$

Wir schließen hieraus:

Um zwei aufeinander abwickelbare P-Flächen zu finden, muß man acht Funktionen von u und ebenso viele Funktionen von v bestimmen, die den Gleichungen (8), (9) identisch genügen. Die Gleichungen (1), (1′) stellen dann die beiden Flächen dar.

Die Gleichungen (7) gelten nur unter der Bedingung, daß l und λ keine Konstanten sind. Jedoch behalten die Gleichungen (8) und (9) auch in diesem Falle ihre Gültigkeit; man kann sich davon entweder durch einen Grenzübergang oder durch direkte Rechnung überzeugen.

Die Gleichungen (8), (9) geben zu einer interessanten Bemerkung Anlaß. Da dieselben bei der Vertauschung von l mit m, λ mit μ unverändert bleiben, so können wir folgenden Satz aufstellen:

Sind zwei aufeinander abwickelbare P-Flächen gegeben, von denen die eine aus der anderen nicht durch Drehung um den Koordinatenanfang oder durch Spiegelung an demselben entstanden ist, so erhält man zwei im allgemeinen neue aufeinander abwickelbare P-Flächen, indem man in den Gleichungen der gegebenen Flächen den Nenner $l + \lambda$ durch $m + \mu$ ersetzt.

Die hinzugefügte Beschränkung ist nötig, damit $m + \mu$ nicht identisch verschwinde.

Übrigens überzeugt man sich durch eine einfache Rechnung, daß, wenn die beiden gegebenen P-Flächen zueinander kongruent oder symmetrisch sind, dasselbe auch für die beiden abgeleiteten Flächen eintritt. Entsteht dagegen das erste Flächenpaar durch eigentliche Biegung, so gilt dasselbe auch für das zweite Paar.

7.

Die Gleichungen (8), (9) können auf eine symmetrischere Form gebracht werden. Zu diesem Zwecke führen wir je zwei neue Funktionen von u resp. v mittels der Gleichungen

$$\begin{aligned} l &= n' + n, \quad m = n' - n, \\ \lambda &= \nu' + \nu, \quad \mu = \nu' - \nu. \end{aligned} \tag{10}$$

ein. Dann gehen die Gleichungen (8), (9) über in

$$\Sigma(a + \alpha)^2 + (n + \nu)^2 = \Sigma(a' + \alpha')^2 + (n' + \nu')^2,$$

$$\sum \left(\frac{da}{du}\right)^2 + \left(\frac{dn}{du}\right)^2 = \sum \left(\frac{da'}{du}\right)^2 + \left(\frac{dn'}{du}\right)^2,$$

$$\sum \left(\frac{d\alpha}{dv}\right)^2 + \left(\frac{d\nu}{dv}\right)^2 = \sum \left(\frac{d\alpha'}{dv}\right)^2 + \left(\frac{d\nu'}{dv}\right)^2,$$

oder kürzer, wenn wir die Summenzeichen beiderseits auf alle vier Glieder erstrecken, in

$$\Sigma(a + \alpha)^2 = \Sigma(a' + \alpha')^2, \tag{11}$$

$$\begin{aligned} \sum \left(\frac{da}{du}\right)^2 &= \sum \left(\frac{da'}{du}\right)^2, \\ \sum \left(\frac{d\alpha}{dv}\right)^2 &= \sum \left(\frac{d\alpha'}{dv}\right)^2. \end{aligned} \tag{12}$$

Dies sind die Fundamentalgleichungen unseres Problems.

Hat man ein Paar aufeinander abwickelbarer P-Flächen, so entspricht demselben eine Lösung der Gleichungen (11), (12). Hat man aber umgekehrt eine Lösung dieser Gleichungen, so kann man daraus nicht nur ein einziges Paar, sondern unendlich viele Paare aufeinander

abwickelbarer P-Flächen ableiten. In der Tat, bringen wir alle Glieder jeder dieser Gleichungen auf die linke Seite, so bekommen wir drei kogrediente 8-gliedrige quadratische Formen. Dieselben können durch unendlich viele lineare Substitutionen in sich selbst transformiert werden, wodurch neue Lösungen der Gleichungen (11), (12) entstehen, welche zu neuen Paaren aufeinander abwickelbarer P-Flächen führen.

Man soll jedoch nicht glauben, alle diese Flächenpaare seien von den ursprünglichen wesentlich verschieden. Wenn man z. B. das Vorzeichen eines der Glieder $(a + \alpha)$, $(b + \beta)$, $(c + \gamma)$ abändert, so entspricht dieser Substitution bloß die Spiegelung der ersten Fläche an einer der Koordinatenebenen. Anderen speziellen Substitutionen entsprechen Verschiebungen und Drehungen einer oder beider Flächen. Unwesentlich ist ferner eine lineare Transformation von $n + \nu$ und $n' + \nu'$ mit der Determinante $+ 1$, weil durch dieselbe die beiden aufeinander abwickelbaren P-Flächen durch zwei ihnen ähnliche ersetzt werden, indem der gemeinsame Nenner $l + \lambda$ nur einen konstanten Faktor erhält.

Dagegen gibt der Zeichenwechsel von $n + \nu$ oder $n' + \nu'$ im allgemeinen eine wesentliche Veränderung der P-Flächen, indem dadurch $l + \lambda$ mit $m + \mu$ vertauscht wird. Ebenso werden die Flächen wesentlich verändert durch solche Transformationen, bei denen die ersten drei Glieder der beiden Seiten, z. B. $a + \alpha$ und $a' + \alpha'$, beteiligt sind.

8.

Wir haben in § 3 gesehen, daß, wenn in (1) zwischen den Funktionen a, b, c, l oder $\alpha, \beta, \gamma, \lambda$ mehr als zwei lineare Relationen bestehen, die entsprechende P-Fläche eine abwickelbare Fläche ist. Wir wollen jetzt untersuchen, unter welchen Bedingungen derselbe Umstand bei den Gleichungen (11), (12) auftritt. Dazu ist notwendig, daß diese Gleichungen bei jeder linearen Substitution nur solche Funktionen $a \cdots l$, $\alpha \cdots \lambda$ liefern, die durch mehr als zwei lineare Relationen verbunden sind. Dieser Umstand tritt aber sicher ein, wenn zwischen den acht Funktionen einer Art mindestens sechs lineare Relationen stattfinden. Wir wollen z. B. voraussetzen, daß die acht Funktionen $a \cdots n$, $a' \cdots n'$ sechs linearen Gleichungen genügen. Wenn wir aus diesen Gleichungen sechs Funktionen durch die zwei übrigen ausdrücken und diese Ausdrücke in die erste Gleichung (12) eintragen, so bekommen wir eine homogene quadratische Relation zwischen den Ableitungen dieser beiden Funktionen. Diese quadratische Relation läßt sich in zwei lineare auflösen und liefert dann nach dem Integrieren eine siebente lineare Relation zwischen den beiden Funktionen. Somit lassen sich alle acht Funktionen von u durch eine von denselben ausdrücken, in welchem Falle, wie in § 3 gezeigt worden ist,

die entsprechenden P-Flächen auf eine Ebene abwickelbar sind. Es zeigt sich sogar, daß dieser Umstand schon bei fünf Relationen zwischen den acht Funktionen desselben Arguments eintritt, doch ist es mir bisher nicht gelungen, davon einen allgemeinen Beweis zu erbringen. Wir wollen daher auch die Möglichkeit von fünf linearen Relationen voraussetzen.

Differentiieren wir (11) nach u und v, so kommt

$$\sum \frac{da}{du}\frac{d\alpha}{dv} = \sum \frac{da'}{du}\frac{d\alpha'}{dv}. \tag{13}$$

Erteilt man hier der Veränderlichen v verschiedene Werte, so entstehen zwischen den acht Ableitungen nach u, $\frac{da}{du}, \cdots \frac{dn'}{du}$, ebensoviele lineare Relationen; in derselben Weise entstehen lineare Relationen zwischen $\frac{d\alpha}{dv}, \cdots, \frac{dv'}{dv'}$, wenn wir u einzelne Werte beilegen. Man überzeugt sich leicht, daß die Gesamtanzahl der unabhängigen Relationen beider Art gleich der Zahl der Glieder der vorstehenden Gleichung, d. h. gleich 8 ist. Da mehr als fünf Relationen einer Art sicher zu den auf die Ebene abwickelbaren P-Flächen führen, welche wir von unserer Betrachtung ausgeschlossen haben, so bleiben nur noch zwei Möglichkeiten übrig: Wir können entweder je vier Relationen zwischen den Funktionen von u und denen von v haben, oder drei Relationen der einen Art und fünf der anderen. Wegen der Gleichwertigkeit der beiden Parameter u und v können wir im letzteren Falle annehmen, daß die Funktionen von u durch drei, die von v durch fünf Relationen verbunden sind.

Wir wollen zuerst den Fall betrachten, daß die Anzahl der Relationen zwischen $\frac{da}{du} \cdots \frac{dn'}{du}$ gleich 4 ist. Wir schreiben dieselben in der Form

$$\begin{aligned} &p_1\frac{da}{du} + q_1\frac{db}{du} + r_1\frac{dc}{du} + s_1\frac{dn}{du} = p_1'\frac{da'}{du} + q_1'\frac{db'}{du} + r_1'\frac{dc'}{du} + s_1'\frac{dn'}{du}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &p_4\frac{da}{du} + \cdots \qquad\qquad = p_4'\frac{da'}{du} + \cdots, \end{aligned} \tag{14}$$

mit den 32 konstanten Koeffizienten $p_1, \cdots, s_4'$.

Wir setzen vorläufig voraus, daß diese vier Gleichungen in bezug auf $\frac{da'}{du}, \frac{db'}{du}, \frac{dc'}{du}, \frac{dn'}{du}$ auflösbar sind. Betrachten wir dann die beiden quadratischen Formen

$$\sum \left(\frac{da}{du}\right)^2, \quad \sum \left(\frac{da'}{du}\right)^2$$

und ersetzen in der zweiten die Ableitungen $\frac{da'}{du} \cdots$ durch ihre Ausdrücke

in $\frac{da}{du} \cdots$ aus (14), so erhalten wir zwei definite Formen in den nämlichen Veränderlichen $\frac{da}{du} \cdots \frac{dn}{du}$. Diese beiden Formen können bekanntlich durch eine reelle lineare Substitution in Summen von Quadraten verwandelt werden, deren neue Argumente wir mit $\frac{dA}{du}, \frac{dB}{du}, \frac{dC}{du}, \frac{dN}{du}$ bezeichnen wollen. Alsdann verwandeln sich die beiden Summen in

$$\left(\frac{dA}{du}\right)^2 + \left(\frac{dB}{du}\right)^2 + \left(\frac{dC}{du}\right)^2 + \left(\frac{dN}{du}\right)^2$$

und

$$h_1^2 \left(\frac{dA}{du}\right)^2 + h_2^2 \left(\frac{dB}{du}\right)^2 + h_3^2 \left(\frac{dC}{du}\right)^2 + h_4^2 \left(\frac{dN}{du}\right)^2,$$

wobei alle h reelle endliche Zahlen sind. Setzen wir

$$(15) \quad h_1 \frac{dA}{du} = \frac{dA'}{du}, \quad h_2 \frac{dB}{du} = \frac{dB'}{du}, \quad h_3 \frac{dC}{du} = \frac{dC'}{du}, \quad h_4 \frac{dN}{du} = \frac{dN'}{du},$$

so nehmen die beiden Formen die Gestalt

$$\sum \left(\frac{dA}{du}\right)^2, \quad \sum \left(\frac{dA'}{du}\right)^2$$

an. Führen wir dieselbe Transformation in Gl. (11), (12) aus, behalten aber statt $A, A' \cdots$ die alten Bezeichnungen $a, a' \cdots$ bei, so ändern diese Gleichungen ihre Form nicht, da unsere Transformation die Quadratsummen auf den beiden Seiten in Quadratsummen überführt. Die Gleichungen (14) werden aber durch die nachstehenden ersetzt

$$(16) \quad h_1 \frac{da}{du} = \frac{da'}{du}, \quad h_2 \frac{db}{du} = \frac{db'}{du}, \quad h_3 \frac{dc}{du} = \frac{dc'}{du}, \quad h_4 \frac{dn}{du} = \frac{dn'}{du}.$$

Bisher hatten wir vorausgesetzt, daß Gl. (14) in bezug auf $\frac{da'}{du} \cdots \frac{dn'}{du}$ auflösbar ist. Sollte diese Bedingung in einzelnen Fällen nicht erfüllt sein, dann können wir die Koeffizienten von (14) etwas abändern und dann zu unserem Falle als zur Grenze übergehen. Man sieht leicht ein, daß bei diesem Grenzübergange unsere orthogonale Substitution nie unmöglich, sondern höchstens unbestimmt werden kann, in welchem Falle wir aus der unendlichen Menge möglicher Substitutionen eine beliebige auswählen können, um den linearen Relationen (14) die Form (16) zu geben. Der einzige Unterschied besteht darin, daß in diesem Falle einige von den Zahlen $h_1, \cdots, h_4$ unendlich oder unbestimmt werden, was übrigens für das Folgende gleichgültig ist. Wird z. B. in der Gleichung $h_1 \frac{da}{du} = \frac{da'}{du}$ die Größe h_1 unendlich, so ist die Gleichung durch $\frac{da}{du} = 0$ zu ersetzen; wird h_1 aber unbestimmt, so hat man die beiden Gleichungen $\frac{da}{du} = 0, \frac{da'}{du} = 0$.

Ist ferner die Anzahl der Gleichungen (14) bloß gleich 3, so können wir denselben eine beliebige vierte lineare Gleichung hinzufügen, die wir nach Ausführung der orthogonalen Substitution wieder fallen lassen.

9.

Wir können die Bedingungen (16) auf drei verschiedene Formen zurückführen. Betrachten wir eine Relation

$$h\frac{da}{du} = \frac{da'}{du}, \tag{17}$$

so sind drei Fälle zu unterscheiden, je nachdem der absolute Betrag von h $\gtreqless 1$ ist. Ist z. B. $|h| > 1$, so können wir in (11), (12) statt $(a + \alpha)$ und $(a' + \alpha')$ folgende Ausdrücke einsetzen

$$\frac{1}{\sqrt{h^2-1}}[h(a+\alpha) - (a'+\alpha')], \quad \frac{1}{\sqrt{h^2-1}}[(a+\alpha) - h(a'+\alpha')],$$

wodurch Gl. (11), (12) keine wesentliche Veränderung erleiden. Bezeichnen wir aber diese Ausdrücke wieder mit $(a + \alpha)$, $(a' + \alpha')$, so nimmt unsere Relation (17) die einfache Form

$$\frac{da}{du} = 0$$

an. Ebenso verwandelt sich (17) bei $|h| < 1$ in

$$\frac{da'}{du} = 0.$$

Ist endlich $|h| = 1$, so können wir immer $h = +1$ setzen, da wir in (11) nötigenfalls die Vorzeichen der einzelnen Glieder verändern können. Somit können die Relationen (16) zwischen den Ableitungen der acht Funktionen $a, \cdots, n'$ nach u immer auf die drei Formen zurückgeführt werden:

$$\frac{da}{du} = 0, \quad \frac{da'}{du} = 0, \quad \frac{da}{du} = \frac{da'}{du}. \tag{18}$$

Wir wollen nun voraussetzen, daß zwischen den Ableitungen der Funktionen $a, \cdots, n'$ tatsächlich eine gewisse Anzahl von Relationen von der Form (18) besteht. Führen wir diese in (13) ein, so bestehen keine weiteren linearen Beziehungen zwischen den übrig gebliebenen Ableitungen nach u; es müssen daher die Koeffizienten dieser Ableitungen identisch verschwinden. Untersuchen wir, welche Beziehungen zwischen den Ableitungen nach v daraus entstehen. Kommt irgend eine Ableitung nach u, z. B. $\frac{da}{du}$, in den Bedingungen (16) nicht vor, so bleibt sie auch in (13) bestehen und ihr Koeffizient muß verschwinden; wir haben somit

$$\frac{d\alpha}{dv} = 0.$$

Genügt dagegen a der Bedingung $\frac{da}{du} = 0$, so verschwindet diese Ableitung aus (13), und ihr Koeffizient $\frac{da}{dv}$ in (13) bleibt frei. Sind endlich a und a' durch die Relation

$$\frac{da}{du} = \frac{da'}{du}$$

verbunden, und eliminieren wir mittels derselben aus (13) die Ableitung $\frac{da'}{du}$, so erhält $\frac{da}{du}$ den Koeffizienten $\frac{d\alpha}{dv} - \frac{d\alpha'}{dv}$ und es folgt

$$\frac{d\alpha}{dv} = \frac{d\alpha'}{dv}.$$

Folglich können die Beziehungen zwischen den Ableitungen nach v in dreifacher Form dargestellt werden:

$$\frac{da}{dv} = 0, \quad \frac{da'}{dv} = 0, \quad \frac{d\alpha}{dv} = \frac{d\alpha'}{dv}. \tag{19}$$

Von den Beziehungen (18), (19) zwischen den Ableitungen der Funktionen $a, \cdots, \nu'$ können wir zu den Beziehungen zwischen diesen Funktionen selbst übergehen. Aus

$$\frac{da}{du} = 0$$

folgt

$$a = k = \text{const.}$$

Da aber a in (11) nur in der Verbindung $a + \alpha$ auftritt, so können wir k zu α hinzufügen und setzen

$$a = 0. \tag{20}$$

Ebenso führt

$$\frac{d\alpha}{dv} = 0$$

zu

$$\alpha = 0, \tag{21}$$

wobei die beiden Beziehungen $a = 0$, $\alpha = 0$ niemals zusammen eintreten dürfen.

Bestehen endlich die beiden Relationen

$$\frac{da}{du} = \frac{da'}{du}, \quad \frac{d\alpha}{dv} = \frac{d\alpha'}{dv}, \tag{22}$$

die, wie wir oben gezeigt haben, immer gleichzeitig vorkommen, so ergeben dieselben

$$a + \alpha = a' + \alpha' + 2k,$$

wobei k eine Konstante ist.

Diese Gleichung kann durch zwei andere ersetzt werden

$$a + \alpha = \bar{a} + \bar{\alpha} + k, \quad a' + \alpha' = \bar{a} + \bar{\alpha} - k, \tag{23}$$

wo $\bar{a}$, $\bar{\alpha}$ zwei neue Funktionen von u resp. v bezeichnen. Setzen wir diese Ausdrücke in (11), (12) ein, so verschwinden die entsprechenden Glieder aus (12), während in (11) auf den beiden Seiten die Ausdrücke

$$2(\bar{a} + \bar{\alpha})k, \quad -2(\bar{a} + \bar{\alpha})k$$

bleiben. Ist $k = 0$, so verschwinden auch diese. Ist aber k von Null verschieden, so können wir in (11) $k\bar{a}$, $k\bar{\alpha}$ durch $\bar{a}$, $\bar{\alpha}$ ersetzen, was dem Werte $k = 1$ entsprechen würde. Somit kann man immer in (23) entweder $k = 0$ oder $k = 1$ setzen und es folgt aus (22) entweder

$$a + \alpha = a' + \alpha'$$

oder

$$a + \alpha - 1 = a' + \alpha + 1.$$

10.

Nunmehr sind wir imstande, alle Lösungen der Gleichungen (11), (12) *und damit alle aufeinander abwickelbaren P-Flächen ansugeben.* Wie wir sahen, können aus jeder Lösung dieser Gleichungen unendlich viele neue Lösungen abgeleitet werden mittels linearer Substitutionen, die diese Gleichungen in sich überführen. Diese Substitutionen setzen sich zusammen aus orthogonalen Substitutionen, welche auf jede Seite dieser Gleichungen ausgeübt werden können, und aus einer Substitution, durch welche Glieder der beiden Seiten miteinander verbunden werden. Wir können nämlich in (11), (12) die Ausdrücke

$$a + \alpha, \quad a' + \alpha'$$

durch

$$(24) \qquad g(a + \alpha) + h(a' + \alpha'), \quad h(a + \alpha) + g(a' + \alpha')$$

ersetzen, wobei die Konstanten g, h durch die Bedingung

$$g^2 - h^2 = 1$$

verbunden sind.

Alle Lösungen der Gleichungen (11), (12), die auseinander durch lineare Transformationen erhalten werden können, wollen wir zu einer Gruppe rechnen, und es genügt, aus jeder Gruppe nur eine Lösung zu finden, um alle übrigen zu haben. Jede Gruppe von Lösungen wird durch die Beschaffenheit der linearen Relationen charakterisiert, die nach § 8 zwischen den Funktionen in (11) stattfinden müssen. Durch geeignete lineare Transformationen können wir diese Relationen auf die Formen (20), (21), (23) bringen, und die Zahl der Relationen jeder Form ist es, die die verschiedenen Gruppen von Lösungen voneinander unterscheidet.

Die Untersuchung aller hier möglichen Fälle bietet keine Schwierigkeiten; wir wollen hier bloß ihr Endergebnis angeben. Es zeigt sich:

wenn wir nur solche P-Flächen haben wollen, die auf die Ebene nicht abwickelbar sind, so ist notwendig, daß zwischen den Funktionen von u und denen von v je vier lineare Relationen bestehen; von diesen darf höchstens ein Paar die Form (23) haben.

Es lassen sich daher alle Lösungen der Gleichungen (11), (12) in zwei Gruppen verteilen, je nachdem in der bezüglichen linearen Relation die Form (23) vorkommt oder nicht. Jede Gruppe zerfällt in Untergruppen, die sich durch die Verteilung der Relationen der Form (20), (21) zwischen den beiden Seiten von (11) unterscheiden. Es wird sich jedoch zeigen, daß diese Untergruppen sich voneinander nicht wesentlich unterscheiden, da sie durch lineare Substitutionen, allerdings mit imaginären Koeffizienten, ineinander übergehen.

11.

Wir wollen nun die erste Gruppe der Lösungen betrachten. Hier hat ein Paar von Relationen die Form (23); wir wollen dieselbe auf die Glieder $n + \nu$, $n' + \nu'$ beziehen und setzen

$$n + \nu - k = n' + \nu' + k = \bar{n} + \bar{\nu},$$

indem wir die Konstante k unbestimmt lassen, um auch den Fall $k = 0$ einbegreifen zu können. Die übrigen sechs Relationen verteilen sich auf die übrigen Glieder der Gleichung (11). Als erste Untergruppe betrachten wir die, bei der unter den drei Relationen von der Form (20) sich zwei auf die eine und eine auf die andere Seite der Gleichung (11) beziehen. Dann müssen die Relationen (21) sich umgekehrt verteilen. Somit haben wir in diesem Falle folgende Beziehungen

$$\begin{gathered} n + \nu = \bar{n} + \bar{\nu} + k, \quad n' + \nu' = \bar{n} + \bar{\nu} - k, \\ a' = 0, \quad b' = 0, \quad c = 0, \\ \alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma' = 0. \end{gathered} \tag{I, 1}$$

Die Gleichungen (11), (12) verwandeln sich hier in

$$\begin{gathered} a^2 + b^2 + \gamma^2 + 4k(\bar{n} + \bar{\nu}) = \alpha'^2 + \beta'^2 + c'^2, \\ \left(\frac{da}{du}\right)^2 + \left(\frac{db}{du}\right)^2 = \left(\frac{dc'}{du}\right)^2, \\ \left(\frac{d\gamma}{dv}\right)^2 = \left(\frac{d\alpha'}{dv}\right)^2 + \left(\frac{d\beta'}{dv}\right)^2. \end{gathered} \tag{25}$$

Wählen wir hier für a, b, α', β' beliebige Funktionen, so werden aus den beiden letzten Gleichungen c', γ durch Quadraturen bestimmt, worauf sich aus der ersten Gleichung $\bar{n} + \bar{\nu}$ ergibt; den verschiedenen Werten der Konstante k entspricht hier eine Schar ähnlicher Flächen.

Beziehen sich alle drei Relationen von der Form (20) auf die eine Seite der Gleichung (11), so entsteht die zweite Untergruppe

$$\begin{gathered} n+\nu=\bar{n}+\bar{\nu}+k, \quad n'+\nu'=\bar{n}+\bar{\nu}-k, \\ a'=0, \quad b'=0, \quad c'=0, \\ \alpha=0, \quad \beta=0, \quad \gamma=0. \end{gathered} \tag{I, 2}$$

Die Gleichungen (11), (12) nehmen hier die Form an

$$\begin{gathered} a^2+b^2+c^2+4k(\bar{n}+\bar{\nu})=\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2, \\ \left(\frac{da}{du}\right)^2+\left(\frac{db}{du}\right)^2+\left(\frac{dc}{du}\right)^2=0, \\ \left(\frac{d\alpha'}{dv}\right)^2+\left(\frac{d\beta'}{dv}\right)^2+\left(\frac{d\gamma'}{dv}\right)^2=0. \end{gathered} \tag{26}$$

Es ist leicht zu sehen, daß dieser Fall in den vorhergehenden leicht transformiert werden kann. Ersetzen wir in (26) c, γ' durch ic', $i\gamma$ und bringen diese Glieder auf die anderen Seiten der Gleichungen, so erhalten wir (25); letztere Transformation ist aber ein Spezialfall von (24) für $g=0$, $h=-i$.

Es ist zu beachten, daß, obwohl die Gl. (26) nur imaginäre Lösungen zulassen, wir jedoch auch hier reelle P-Flächen erhalten können. Wir können nämlich u, v als konjugiert komplexe Veränderliche betrachten und a, b, c konjugiert zu $i\alpha'$, $i\beta'$, $i\gamma'$ wählen. Wenden wir dann auf alle Glieder von (26) außer $\bar{n}+\bar{\nu}$, die Transformation (24) mit $g=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $h=\frac{i}{\sqrt{2}}$ an, so verwandelt sich die erste dieser Gleichungen in

$$\begin{gathered} (a+i\alpha')^2+(b+i\beta')^2+(c+i\gamma')^2+8k(\bar{n}+\bar{\nu}) \\ =(ia+\alpha')^2+(ib+\beta')^2+(ic+\gamma')^2. \end{gathered}$$

Alle Glieder sind hier reell und können zur Bestimmung zweier reeller P-Flächen dienen.

Als Beispiel wollen wir setzen

$$\begin{aligned} &a+\alpha=2\sin u, \quad b+\beta=2\cos u, \quad c+\gamma=2\operatorname{Sin} v, \quad n+\nu=u^2+v^2+1, \\ &a'+\alpha'=2\operatorname{Cos} v, \quad b'+\beta'=2v, \quad c'+\gamma'=2u, \quad n'+\nu'=u^2+v^2-1, \end{aligned}$$

hier haben wir

$$\begin{gathered} a'=0, \quad b'=0, \quad c=0, \\ \alpha=0, \quad \beta=0, \quad \gamma'=0, \\ n+\nu=n'+\nu'+2, \end{gathered}$$

also den Fall (I, 1). Die Gleichungen (11), (12) werden identisch befriedigt, und wir haben nach (10)

$$l+\lambda=2(u^2+v^2), \quad m+\mu=-2.$$

Dann liefern (1), (1') zwei folgende aufeinander abwickelbare P-Flächen

$$x = \frac{\sin u}{u^2+v^2}, \quad y = \frac{\cos u}{u^2+v^2}, \quad z = \frac{\mathfrak{Sin}\, v}{u^2+v^2},$$
$$x' = \frac{\mathfrak{Cof}\, v}{u^2+v^2}, \quad y' = \frac{v}{u^2+v^2}, \quad z' = \frac{u}{u^2+v^2}.$$

Vertauschen wir $l+\lambda$ mit $m+\mu$ und multiplizieren mit -1, so bekommen wir ein anderes Flächenpaar

$$x = \sin u, \quad y = \cos u, \quad z = \mathfrak{Sin}\, v,$$
$$x' = \mathfrak{Cof}\, u, \quad y' = v, \quad z' = u.$$

Diese Gleichungen stellen zwei Zylinder dar. Wenden wir aber auf dieselben die Transformation (24) an, so bekommen wir zwei aufeinander abwickelbare Translationsflächen

$$x = \sin u, \quad y = g\cos u + hv, \quad z = \mathfrak{Sin}\, v,$$
$$x' = \mathfrak{Cof}\, v, \quad y' = h\cos u + gv, \quad z' = u,$$
$$g^2 - h^2 = 1.$$

12.

Wir wenden uns jetzt zu der zweiten Gruppe von Lösungen, bei der keine der linearen Relationen die Form (23) hat. Hier entstehen ebenfalls Untergruppen, die davon abhängen, wieviele Relationen von der Form (20) jeder Seite der Gleichung (11) entsprechen. Es können nämlich entweder jeder Seite je zwei Relationen entsprechen, oder einer Seite drei und der anderen eine, oder endlich können alle vier Relationen sich auf eine Seite beziehen. Das liefert folgende drei Untergruppen:

(II, 1)
$$a' = 0, \quad b' = 0, \quad c = 0, \quad n = 0,$$
$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma' = 0, \quad \nu' = 0,$$

Die Gleichungen (11), (12) ergeben hier

(27)
$$a^2 + b^2 + \gamma^2 + \nu^2 = \alpha'^2 + \beta'^2 + c'^2 + n'^2,$$
$$\left(\frac{da}{du}\right)^2 + \left(\frac{db}{du}\right)^2 = \left(\frac{dc'}{du}\right)^2 + \left(\frac{dn'}{du}\right)^2,$$
$$\left(\frac{d\gamma}{dv}\right)^2 + \left(\frac{d\nu}{dv}\right)^2 = \left(\frac{d\alpha'}{dv}\right)^2 + \left(\frac{d\beta'}{dv}\right)^2.$$

Die erste Gleichung zerfällt in zwei andere

(28)
$$a^2 + b^2 + k = c'^2 + n'^2,$$
$$\gamma^2 + \nu^2 = \alpha'^2 + \beta'^2 + k,$$

wobei k eine Konstante bezeichnet.

Differentiieren wir die erste Gleichung (28) und verbinden sie mit der zweiten Gleichung (27), so bekommen wir

$$(a^2+b^2+k)\left[\left(\frac{da}{du}\right)^2+\left(\frac{db}{du}\right)^2\right]-\left(a\frac{da}{du}+b\frac{db}{du}\right)^2$$
$$=(c'^2+n'^2)\left[\left(\frac{dc'}{du}\right)^2+\left(\frac{dn'}{du}\right)^2\right]-\left(c'\frac{dc'}{du}+n'\frac{dn'}{du}\right)^2,$$

oder

$$\left(n'\frac{dc'}{du}-c'\frac{dn'}{du}\right)^2=\left(b\frac{da}{du}-a\frac{db}{du}\right)^2+k\left[\left(\frac{da}{du}\right)^2+\left(\frac{db}{du}\right)^2\right].$$

Zieht man hier beiderseits die Quadratwurzel aus, dividiert durch die erste Gleichung (28) und integriert, so bekommt man

$$\operatorname{arctg}\frac{c'}{n'}=\int\frac{\sqrt{\left(b\frac{da}{du}-a\frac{db}{du}\right)^2+k\left[\left(\frac{da}{du}\right)^2+\left(\frac{db}{du}\right)^2\right]}}{a^2+b^2+k}du.$$

und ebenso

$$\operatorname{arctg}\frac{\alpha'}{\beta'}=\int\frac{\sqrt{\left(\gamma\frac{d\gamma}{dv}-\gamma\frac{dv}{dv}\right)^2-k\left[\left(\frac{d\gamma}{dv}\right)^2+\left(\frac{dv}{dv}\right)^2\right]}}{\gamma^2+v^2-k}dv.$$

Diese Formeln, zusammen mit (28), drücken c', n', α', β' durch a, b, γ, v aus. Die bei der Integration auftretenden Konstanten entsprechen orthogonalen Substitutionen in c', n' und α', β'.

Die beiden anderen Untergruppen sind die folgenden:

(II, 2)
$$a'=0,\quad b'=0,\quad c'=0,\quad n=0,$$
$$\alpha=0,\quad \beta=0,\quad \gamma=0,\quad v'=0,$$
$$a^2+b^2+c^2+v^2=\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2+n'^2,$$
$$\left(\frac{da}{du}\right)^2+\left(\frac{db}{du}\right)^2+\left(\frac{dc}{du}\right)^2=\left(\frac{dn'}{du}\right)^2,$$
$$\left(\frac{d\alpha'}{dv}\right)^2+\left(\frac{d\beta'}{dv}\right)^2+\left(\frac{d\gamma'}{dv}\right)^2=\left(\frac{dv}{dv}\right)^2.$$

(II, 3)
$$a'=0,\quad b'=0,\quad c'=0,\quad n'=0,$$
$$\alpha=0,\quad \beta=0,\quad \gamma=0,\quad v=0,$$
$$a^2+b^2+c^2+n^2=\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2+v'^2,$$
$$\left(\frac{da}{du}\right)^2+\left(\frac{db}{du}\right)^2+\left(\frac{dc}{du}\right)^2+\left(\frac{dn}{du}\right)^2=0,$$
$$\left(\frac{d\alpha'}{dv}\right)^2+\left(\frac{d\beta'}{dv}\right)^2+\left(\frac{d\gamma'}{dv}\right)^2+\left(\frac{dv'}{dv}\right)^2=0,$$

Diese beiden Untergruppen können aus der ersten (II, 1) durch dieselbe imaginäre Transformation abgeleitet werden, durch die wir (I, 2) aus (I, 1) erhalten haben. Obwohl in (II, 3) nur imaginäre Lösungen

möglich sind, können wir auch hier reelle P-Flächen erhalten. Dazu müssen wir, ähnlich wie in (I, 2), u, v konjugiert imaginär nehmen und zugleich die Funktionen a, b, c, n konjugiert imaginär zu $i\alpha'$, $i\beta'$, $i\gamma'$, $i\nu'$ wählen.

Als Beispiel nehmen wir

$$a + \alpha = \mathfrak{Sin}\, ku, \quad b + \beta = \sin kv, \quad c + \gamma = \cos kv, \quad n + \nu = k\,\mathfrak{Cof}\, u,$$
$$a' + \alpha' = k\,\mathfrak{Sin}\, u, \quad b' + \beta' = k \sin v, \quad c' + \gamma' = \mathfrak{Cof}\, ku, \quad n' + \nu' = k \cos v,$$

wobei k eine Konstante ist.

Hier ist

$$b = 0, \quad c = 0, \quad b' = 0, \quad n' = 0,$$
$$\alpha = 0, \quad \nu = 0, \quad \alpha' = 0, \quad \gamma' = 0,$$

was, abgesehen von der Bezeichnung, dem Falle (II, 1) entspricht. Man überzeugt sich, daß diese Werte den Gleichungen (11), (12) genügen. Berechnet man $l + \lambda$ aus (10), so bekommt man aus (1), (1′) die Gleichungen der beiden aufeinander abwickelbaren P-Flächen

$$(29) \qquad \begin{aligned} x &= \frac{\mathfrak{Sin}\, ku}{\mathfrak{Cof}\, u + \cos v}, \quad y = \frac{\sin kv}{\mathfrak{Cof}\, u + \cos v}, \quad z = \frac{\cos kv}{\mathfrak{Cof}\, u + \cos v}, \\ x' &= \frac{k\,\mathfrak{Sin}\, u}{\mathfrak{Cof}\, u + \cos v}, \quad y' = \frac{k \sin v}{\mathfrak{Cof}\, u + \cos v}, \quad z' = \frac{\mathrm{ch}\, ku}{\mathfrak{Cof}\, u + \cos v}, \end{aligned}$$

wobei zur Vereinfachung alle Ausdrücke mit k multipliziert worden sind.

Üben wir auf $c + \gamma$, $c' + \gamma'$ die Transformation (24) aus, so entstehen allgemeinere Gleichungen, indem die Ausdrücke von z, z' die Form erhalten

$$(29') \qquad z = \frac{h\,\mathfrak{Cof}\, ku + g \cos kv}{\mathfrak{Cof}\, u + \cos v}, \quad z' = \frac{g\,\mathfrak{Cof}\, ku + h \cos kv}{\mathfrak{Cof}\, u + \cos v},$$
$$g^2 - h^2 = 1.$$

Diese Gleichungen sind von Peterson 1866 angegeben worden. Sie können augenscheinlich noch weiter verallgemeinert werden, wenn man die Transformation (24) auf die beiden übrigen Koordinatenpaare anwendet.

13.

Aus dem Vorhergehenden läßt sich schließen, daß im allgemeinen eine P-Fläche in eine andere von ihr wesentlich verschiedene P-Fläche nicht verbogen werden kann. In der Tat, ersetzt man n, n', ν, ν' durch ihre Ausdrücke (10), so folgt aus § 8, daß die acht Funktionen a, a', b, b', c, c', l, m durch vier lineare Relationen und ebenso die acht übrigen Funktionen α, α', β, β', γ, γ', λ, μ durch vier andere lineare Relationen verbunden sind. Durch eine entsprechende Veränderung der Lage der

beiden P-Flächen in bezug auf den Koordinatenanfang kann man aber stets erreichen, daß die Funktionen l, m, λ, μ nicht mit den übrigen Funktionen linear verbunden seien. Tritt z. B. in einer linearen Relation die Summe $a + kl$ auf, so verschieben wir die erste Fläche parallel zur x-Achse um die Länge k. Dann muß man den Ausdruck $x = \frac{a+\alpha}{l+\lambda}$ durch den anderen

$$x = \frac{(a + kl) + (\alpha + k\lambda)}{l + \lambda}$$

ersetzen. Somit kommt an die Stelle von a die Summe $a + kl$, und in unserer linearen Relation muß umgekehrt $a + kl$ durch a ersetzt werden. In dieser Weise kann l aus jeder linearen Relation entfernt werden, welche eine der Funktionen a, a', b, b', c, c' enthält. Ebenso überzeugt man sich, daß eine lineare Verbindung von m mit diesen sechs Funktionen vermieden werden kann. Differentiieren wir nämlich (8) nach u und v, so folgt ähnlich wie in § 8, daß, wenn a mit m linear verbunden ist, und diese lineare Gleichung die einzige ist, in der a und m zusammen auftreten, eine zweite lineare Relation vorhanden sein muß, die α mit λ verbindet. Aus der letzteren kann man aber λ wegschaffen mittels desselben Verfahrens, welches oben auf l angewandt wurde; dann wird auch m aus seiner Verbindung mit a verschwinden.

Da die Funktionen a, b, c, l im allgemeinen durch keine linearen Relationen verbunden sind, so lassen sich aus den vier linearen Relationen zwischen a, a', b, b', c, c', l, m die Funktionen a', b', c', m durch a, b, c, l ausdrücken, wobei nach dem Vorangehenden die Ausdrücke für a', b', c' nur a, b, c, nicht aber l erhalten. Setzen wir diese Ausdrücke in (9) ein und beachten, daß wir zwischen a, b, c, l keine spezielle Abhängigkeit voraussetzen, so folgt daraus, daß durch unsere Substitution $\sum \left(\frac{da'}{du}\right)^2$ in $\sum \left(\frac{da}{du}\right)^2$ übergeht. Diese Substitution entspricht folglich einer Drehung der ursprünglichen P-Fläche um den Koordinatenanfang, eventuell verbunden mit einer Spiegelung, so daß die zweite P-Fläche der Form nach von der ersten nicht verschieden ist. Nur solche P-Flächen können in andere P-Flächen verbogen werden, deren Gleichungen mit den Lösungen (I, 1) — (II, 3) in §§ 11, 12 in Verbindung stehen.

14.

Bisher hatten wir nach Paaren von aufeinander abwickelbaren P-Flächen gesucht. Wir wollen nun untersuchen, ob es solche P-Flächen gibt, die kontinuierlich in andere P-Flächen verbogen werden können unter der Bedingung, daß das Liniensystem (u, v) bei dem Verbiegen der Fläche ein konjugiertes System bleiben soll. Mit anderen Worten: wir

fragen nach solchen *kontinuierlichen Scharen von aufeinander abwickelbaren P-Flächen, bei denen es konjugierte Liniensysteme gibt, die auf allen Flächen der Schar einander entsprechen.*

Es mögen die Gleichungen (1') eine solche Flächenschar darstellen. Dann müssen $a', \alpha', b', \beta', c', \gamma'$ Funktionen eines „Biegungsparameters" t sein, die wir in bezug auf t differentiierbar voraussetzen wollen. Einem speziellen Werte t_0 dieses Parameters entspricht eine bestimmte Fläche der Schar, die durch (1) dargestellt werden möge. Dann ist es zur Lösung unserer Aufgabe nötig, die Gleichungen (8), (9):

$$\Sigma(a+\alpha)^2 - \Sigma(a'+\alpha')^2 = (l+\lambda)(m+\mu), \tag{8}$$

$$\begin{aligned} \sum\left(\frac{da}{du}\right)^2 - \sum\left(\frac{da'}{du}\right)^2 &= \frac{dl}{du}\cdot\frac{dm}{du}, \\ \sum\left(\frac{d\alpha}{dv}\right)^2 - \sum\left(\frac{d\alpha'}{dv}\right)^2 &= \frac{d\lambda}{dv}\cdot\frac{d\mu}{dv}, \end{aligned} \tag{9}$$

auf solche Weise zu lösen, daß die Funktionen $a', \alpha', b', \beta', c', \gamma', m, \mu$ von t abhängig seien, nicht aber $a, \alpha, b, \beta, c, \gamma, l, \lambda$. Da wir gesehen haben, daß l, m, λ, μ mit den übrigen Funktionen durch keine lineare Relationen verbunden sind, so sind nur folgende Arten von Relationen zwischen diesen übrigen Funktionen möglich:

$$\begin{aligned} &1)\ a=0,\ a'=0; \qquad 2)\ \alpha=0,\ \alpha'=0, \\ &3)\ a=h^{-1}a',\ \alpha=h\alpha'; \qquad 4)\ a+\alpha=a'+\alpha'+k, \end{aligned}$$

wobei h, k von t abhängen.

Setzen wir diese Relationen in (8), (9) ein, so ergibt eine einfache Untersuchung, auf die wir hier nicht eingehen wollen, daß unsere Aufgabe nur dreierlei Lösungen zuläßt. Es sind die folgenden:

$$a=a'=0,\quad b=b'=0,\quad \gamma=\gamma'=0,\quad \lambda=\mu=0. \tag{A}$$

Hier nehmen Gl. (8), (9) die Form an

$$\begin{aligned} \alpha^2+\beta^2+c^2 &= \alpha'^2+\beta'^2+c'^2+lm, \\ \left(\frac{dc}{du}\right)^2 &= \left(\frac{dc'}{du}\right)^2+\frac{dl}{du}\cdot\frac{dm}{du}, \\ \left(\frac{d\alpha}{dv}\right)^2+\left(\frac{d\beta}{dv}\right)^2 &= \left(\frac{d\alpha'}{dv}\right)^2+\left(\frac{d\beta'}{dv}\right)^2. \end{aligned}$$

Die erste Gleichung zerfällt in die beiden anderen:

$$\begin{aligned} c^2 &= c'^2+lm+h, \\ \alpha^2+\beta^2 &= \alpha'^2+\beta'^2-h, \end{aligned}$$

wobei h eine Konstante ist. Verfährt man hier wie in (II, 1) § 12, so bekommt man

$$c' = l\int \sqrt{\left[\frac{d}{du}\left(\frac{c}{l}\right)\right]^2 - h\left[\frac{d}{du}\frac{1}{l}\right]^2}\,du,$$

$$\operatorname{arctg}\frac{\beta'}{\alpha'} = \int \frac{\sqrt{\left(\alpha\frac{d\beta}{dv} - \beta\frac{d\alpha}{dv}\right)^2 + h\left[\left(\frac{d\alpha}{dv}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{dv}\right)^2\right]}}{\alpha^2+\beta^2+h}\,dv.$$

Ersetzen wir hier $\frac{c}{l}$, $\frac{c'}{l}$, $\frac{1}{l}$ durch c, c', l und tragen diese Ausdrücke in (1) ein, so bekommen wir folgende Gleichungen mit dem Biegungsparameter h:

$$\begin{aligned} x &= l\sqrt{\alpha^2+\beta^2+h}\cos\varphi,\\ y &= l\sqrt{\alpha^2+\beta^2+h}\sin\varphi,\\ z &= \int \sqrt{\left(\frac{dc}{du}\right)^2 - h\left(\frac{dl}{du}\right)^2}\,du,\\ \varphi &= \int \frac{\sqrt{\left(\alpha\frac{d\beta}{dv} - \beta\frac{d\alpha}{dv}\right)^2 + h\left[\left(\frac{d\alpha}{dv}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{dv}\right)^2\right]}}{\alpha^2+\beta^2+h}\,dv. \end{aligned} \tag{30}$$

Die Linien $u = \text{const.}$ sind hier der xy-Ebene parallel; es sind Berührungslinien der umgeschriebenen Kegel, deren Spitzen auf der z-Achse liegen. Die Linien $v = \text{const.}$ sind ebene Kurven, deren Ebenen durch die z-Achse hindurchgehen; sie sind Berührungslinien der umgeschriebenen Zylinder, deren Erzeugenden parallel der xy-Ebene verlaufen.

Die Flächen (30) können aus Rotationsflächen erzeugt werden. Hat man eine Rotationsfläche

$$x = l\cos\varphi, \quad y = l\sin\varphi, \quad z = \int \sqrt{\left(\frac{dc}{du}\right)^2 - h\left(\frac{dl}{du}\right)^2}\,du,$$

wobei φ den in (30) angegebenen Wert hat, so braucht man nur die Abstände ihrer Punkte von der Rotationsachse im Verhältnis $\sqrt{\alpha^2+\beta^2+h} : 1$ zu verändern, um die Fläche (29) zu haben.

Diese Flächen sind von mir im Bulletin des Sciences Mathématiques 2. sér., t. 15 ausführlich behandelt worden.

Setzt man in (30) $\alpha = \cos v$, $\beta = \sin v$, so entstehen die bekannten Biegungen von Rotationsflächen. Setzt man aber

$$\alpha = A\cos v, \quad \beta = B\sin v, \quad c = C\sin u, \quad l = \cos u,$$

wobei A, B, C Konstanten bedeuten, so hat man aus (30)

$$\begin{aligned} x &= \cos u\sqrt{A^2\cos^2 v + B^2\sin^2 v + h}\cos\varphi,\\ y &= \cos u\sqrt{A^2\cos^2 v + B^2\sin^2 v + h}\sin\varphi,\\ z &= \int \sqrt{C^2\cos^2 u - h\sin^2 u}\,du,\\ \varphi &= \int \frac{\sqrt{A^2B^2 + h(A^2\sin^2 v + B^2\cos^2 v)}}{A^2\cos^2 v + B^2\sin^2 v + h}\,dv. \end{aligned} \tag{31}$$

Für $h = 0$ haben wir

$$x = A\cos u\cos v, \quad y = B\cos u\sin v, \quad z = C\sin u.$$

Demnach sind (31) Biegungen von Mittelpunktsflächen 2^{ter} Ordnung.

Wir gehen nun zur zweiten Lösung unserer Aufgabe über:

(B) $$a = h^{-1}a', \quad \alpha = h\alpha', \quad b = b' = 0, \quad \gamma = \gamma' = 0, \quad l + \lambda = 1.$$

Die Gleichungen (8), (9) verwandeln sich in

$$a^2(1-h^2) + \alpha^2(1-h^{-2}) + \beta^2 + c^2 = \beta'^2 + c'^2 + m + \mu,$$
$$\left(\frac{d\alpha}{dv}\right)^2(1-h^2) + \left(\frac{dc}{du}\right)^2 = \left(\frac{dc'}{du}\right)^2,$$
$$\left(\frac{d\alpha}{dv}\right)^2(1-h^{-2}) + \left(\frac{d\beta}{dv}\right)^2 = \left(\frac{d\beta'}{dv}\right)^2.$$

Aus den beiden letzten Gleichungen bestimmt man durch Quadraturen c und β', worauf die erste Gleichung $m + \mu$ liefert. Die Gleichungen (1) ergeben dann

$$x = ah + \alpha h^{-1},$$

(32)
$$y = \int \sqrt{\left(\frac{d\beta}{dv}\right)^2 + (1+h^{-2})\left(\frac{d\alpha}{dv}\right)^2}\, dv,$$
$$z = \int \sqrt{\left(\frac{dc}{du}\right)^2 + (1-h^2)\left(\frac{da}{du}\right)^2}\, du.$$

Diese Gleichungen stellen aufeinander abwickelbare Translationsflächen dar, mit dem Biegungsparameter h. Dieser Fall kann als Grenzfall des vorangehenden betrachtet werden, der entsteht, wenn wir in (30) die z-Achse ins Unendliche rücken lassen, wie das in meinem oben zitierten Aufsatze im Bulletin des Sciences Mathématiques gezeigt worden ist. Das konjugierte System (u, v) besteht hier aus zwei Scharen von zylindrischen Linien, die parallel zu den xy- und xz-Ebenen verlaufen.

Die dritte Lösung entspricht den Voraussetzungen

(C) $$a = h^{-1}a', \ \alpha = h\alpha', \ b = h^{-1}b', \ \beta = h\beta', \ c = h^{-1}c', \ \gamma = h\gamma', \ l + \lambda = 1.$$

Hier erhalten (8), (9) die Form

$$(a^2 + b^2 + c^2)(1-h^2) + (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)(1-h^{-2}) = m + \mu,$$
$$\left(\frac{d\alpha}{du}\right)^2 + \left(\frac{db}{du}\right)^2 + \left(\frac{dc}{du}\right)^2 = 0,$$
$$\left(\frac{d\alpha}{dv}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{dv}\right)^2 + \left(\frac{d\gamma}{dv}\right)^2 = 0,$$

Die beiden letzten Gleichungen zeigen, daß die Linien $u = \text{const.}$ und $v = \text{const.}$ Minimalkurven sind; da sie ein konjugiertes System bilden,

so sind die dieser Lösung entsprechenden Flächen Minimalflächen. Um reelle Flächen zu haben, müssen wir u und v konjugiert imaginär nehmen, für a, b, c und α, β, γ drei Paare konjugierter Funktionen dieser Veränderlichen wählen und $h = e^{ik}$ bei reellem k setzen. Dann geben (1) die Gleichungen von aufeinander abwickelbaren Minimalflächen

$$(33) \qquad x = e^{ik}a + e^{-ik}\alpha, \quad y = e^{ik}b + e^{-ik}\beta, \quad z = e^{ik}c + e^{-ik}\gamma,$$

mit k als Biegungsparameter.

Die Fälle (A), (B), (C) sind, abgesehen von Kegeln und Zylindern, die einzigen, bei denen eine kontinuierliche Biegung von P-Flächen in andere P-Flächen möglich ist. Dieselben sind bereits 1866 von Peterson angegeben worden.

Zur Theorie des relativbiquadratischen Zahlkörpers.*)

Von

Stephan Bochniček in Agram (Kroatien).

In W. Lietzmanns Inaugural-Dissertation: „Über das biquadratische Reziprozitätsgesetz in algebraischen Zahlkörpern“ (Göttingen 1904) befinden sich Sätze, die einen Teil des Beweises des biquadratischen Reziprozitätsgesetzes in algebraischen Zahlkörpern ausmachen. Wir knüpfen an diese Dissertation an.

Im ersten Teile der vorliegenden Arbeit soll als Grundkörper k ein beliebiger Oberkörper des durch die Einheitswurzel $i = \sqrt{-1}$ definierten Körpers $k(i)$ mit ungerader Klassenzahl genommen und für ihn die Sätze über die primären Primideale und das spezielle biquadratische Reziprozitätsgesetz in der Gestalt

$$\left(\left(\frac{\pi}{\tau}\right)\right) = \left(\left(\frac{\varrho}{\mathfrak{p}}\right)\right)^n \quad (n = 1 \text{ oder } 3)$$

allgemein bewiesen werden.

Im zweiten Teile wird dann angenommen, daß für den Körper k auch das Gesetz

$$\left(\left(\frac{\pi}{\tau}\right)\right) = \left(\left(\frac{\varrho}{\mathfrak{p}}\right)\right)$$

als richtig nachgewiesen sei, und auf Grund dieser Annahme das allgemeine biquadratische Reziprozitätsgesetz in Hilbertscher Fassung für den Körper k bewiesen.

I. Teil.

§ 1.

Die Relativdiskriminante des Körpers $K(\sqrt[4]{\mu})$.

Es sei k ein beliebiger Oberkörper des Körpers $k(i)$ und μ eine ganze Zahl in k, die nicht das Quadrat einer ganzen Zahl desselben Körpers k ist.

*) Kroatisch erschienen in den Sitzungsberichten der Südslavischen Akademie der Wissenschaften und Künste in Agram, Bd. 163.

Bezeichnet man mit $D_{\sqrt[4]{\mu},k}$ die Relativdiskriminante des Körpers $K(\sqrt[4]{\mu}, k)$ in bezug auf k, ferner mit $D_{\sqrt[4]{\mu},\sqrt{\mu}}$ die Relativdiskriminante des Körpers $K(\sqrt[4]{\mu})$ bezüglich $K(\sqrt{\mu}, k)$ und schließlich mit $D_{\sqrt{\mu},k}$ die Relativdiskriminante von $K(\sqrt{\mu})$ in bezug auf k, so gilt die Beziehung

$$D_{\sqrt[4]{\mu},k} = D^2_{\sqrt{\mu},k} N_{\sqrt{\mu},k}\left(D_{\sqrt[4]{\mu},\sqrt{\mu}}\right), \tag{1}$$

wobei unter $N_{\sqrt{\mu},k}$ die Norm in $K(\sqrt{\mu})$ genommen in bezug auf k zu verstehen ist.

Demzufolge enthält $D_{\sqrt[4]{\mu},k}$ nur diejenigen Primideale des Körpers k als Faktoren, welche in mindestens einer der Zahlen

$$D_{\sqrt{\mu},k},\ N_{\sqrt{\mu},k}\left(D_{\sqrt[4]{\mu},\sqrt{\mu}}\right)$$

aufgehen. Es kann leicht gezeigt werden, daß jeder Primfaktor des Körpers k, welcher in $D_{\sqrt{\mu},k}$ aufgeht, auch in $N_{\sqrt{\mu},k}\left(D_{\sqrt[4]{\mu},\sqrt{\mu}}\right)$ aufgehen muß. Durch solche Primideale müssen jedoch noch nicht sämtliche Primfaktoren von $D_{\sqrt[4]{\mu},k}$ erschöpft sein; es kann vorkommen, daß $D_{\sqrt[4]{\mu},k}$ auch solche Primfaktoren enthält, welche nicht in $D_{\sqrt{\mu},k}$, wohl aber in

$$N_{\sqrt{\mu},k}\left(D_{\sqrt[4]{\mu},\sqrt{\mu}}\right)$$

aufgehen.

Über diejenigen Primideale $\mathfrak{p}$, die zu $1+i$ prim und in $D_{\sqrt[4]{\mu},k}$ als Faktoren enthalten sind, vergleiche man Satz 5 der Lietzmannschen Dissertation.

Über diejenigen Primideale, die in $1+i$ aufgehen, wollen wir folgenden Satz beweisen:

Satz 1. Es sei $\mathfrak{l}$ ein in $1+i$ genau zur l^{ten} Potenz aufgehendes Primideal des Körpers k; es sei ferner μ eine genau durch die a^{te} Potenz von $\mathfrak{l}$ teilbare ganze Zahl in k, die nicht das Quadrat einer ganzen Zahl desselben Körpers k ist; schließlich sei $\bar{\mathfrak{l}}$ ein in $\mathfrak{l}$ aufgehendes Primideal des Körpers $K(\sqrt{\mu})$; so ist die Relativdiskriminante $D_{\sqrt[4]{\mu},k}$ dann und nur dann prim zu $\mathfrak{l}$, wenn die Beziehungen

$$\mu \equiv \alpha^2, \quad (\mathfrak{l}^{4l+a}), \tag{2}$$

$$\sqrt{\mu} \equiv \bar{\alpha}^2, \quad \left(\bar{\mathfrak{l}}^{4l+\frac{a}{2}}\right) \tag{2*}$$

statthaben, wobei α eine ganze Zahl in k, $\bar{\alpha}$ eine ganze Zahl in $K(\sqrt{\mu})$ bedeutet und a eine gerade positive ganze rationale Zahl ist, die sich durch 4 teilbar erweisen wird.

Ist $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{l}}\right) = +1$, so ist dazu notwendig und hinreichend, daß μ dem

Biquadrate einer ganzen Zahl in k nach dem Modul $\mathfrak{l}^{6l+a}$ kongruent werde; ist hingegen $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{l}}\right) = -1$, so ist dazu notwendig, daß μ dem Biquadrate einer ganzen Zahl in k nach dem Modul $\mathfrak{l}^{4l+a}$ kongruent werde; diese Bedingung ist jedoch nicht ausreichend und wir werden später (man vergleiche hierzu Satz 22) auch eine solche aufstellen.

Beweis. Die Beziehungen (2) und (2*) folgen sofort aus der Theorie des relativquadratischen Zahlkörpers, wenn man die Gleichung (1) beachtet.

Nun sei weiter $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{l}}\right) = +1$: dann zerfällt das Primideal $\mathfrak{l}$ im Körper $K(\sqrt{\mu})$ in zwei voneinander verschiedene Primideale $\bar{\mathfrak{l}}$, $S\bar{\mathfrak{l}}$ nach der Gleichung

$$\mathfrak{l} = \bar{\mathfrak{l}} \cdot S\bar{\mathfrak{l}},$$

wobei unter S die Substitution $S = (\sqrt{\mu} : -\sqrt{\mu})$ zu verstehen ist. Aus (2*) ergibt sich leicht die Gleichung

$$\mu \equiv \bar{\alpha}^4, \quad (\bar{\mathfrak{l}}^{6l+a}). \tag{3}$$

Wir beachten jetzt die Beziehung

$$n_{\sqrt{\mu}}(\bar{\mathfrak{l}}^e) = n(\mathfrak{l}^e),$$

wo e eine beliebige positive ganze rationale Zahl bedeutet und unter $n_{\sqrt{\mu}}$ die Norm genommen in $K(\sqrt{\mu})$, unter n die Norm genommen in k zu verstehen ist. Dieser Beziehung zufolge ist die Anzahl der untereinander inkongruenten Reste des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ bezüglich des Moduls $\bar{\mathfrak{l}}^e$ genau gleich der Anzahl der untereinander inkongruenten Reste des Körpers k in bezug auf den Modul $\mathfrak{l}^e$. Es sind aber zwei untereinander nach dem Modul $\mathfrak{l}^e$ inkongruente ganze Zahlen α, β des Körpers k auch nach $\bar{\mathfrak{l}}^e$ inkongruent, denn wäre

$$\alpha \equiv \beta, \quad (\bar{\mathfrak{l}}^e),$$

so würde hieraus weiter folgen, daß auch

$$\alpha \equiv \beta, \quad (S\bar{\mathfrak{l}}^e)$$

sein muß, und es müßte dann, weil $\bar{\mathfrak{l}}^e$ und $S\bar{\mathfrak{l}}^e$ relativ prime Ideale sind, auch $\alpha \equiv \beta$ nach $\mathfrak{l}^e$ sein. Da auch umgekehrt zwei untereinander nach dem Modul $\bar{\mathfrak{l}}^e$ inkongruente ganze Zahlen α, β des Körpers k gewiß auch nach $\mathfrak{l}^e$ inkongruent sind, so kann jede ganze Zahl $\bar{\alpha}$ des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ einer ganzen Zahl α des Körpers k nach $\bar{\mathfrak{l}}^e$ kongruent gesetzt werden. Tun wir dies insbesondere in der Kongruenz (3), indem wir

$$\bar{\alpha} \equiv \alpha, \quad (\bar{\mathfrak{l}}^{6l+a})$$

annehmen, so ergibt sich

$$\mu \equiv \alpha^4, \quad (\mathfrak{l}^{4l+a})$$

und hieraus

$$\mu \equiv \alpha^4, \quad (S\mathfrak{l}^{4l+a});$$

beides zusammengenommen liefert den Beweis für die Behauptung des Satzes 1.

Die Umkehrung ergibt sich wie bei Lietzmann, pag. 16.

Nun sei weiter $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{l}}\right) = -1$, so bleibt $\mathfrak{l}$ in $K(\sqrt{\mu})$ unzerlegt. Wir schreiben (2*) folgendermaßen

$$\sqrt{\mu} \equiv \left(\frac{\varrho + \sigma\sqrt{\mu}}{\tau}\right)^2, \quad \left(\mathfrak{l}^{4l+\frac{a}{2}}\right), \tag{4}$$

wobei $\frac{\varrho+\sigma\sqrt{\mu}}{\tau}$ eine ganze Zahl in $K(\sqrt{\mu})$, ϱ, σ, τ ganze Zahlen in k sein sollen. Es sei das Primideal $\mathfrak{l}$ in den Zahlen ϱ, σ, τ der Reihe nach genau zur r^{ten}, s^{ten}, t^{ten} Potenz enthalten. Da $\frac{\varrho+\sigma\sqrt{\mu}}{\tau}$ eine ganze Zahl sein soll, so muß es auch $\frac{\varrho-\sigma\sqrt{\mu}}{\tau}$ sein, folglich auch ihre Summe $\frac{2\varrho}{\tau}$ und ihre Differenz $\frac{2\sigma\sqrt{\mu}}{\tau}$. Hieraus ist zu entnehmen, daß

$$r + 2l \geqq t, \quad s + \frac{a}{2} + 2l \geqq t \tag{5}$$

sein muß.

Weiter muß $N_{\sqrt{\mu},k}\left(\frac{\varrho+\sigma\sqrt{\mu}}{\tau}\right) = \frac{\varrho^2-\sigma^2\mu}{\tau^2}$ eine ganze Zahl sein, woraus wegen (4) die Beziehung

$$\varrho^2 - \sigma^2\mu \equiv 0, \quad \left(\mathfrak{l}^{2l+\frac{a}{2}}\right) \tag{6}$$

folgt. Nun folgern wir aus (4) die Kongruenz

$$-\sqrt{\mu} \equiv \left(\frac{\varrho-\sigma\sqrt{\mu}}{\tau}\right)^2, \quad \left(\mathfrak{l}^{4l+\frac{a}{2}}\right). \tag{7}$$

Addiert man (7) zu (4), so ergibt sich

$$\frac{\varrho^2+\sigma^2\mu}{\tau^2} \equiv 0, \quad \left(\mathfrak{l}^{2l+\frac{a}{2}}\right);$$

somit muß

$$\varrho^2 + \sigma^2\mu \equiv 0, \quad \left(\mathfrak{l}^{2l+\frac{a}{2}+2t}\right) \tag{8}$$

sein, woraus wir weiter die folgende Kongruenz ableiten:

$$\varrho^2 - \sigma^2\mu \equiv -2\sigma^2\mu, \quad \left(\mathfrak{l}^{2l+\frac{a}{2}+2t}\right).$$

Vergleicht man diese Kongruenz mit (6), so ersieht man unmittelbar, daß

$$s = t - \frac{a}{4} - l \tag{9}$$

sein muß. In ähnlicher Weise schließen wir, indem wir (8) auf die Form

$$\sigma^2\mu - \varrho^2 \equiv -2\varrho^2, \quad \left(\mathfrak{l}^{2l+\frac{a}{2}+2l}\right)$$

bringen, durch Vergleichung mit (6), daß

$$r = t + \frac{a}{4} - l \tag{10}$$

ist.

Nachdem die Beziehungen (9) und (10) festgestellt sind, leiten wir aus (2) die Kongruenz

$$\sqrt{\mu} \equiv \alpha, \quad \left(\mathfrak{l}^{2l+\frac{a}{2}}\right)$$

ab und überzeugen uns leicht von der Richtigkeit der folgenden Kongruenz:

$$\sqrt{\mu} \equiv \left(\frac{\varrho+\sigma\alpha}{\tau}\right)^2, \quad \left(\mathfrak{l}^{2l+\frac{a}{2}}\right).$$

Bestimmen wir nun eine ganze Zahl β in k, so daß

$$\frac{\varrho+\sigma\alpha}{\tau} \equiv \beta, \quad \left(\mathfrak{l}^{2l+\frac{a}{2}}\right)$$

wird, was hier möglich ist, so können wir die Beziehung

$$\sqrt{\mu} \equiv \beta^2, \quad \left(\mathfrak{l}^{2l+\frac{a}{2}}\right)$$

aufschreiben. Da aber auch

$$-\sqrt{\mu} \equiv \beta^2, \quad \left(\mathfrak{l}^{2l+\frac{a}{2}}\right)$$

sein muß, so ergibt sich schließlich

$$\mu \equiv \beta^4, \quad (\mathfrak{l}^{4l+a}), \tag{11}$$

wie Satz 1 behauptet.

Umgekehrt kann aber nicht geschlossen werden, daß aus (11) die Kongruenzen (2) und (2*) folgen, es kann vielmehr vorkommen, daß die Kongruenzen (2) und (2*) nicht erfüllt werden können, obwohl die Beziehung (11) statthat. So sind beispielsweise im Körper der imaginären Zahlen $k(i)$ die Zahlen $1+4i$ und -3 beide kongruent 1 nach 4. Im Körper $K(\sqrt{1+4i})$ besteht die Beziehung

$$\sqrt{1+4i} \equiv \left(\frac{1-i\sqrt{1+4i}}{1+i}\right)^2, \quad (4);$$

folglich ist die Relativdiskriminante $D_{\sqrt[4]{1+4i},\,k(i)}$ prim zu $1+i$. Die Relativdiskriminante $D_{\sqrt[4]{-3},\,k(i)}$ ist hingegen teilbar durch $1+i$. In der Tat ist die ganze Zahl

$$A = \frac{2+i+(1+i)\sqrt[4]{-3}+\sqrt{-3}}{2}$$

des Körpers $K(\sqrt[4]{-3})$ nicht mehr teilbar durch $1+i$, ihre Norm $N_{\sqrt[4]{-3},\,k(i)}(A)$ jedoch genau durch 2 teilbar, woraus zu folgern ist, daß das Primideal $1+i$ des Körpers $k(i)$, welches in $K(\sqrt{-3})$ unzerlegt bleibt, im Körper $K(\sqrt[4]{-3})$ das Quadrat eines Primideals wird, weil es wegen $\left(\frac{-3}{1+i}\right) = -1$ nicht in zwei voneinander verschiedene Primideale des Körpers $K(\sqrt[4]{-3})$ zerfallen kann.

Wir wollen hier nun noch den folgenden Satz über die Relativdiskriminante $D_{\sqrt[4]{\mu},\,k}$ ableiten:

Satz 2. Es seien μ, μ^* zwei beliebige ganze Zahlen des Körpers k, die nicht dem Quadrate ganzer Zahlen desselben Körpers k gleich sind, und es sei das in $1+i$ aufgehende Primideal $\mathfrak{l}$ des Körpers k in den Zahlen μ, μ^* genau in der a^{ten} Potenz enthalten. Besteht dann die Beziehung

$$\mu \equiv \mu^*, \quad (\mathfrak{l}^{6l+a}), \tag{12}$$

so sind die Relativdiskriminanten $D_{\sqrt[4]{\mu},\,k}$, $D_{\sqrt[4]{\mu^*},\,k}$ entweder beide zugleich prim zu $\mathfrak{l}$ oder beide zugleich durch $\mathfrak{l}$ teilbar.

Beweis. Es sei die Relativdiskriminante $D_{\sqrt[4]{\mu},\,k}$ zu $\mathfrak{l}$ prim. Soll jetzt bewiesen werden, daß auch die Relativdiskriminante $D_{\sqrt[4]{\mu^*},\,k}$ zu $\mathfrak{l}$ prim sein muß, so genügt es zu zeigen, daß die Relativdiskriminante $D_{\sqrt[4]{\mu\mu^*},\,k}$ zu $\mathfrak{l}$ prim ist, weil der Körper, der durch Zusammensetzung der Körper $K(\sqrt[4]{\mu})$ und $K(\sqrt[4]{\mu^*})$ entsteht, mit dem Körper, der sich durch Zusammensetzung von $K(\sqrt[4]{\mu})$ mit $K(\sqrt[4]{\mu\mu^*})$ ergibt, identisch ist.

Es sei ferner $\bar{\mathfrak{l}}$ ein Primfaktor von $\mathfrak{l}$ im Körper $K(\sqrt{\mu\mu^*})$; es gibt dann in diesem Körper $K(\sqrt{\mu\mu^*})$ eine Zahl $\bar{\alpha}$, so daß

$$\mu \equiv \bar{\alpha}^2, \quad (\bar{\mathfrak{l}}^{4l+a}) \tag{13}$$

wird, weil die Relativdiskriminante desjenigen Körpers, der durch Zusammensetzung der Körper $K(\sqrt{\mu\mu^*})$ und $K(\sqrt{\mu})$ entsteht, in bezug auf den Körper $K(\sqrt{\mu\mu^*})$ zu $\bar{\mathfrak{l}}$ prim ist. Nach Voraussetzung (12) ist aber

$$\mu\mu^* \equiv \mu^2, \quad (\bar{\mathfrak{l}}^{6l+2a});$$

daher muß

$$(\sqrt{\mu\mu^*} + \mu)(\sqrt{\mu\mu^*} - \mu) \equiv 0, \quad (\mathfrak{l}^{6l+2a})$$

sein. Folglich ist entweder

$$\sqrt{\mu\mu^*} + \mu \equiv 0, \quad (\mathfrak{l}^{4l+a}),$$

oder

$$\sqrt{\mu\mu^*} - \mu \equiv 0, \quad (\mathfrak{l}^{4l+a}).$$

Es gibt daher, wie man mit Hilfe von (13) schließt, eine Zahl $\bar{\beta}$ in $K(\sqrt{\mu\mu^*})$, so daß

$$\sqrt{\mu\mu^*} \equiv \bar{\beta}^2, \quad (\mathfrak{l}^{4l+a})$$

wird, d. h. die Relativdiskriminante $D_{\sqrt{\mu\mu^*},k}$ ist zu $\mathfrak{l}$ prim, w. z. b. w.

Da auch umgekehrt in derselben Weise folgt, daß die Relativdiskriminante $D_{\sqrt{\mu},k}$ zu $\mathfrak{l}$ prim sein muß, wenn es $D_{\sqrt{\mu^*},k}$ ist, so ist damit Satz 2 bewiesen.

§ 2.

Die Zerlegung der Primideale des Körpers k im Körper $K(\sqrt[4]{\mu})$.

Betreffs der Zerlegung der Primideale des Körpers k im Körper $K(\sqrt[4]{\mu})$ verweisen wir auf die Lietzmannsche Dissertation. Es möge jedoch darauf hingewiesen werden, daß im Falle $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{l}}\right) = -1$ die Beziehung $\left(\frac{\sqrt{\mu}}{\mathfrak{l}}\right)_{\sqrt{\mu}} = -1$ möglich ist, so daß das Primideal $\mathfrak{l}$ in $K(\sqrt[4]{\mu})$ unzerlegt bleibt.

Das Symbol $\left(\left(\frac{\mu}{\mathfrak{l}}\right)\right)$ ist folgendermaßen zu definieren:

Definition 1. Es sei μ eine ganze Zahl des Körpers k, die nicht das Quadrat einer Zahl in k ist, und $\mathfrak{l}$ ein in $1+i$ zur l^{ten}, in μ zur a^{ten} Potenz aufgehendes Primideal in k. Dann soll $\left(\left(\frac{\mu}{\mathfrak{l}}\right)\right) = 0$ sein, wenn die Relativdiskriminante $D_{\sqrt{\mu},k}$ durch $\mathfrak{l}$ teilbar ist; ferner sei $\left(\left(\frac{\mu}{\mathfrak{l}}\right)\right) = +1$, wenn μ dem Biquadrate einer ganzen Zahl in k nach dem Modul $\mathfrak{l}^{6l+a+1}$ kongruent ist, und $\left(\left(\frac{\mu}{\mathfrak{l}}\right)\right) = -1$, wenn μ dem Biquadrate einer ganzen Zahl in k nach $\mathfrak{l}^{6l+a}$, aber nicht mehr nach $\mathfrak{l}^{6l+a+1}$ kongruent ausfällt; schließlich $\left(\left(\frac{\mu}{\mathfrak{l}}\right)\right) = \pm i$, wenn $\left(\left(\frac{\mu}{\mathfrak{l}}\right)\right) \neq 0$ und $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{l}}\right) = -1$ ist.

Bei Anwendung dieser Definition gilt für die Zerlegung der Primideale des Körpers k Satz 10 der Lietzmannschen Dissertation; ebenso Satz 11.

§ 3.

Der Begriff des biquadratischen Normenrestes und das biquadratische Normenrestsymbol.

Hinsichtlich dieser Begriffe vergleiche man § 6 und § 7 der Lietzmannschen Dissertation.

§ 4.

Die relativen Grundeinheiten des Körpers $K(\sqrt[4]{\mu})$ in bezug auf den Körper $K(\sqrt{\mu})$.

Der Körper k vom Grade $2m$ sei nebst seinen konjugierten Körpern $k', \cdots, k^{(2m-1)}$ imaginär. Wir beweisen folgenden Satz:

Satz 3. Das System der relativen Grundeinheiten des Körpers $K(\sqrt[4]{\mu})$ in bezug auf den Körper $K(\sqrt{\mu})$ läßt sich stets in der Gestalt

$$\mathsf{H}_1,\ S\mathsf{H}_1,\ \cdots,\ \mathsf{H}_m,\ S\mathsf{H}_m$$

darstellen, wo $\mathsf{H}_1, \cdots, \mathsf{H}_m$ gewisse Einheiten in $K(\sqrt[4]{\mu})$ sind, und S die Substitution $(\sqrt[4]{\mu} : i\sqrt[4]{\mu})$ bedeutet.

Beweis. Es sei $\bar{\varepsilon}_1, \cdots, \bar{\varepsilon}_{2m-1}$ ein System von Grundeinheiten des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ und E_1 eine solche Einheit in $K(\sqrt[4]{\mu})$, daß das System $\mathsf{E}_1, \bar{\varepsilon}_1, \cdots, \bar{\varepsilon}_{2m-1}$ ein System von unabhängigen Einheiten vorstellt; dann müssen auch die Einheiten $\mathsf{E}_1, S\mathsf{E}_1, \bar{\varepsilon}_1, \cdots, \bar{\varepsilon}_{2m-1}$ ein System von unabhängigen Einheiten darstellen. Wir machen die gegenteilige Annahme und denken uns $\mathsf{E}_1^{a_1+b_1S} = \bar{\varepsilon}$, wo a_1, b_1 ganze rationale Zahlen bedeuten, die nicht beide 0 sind, und $\bar{\varepsilon}$ eine Einheit in $K(\sqrt{\mu})$ vorstellt. Beachten wir nun die Identität

$$(a_1 + b_1 S)(a_1 - b_1 S) + b_1^2(1 + S^2) = a_1^2 + b_1^2,$$

in welcher die Summe $a_1^2 + b_1^2$ der gemachten Voraussetzung gemäß nicht verschwinden kann, so folgt hieraus sofort, wenn man beachtet, daß $\mathsf{E}_1^{1+S^2}$ eine Einheit in $K(\sqrt{\mu})$ darstellt, eine Beziehung von der Form

$$\mathsf{E}_1^{a_1^2+b_1^2} = \bar{\varepsilon}^*,$$

wo $\bar{\varepsilon}^*$ eine Einheit in $K(\sqrt{\mu})$ ist, was unserer Annahme zuwiderläuft.

Nunmehr wählen wir eine Einheit E_2 in $K(\sqrt[4]{\mu})$, so daß $\mathsf{E}_2, \mathsf{E}_1, \mathsf{E}_1^S, \bar{\varepsilon}_1, \cdots, \bar{\varepsilon}_{2m-1}$ ein System unabhängiger Einheiten bilden, und beweisen in ähnlicher Weise, daß dann auch die Einheiten $\mathsf{E}_2, \mathsf{E}_2^S, \mathsf{E}_1, \mathsf{E}_1^S, \bar{\varepsilon}_1, \cdots, \bar{\varepsilon}_{2m-1}$ voneinander unabhängig sind. So fortfahrend, gelangen wir zu $4m-1$ Einheiten

$$\mathsf{E}_s,\ \mathsf{E}_s^S,\ \bar{\varepsilon}_1, \cdots, \bar{\varepsilon}_{2m-1} \qquad (s = 1, 2, \cdots, m),$$

die ein System von unabhängigen Einheiten bilden. Die Anzahl der Grundeinheiten in $K(\sqrt{\mu})$ beträgt aber auch $4m-1$, und wir können

auf Grund dessen ebenso wie Hilbert*) (H. A. Z. § 55, Seite 274) zeigen, daß man immer eine Potenz 2^m von 2 finden kann, so daß ein Ausdruck von der Form

$$\mathsf{E}_1^{a_1+b_1 S} \cdots \mathsf{E}_m^{a_m+b_m S}[\theta] \tag{1}$$

nicht anders eine $2^{m\,\text{te}}$ Potenz einer Einheit in $K(\sqrt[4]{\mu})$ werden kann, als wenn die ganzen rationalen Zahlen $a_1, \cdots, a_m, b_1, \cdots, b_m$ sämtlich gerade sind; und ebenso, daß der Ausdruck (1) nicht anders eine $(1-S)^{2m\,\text{te}}$ symbolische Potenz einer Einheit in $K(\sqrt[4]{\mu})$ werden kann, als wenn die ganzen algebraischen Zahlen $a_1+b_1 i, \cdots, a_m+b_m i$ sämtlich durch $1-i$ teilbar sind.

Weiter bilden wir analog wie Hilbert ein System von Einheiten $\mathsf{H}_1, \cdots, \mathsf{H}_m$ folgendermaßen: Es sei e_1 die größte ganze rationale Zahl $\geqq 0$ von der Art, daß ein Ausdruck von der Gestalt (1) eine $(1-S)^{e_1\,\text{te}}$ symbolische Potenz einer Einheit ist, ohne daß sämtliche Zahlen $a_1+b_1 i, \cdots, a_m+b_m i$ durch $1-i$ teilbar sind; wir nehmen an, es sei ein solcher Ausdruck

$$\mathsf{E}_1^{a_1+b_1 S} \cdots \mathsf{E}_m^{a_m+b_m S}[\bar{\varepsilon}] = \mathsf{H}_1^{(1-S)^{e_1}},$$

wo $a_1, \cdots, a_m, b_1, \cdots, b_m$ ganze rationale Zahlen bedeuten und etwa $a_1+b_1 i$ nicht durch $1-i$ teilbar sein möge; $[\bar{\varepsilon}]$ hat die frühere Bedeutung und H_1 ist eine gewisse Einheit des Körpers $K(\sqrt[4]{\mu})$. In ähnlicher Weise bestimmen wir $\mathsf{H}_2, \cdots, \mathsf{H}_m$. Man vergleiche hierzu durchweg H. A. Z. § 55.

Dann bilden die Einheiten $\mathsf{H}_1, S\mathsf{H}_1, \cdots, \mathsf{H}_m, S\mathsf{H}_m$ ein System von relativen Grundeinheiten des Körpers $K(\sqrt[4]{\mu})$ in bezug auf $K(\sqrt{\mu})$. Davon überzeugt man sich leicht, wie bei H. A. Z. § 55. Man hat dabei nur zu beachten, daß $\mathsf{H}_s^{a_s+b_s S}$, wenn $a_s+b_s i$ durch $1-i$ teilbar ist, das Produkt aus einer symbolischen $(1-S)^{\text{ten}}$ Potenz einer Einheit in $K(\sqrt[4]{\mu})$ mit einer Einheit in $K(\sqrt{\mu})$ vorstellt.

Mit Hilfe der eben bestimmten relativen Grundeinheiten $\mathsf{H}_1, S\mathsf{H}_1, \cdots, \mathsf{H}_m, S\mathsf{H}_m$ beweist man nun den folgenden Satz:

Satz 4. Bedeutet $\mathsf{H}_1, S\mathsf{H}_1, \cdots, \mathsf{H}_m, S\mathsf{H}_m$ ein System von relativen Grundeinheiten des Körpers $K(\sqrt[4]{\mu})$ in bezug auf $K(\sqrt{\mu})$, dann gilt für eine beliebige Einheit E in $K(\sqrt[4]{\mu})$ jedesmal eine Gleichung von der Gestalt

$$\mathsf{E}^f = \mathsf{H}_1^{a_1+b_1 S} \cdots \mathsf{H}_1^{a_m+b_m S}[\bar{\varepsilon}], \tag{2}$$

wobei f eine ungerade ganze rationale Zahl ist; $a_1, \cdots, a_m, b_1, \cdots, b_m$ bedeuten gewisse ganze rationale Zahlen und $[\bar{\varepsilon}]$ eine Einheit in $K(\sqrt{\mu})$ oder eine solche Einheit in $K(\sqrt[4]{\mu})$, deren Quadrat in $K(\sqrt{\mu})$ liegt.

*) D. Hilbert: Bericht über die Theorie der algebraischen Zahlkörper. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 1897 (zitiert mit H. A. Z.).

Der Beweis dieses Satzes schließt sich genau an H. A. Z. § 146 an und wir wollen ihn deshalb übergehen.

Im Körper $K(\sqrt[4]{\mu})$ besteht nur dann eine solche Einheit, deren Quadrat in $K(\sqrt{\mu})$ liegt, wenn $\sqrt{\mu}$ von der Gestalt $\bar{\xi}\bar{\alpha}^2$ ist, wobei $\bar{\xi}$ eine Einheit und $\bar{\alpha}$ eine ganze Zahl in $K(\sqrt{\mu})$ ist. In diesem Falle wird man $[\bar{\varepsilon}]$ in der Form

$$[\bar{\varepsilon}] = \bar{\eta}\left(\sqrt{\bar{\xi}}\right)^e$$

darstellen können, wobei $\bar{\eta}$ eine Einheit in $K(\sqrt{\mu})$ bedeutet und e einen der Werte 0 oder 1 vorstellt.

Gleichung (2) wird demnach, wenn $\sqrt{\mu}$ nicht von der Gestalt $\bar{\xi}\bar{\alpha}^2$ ist, die Form

$$\mathsf{E}^f = \mathsf{H}_1^{a_1+b_1 S} \cdots \mathsf{H}_m^{a_m+b_m S}\,\bar{\eta} \tag{3}$$

und, wenn $\sqrt{\mu} = \bar{\xi}\bar{\alpha}^2$ ist, die Form

$$\mathsf{E}^f = \mathsf{H}_1^{a_1+b_1 S} \cdots \mathsf{H}_m^{a_m+b_m S}\,\bar{\eta}\left(\sqrt{\bar{\xi}}\right)^e \tag{3*}$$

annehmen.

Mit Hilfe der Gleichungen (3) und (3*) beweisen wir nun den folgenden Hilfssatz:

Satz 5. Es mögen die obigen Bezeichnungen beibehalten und überdies die Relativnormen $N_{\sqrt[4]{\mu},k}$ der relativen Grundeinheiten des Körpers $K(\sqrt[4]{\mu})$ in bezug auf k, nämlich

$$\eta_1 = N_{\sqrt[4]{\mu},k}(\mathsf{H}_1), \cdots, \eta_m = N_{\sqrt[4]{\mu},k}(\mathsf{H}_m)$$

gebildet werden; dann läßt sich jede Einheit ε in k, welche die Relativnorm $N_{\sqrt[4]{\mu},k}$ einer Einheit E des Körpers $K(\sqrt[4]{\mu})$ ist, in einer der Formen

$$\varepsilon = \eta_1^{u_1} \cdots \eta_m^{u_m}\,[N_{\sqrt{\mu},k}(\bar{\eta})]^2 \tag{4}$$

oder

$$\varepsilon = \eta_1^{u_1} \cdots \eta_m^{u_m}\,[N_{\sqrt{\mu},k}(\bar{\eta})]^2\,(-\bar{\xi}\cdot S\bar{\xi})^e \tag{4*}$$

darstellen, wo die Exponenten $u_1, \cdots, u_m, e$ gewisse Werte 0, 1 haben und $\bar{\eta}$ eine Einheit in $K(\sqrt{\mu})$ bedeutet. Gleichung (4) gilt, wenn $\sqrt{\mu}$ nicht von der Gestalt $\bar{\xi}\bar{\alpha}^2$ ist, und (4*), wenn $\sqrt{\mu}$ die Form $\sqrt{\mu} = \bar{\xi}\bar{\alpha}^2$ besitzt.

Beweis. Um diesen Hilfssatz zu beweisen, bilden wir die Relativnormen $N_{\sqrt[4]{\mu},k}$ auf beiden Seiten der Gleichungen (3) und (3*). Es ergibt sich, wenn $\varepsilon = N_{\sqrt[4]{\mu},k}(\mathsf{E})$ gesetzt wird,

$$\varepsilon^f = \eta_1^{a_1+b_1} \cdots \eta_m^{a_m+b_m}\left[N_{\sqrt{\mu},k}(\bar{\eta})\right]^2 \tag{5}$$

beziehungsweise

$$(5^*) \qquad \varepsilon^f = \eta_1^{a_1+b_1} \cdots \eta_m^{a_m+b_m} \left[N_{\sqrt{\mu},k}(\bar{\eta})\right]^2 (-\bar{\xi}\cdot S\bar{\xi})^e.$$

Hieraus folgen sofort Gleichungen von der Form (4) und (4*), wenn man beachtet, daß $\varepsilon, \eta_1, \cdots, \eta_m$ gewiß auch Relativnormen $N_{\sqrt{\mu},k}$ von Einheiten in $K(\sqrt{\mu})$ darstellen.

Bedeutet nun $\bar{\eta}_1, \cdots, \bar{\eta}_m$ ein System von relativen Grundeinheiten des Körpers $K(\sqrt{\mu})$*) (man sehe H. Rq. Z. § 14), und setzt man

$$\vartheta_1 = N_{\sqrt{\mu},k}(\bar{\eta}_1), \cdots, \vartheta_m = N_{\sqrt{\mu},k}(\bar{\eta}_m),$$

so kann bekanntermaßen jede Einheit ϑ in k, welche der Relativnorm $N_{\sqrt{\mu},k}$ einer Einheit in $K(\sqrt{\mu})$ gleich ist, in der Gestalt

$$\vartheta = \vartheta_1^{v_1} \cdots \vartheta_m^{v_m} N_{\sqrt{\mu},k}([\xi])$$

dargestellt werden, wobei $v_1, \cdots, v_m$ gewisse Werte 0, 1 bedeuten und $[\xi]$ eine Einheit in k vorstellt oder eine solche Einheit in $K(\sqrt{\mu})$, deren Quadrat in k liegt.

Demnach besteht der Satz:

Satz 6. Es seien $\mathsf{H}_1, S\mathsf{H}_1, \cdots, \mathsf{H}_m, S\mathsf{H}_m$ relative Grundeinheiten des Körpers $K(\sqrt[4]{\mu})$ in bezug auf $K(\sqrt{\mu})$, ferner $\bar{\eta}_1, \cdots, \bar{\eta}_m$ relative Grundeinheiten des Körpers $K(\sqrt{\mu})$. Setzen wir dann

$$\eta_1 = N_{\sqrt[4]{\mu},k}(\mathsf{H}_1), \cdots, \eta_m = N_{\sqrt[4]{\mu},k}(\mathsf{H}_m);$$
$$\vartheta_1 = N_{\sqrt{\mu},k}(\bar{\eta}_1), \cdots, \vartheta_m = N_{\sqrt{\mu},k}(\bar{\eta}_m),$$

so kann jede Einheit ε in k, welche die Relativnorm $N_{\sqrt[4]{\mu},k}$ von einer Einheit in $K(\sqrt[4]{\mu})$ ist, in einer der Formen

$$\varepsilon = \eta_1^{u_1} \cdots \eta_m^{u_m} \vartheta_1^{2v_1} \cdots \vartheta_m^{2v_m} \left\{N_{\sqrt{\mu},k}([\xi])\right\}^2$$

oder

$$\varepsilon = \eta_1^{u_1} \cdots \eta_m^{u_m} \vartheta_1^{2v_1} \cdots \vartheta_m^{2v_m} \left\{N_{\sqrt{\mu},k}([\xi])\right\}^2 (-\bar{\xi}\cdot S\bar{\xi})^e$$

dargestellt werden. Hierbei haben die Exponenten $u_1, \cdots, u_m, v_1, \cdots, v_m, e$ gewisse Werte 0, 1; $[\xi]$ und $\bar{\xi}$ haben dieselbe Bedeutung wie oben. Die erstere dieser Gleichungen gilt, wenn $\sqrt{\mu}$ nicht von der Gestalt $\bar{\xi}\bar{\alpha}^2$ ist, die letztere hingegen, wenn $\sqrt{\mu} = \bar{\xi}\bar{\alpha}^2$ ist.

---

*) D. Hilbert: Über die Theorie des relativquadratischen Zahlkörpers. Mathem. Annalen Bd. 51 (zitiert mit H. Rq. Z.).

§ 5.

Die ambigen Komplexe des Körpers $K(\sqrt[4]{\mu})$.

Bedeutet ε eine beliebige Einheit in k, so soll das System von Einheiten, welches aus dem Produkte $\varepsilon\xi^2$ entsteht, wenn ξ alle Einheiten des Körpers k durchläuft, ein *quadratischer Einheitenverband*, hingegen das System von Einheiten, welches aus $\varepsilon\xi^4$ entsteht, wenn ξ wieder alle Einheiten des Körpers k durchläuft, ein *biquadratischer Einheitenverband* genannt werden.

Wir machen nun für die Folge über den Körper k vom Grade $2m$, der nebst seinen konjugierten Körpern $k', \cdots, k^{(2m-1)}$ imaginär ist, noch die Annahme, *die Klassenzahl h sei im Körper k ungerade.*

Indem wir dann den Begriff der ambigen Idealklasse und des ambigen Komplexes wie bei Lietzmann (L. § 9) fassen, wollen wir zunächst den folgenden Satz beweisen:

Satz 7. Es sei die Anzahl der verschiedenen Primideale des Körpers k, welche in der Relativdiskriminante $D_{\sqrt[4]{\mu},k}$ des Körpers $K(\sqrt[4]{\mu})$ aufgehen, gleich $t_1 + t_2$, und es seien hiervon genau t_1 in der Relativdiskriminante $D_{\sqrt{\mu},k}$ des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ als Faktoren enthalten; ferner mögen diejenigen Einheiten in k, welche Relativnormen $N_{\sqrt[4]{\mu},k}$ von Einheiten in $K(\sqrt[4]{\mu})$ sind, 2^{κ^*} verschiedene biquadratische Einheitenverbände bilden: dann gilt, wenn wir die Anzahl aller ambigen Komplexe in $K(\sqrt[4]{\mu})$, die aus ambigen Idealen entspringen, mit 4^{a^*} bezeichnen und

$$t = t_1 + \frac{t_2}{2}, \qquad v^* = \frac{w^*}{2}$$

setzen, für a^* die Beziehung

$$a^* < t + v^* - m - 1.$$

Beweis. Wir nehmen zunächst an, daß die Zahl μ, die den Körper $K(\sqrt[4]{\mu})$ bestimmt, nicht das Produkt einer Einheit in k mit dem *Quadrate* einer Zahl in k ist.

Darnach gilt für jede Einheit ε in k, welche Relativnorm $N_{\sqrt[4]{\mu},k}$ einer Einheit in $K(\sqrt[4]{\mu})$ ist, nach Hilfssatz 6 eine Gleichung von der Form

$$\varepsilon = \eta_1^{u_1} \cdots \eta_m^{u_m} \vartheta_1^{2v_1} \cdots \vartheta_m^{2v_m} \zeta^4,$$

wo ζ eine Einheit in k und die Bedeutung der übrigen Größen aus Hilfssatz 6 zu ersehen ist.

Unter den Einheiten $\vartheta_1, \cdots, \vartheta_m$ wird es eine bestimmte Maximalanzahl v_2^* voneinander quadratisch unabhängiger geben, es seien dies etwa $\vartheta_1, \cdots, \vartheta_{v_2^*}$, so daß keine Relation von der Gestalt

$$\vartheta_1^{a_1} \cdots \vartheta_{v_2^*}^{a_{v_2^*}} = \zeta^2$$

stattfinden kann, wenn man unter ζ eine Einheit in k versteht und den Exponenten $a_1, \cdots, a_{v_2^*}$ beliebige Werte 0, 1 erteilt, außer es sind sämtliche Exponenten $a_1, \cdots, a_{v_2^*}$ gleich Null.

Dann kann jede Einheit ϑ in k, welche Relativnorm $N_{\sqrt{\mu},k}$ einer Einheit in $K(\sqrt{\mu})$ ist, eindeutig in die Form

$$\vartheta = \vartheta_1^{a_1} \cdots \vartheta_{v_2^*}^{a_{v_2^*}} \zeta^2$$

gebracht werden, wo ζ eine bestimmte Einheit in k ist und die Exponenten $a_1, \cdots, a_{v_2^*}$ gewisse Werte 0, 1 haben. Infolgedessen wird man jede Einheit ϑ^2, welche das Quadrat der Relativnorm $N_{\sqrt{\mu},k}$ einer Einheit in $K(\sqrt{\mu})$ ist, eindeutig in der Form

$$\vartheta^2 = \vartheta_1^{2a_1} \cdots \vartheta_{v_2^*}^{2a_{v_2^*}} \zeta^4$$

darstellen können.

Nun nahmen wir an, daß diejenigen Einheiten in k, welche Relativnormen $N_{\sqrt[4]{\mu},k}$ von Einheiten in $K(\sqrt[4]{\mu})$ sind, insgesamt 2^{w^*} biquadratische Einheitenverbände bilden. Demgemäß wird man unter den Einheiten $\eta_1, \cdots, \eta_m$ genau $v_1^* = w^* - v_2^*$ Einheiten bestimmen können, es seien dies etwa $\eta_1, \cdots, \eta_{v_1^*}$, so daß jede Einheit ε in k, welche Relativnorm $N_{\sqrt[4]{\mu},k}$ einer Einheit in $K(\sqrt[4]{\mu})$ ist, auf eine und nur auf eine Weise in der Form

$$\varepsilon = \eta_1^{a_1} \cdots \eta_{v_1^*}^{a_{v_1^*}} \vartheta_1^{2b_1} \cdots \vartheta_{v_2^*}^{2b_{v_2^*}} \zeta^4$$

dargestellt werden kann, wobei die Exponenten $a_1, \cdots, a_{v_1^*}, b_1, \cdots, b_{v_2^*}$ gewisse Werte 0, 1 haben und ζ eine Einheit in k bedeutet.

Wir wenden dies insbesondere auf die Einheiten $\eta_{v_1^*+1}, \cdots, \eta_m$; $\vartheta_{v_2^*+1}, \cdots, \vartheta_m$ an. Es sei

$$\eta_s = \eta_1^{a_1^{(s)}} \cdots \eta_{v_1^*}^{a_{v_1^*}^{(s)}} \vartheta_1^{2b_1^{(s)}} \cdots \vartheta_{v_2^*}^{2b_{v_2^*}^{(s)}} \zeta_s^4,$$
$$(s = v_1^* + 1, \cdots, m);$$
$$\vartheta_u = \vartheta^{a_1^{(u)}} \cdots \vartheta_{v_2^*}^{a_{v_2^*}^{(u)}} \zeta_u^2,$$
$$(u = v_2^* + 1, \cdots, m),$$

wo ζ_s, ζ_u bestimmte Einheiten in k sind und die Exponenten a, b gewisse Werte 0, 1 haben.

Hieraus folgt, daß die $m - v_1^*$ Ausdrücke

$$\mathfrak{H}_s' = \mathfrak{H}_s \mathfrak{H}_1^{-a_1^{(s)}} \cdots \mathfrak{H}_{v_1^*}^{-a_{v_1^*}^{(s)}} \bar{\vartheta}_1^{-b_1^{(s)}} \cdots \bar{\vartheta}_{v_2^*}^{-b_{v_2^*}^{(s)}} \zeta_s^{-1}, \tag{1}$$
$$(s = v_1^* + 1, \cdots, m),$$

Einheiten in $K(\sqrt[4]{\mu})$ vorstellen, deren Relativnorm $N_{\sqrt[4]{\mu},k}$ gleich 1 ist. Ebenso sind die $m - v_2^*$ Ausdrücke

$$\bar{\vartheta}_u' = \bar{\vartheta}_u \bar{\vartheta}_1^{-a_1^{(u)}} \cdots \bar{\vartheta}_{v_2^*}^{-a_{v_2^*}^{(u)}} \zeta_u^{-1}, \tag{2}$$
$$(u = v_2^* + 1, \cdots, m),$$

Einheiten in $K(\sqrt{\mu})$, deren Relativnorm $N_{\sqrt{\mu},k}$ gleich 1 wird.

Somit wird man stets ganze Zahlen M_s, $\bar{\mu}_u$ in $K(\sqrt[4]{\mu})$ beziehungsweise in $K(\sqrt{\mu})$ finden können derart, daß die Gleichungen

$$\mathsf{H}_s' = \mathsf{M}_s^{1-S}, \quad \bar{\vartheta}_u' = \bar{\mu}^{1-S}, \tag{3}$$
$$(s = v_1^* + 1, \cdots, m; \; u = v_2^* + 1, \cdots, m)$$

statthaben. Man vergleiche hierzu H. A. Z., § 54. Die Ideale (M_s), $(\bar{\mu}_u)$ sind dann, ebenso wie $\mathsf{M} = (\sqrt[4]{\mu})$ und $\bar{\mu} = (\sqrt{\mu})$, ambige Hauptideale des Körpers $K(\sqrt[4]{\mu})$.

Nun bezeichnen wir die ambigen Primideale des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ mit $\bar{\mathfrak{d}}_1, \cdots, \bar{\mathfrak{d}}_{t_1}$ und die in diesen Idealen aufgehenden Primideale des Körpers $K(\sqrt[4]{\mu})$ entsprechend mit $\mathfrak{D}_1, \cdots, \mathfrak{D}_{t_1}$. Außer diesen ambigen Primidealen können im Körper $K(\sqrt[4]{\mu})$ im allgemeinen noch solche Primideale vorkommen, deren Quadrate Ideale in k sind. Schließlich kann es in $K(\sqrt[4]{\mu})$ auch noch solche Primideale $\mathfrak{P}$ geben, die zwar nicht ambig sind, deren Produkt aber mit dem relativ konjugierten Ideal $S\mathfrak{P}$ ein ambiges Ideal $\mathfrak{D} = \mathfrak{P} \cdot S\mathfrak{P}$ ergibt. Es mögen unter $\mathfrak{D}_{t_1+1}, \cdots, \mathfrak{D}_{t_1+t_2}$ zum Teile die außer den bereits angeführten in $K(\sqrt[4]{\mu})$ noch vorhandenen ambigen Primideale, zum Teil solche Produkte $\mathfrak{D} = \mathfrak{P} \cdot S\mathfrak{P}$ verstanden werden. Dann wird man die Hauptideale (M), $(\mathsf{M}_{v_1^*+1}), \cdots, (\mathsf{M}_m)$; $(\bar{\mu})$, $(\bar{\mu}_{v_2^*+1}), \cdots, (\bar{\mu}_m)$ stets in der Form

$$(\mathsf{M}) = \mathfrak{D}_1^{a_1} \cdots \mathfrak{D}_{t_1+t_2}^{a_{t_1+t_2}} \bar{\mathfrak{d}}_1^{b_1} \cdots \bar{\mathfrak{d}}_{t_1}^{b_{t_1}} \mathfrak{j}, \tag{4}$$
$$(\mathsf{M}_s) = \mathfrak{D}_1^{a_1^{(s)}} \cdots \mathfrak{D}_{t_1+t_2}^{a_{t_1+t_2}^{(s)}} \bar{\mathfrak{d}}_1^{b_1^{(s)}} \cdots \bar{\mathfrak{d}}_{t_1}^{b_{t_1}^{(s)}} \mathfrak{j}^{(s)};$$

$$\bar{\mu} = \bar{\mathfrak{d}}_1^{c_1} \cdots \bar{\mathfrak{d}}_{t_1}^{c_{t_1}} \mathfrak{j}_1, \tag{5}$$
$$(\bar{\mu}_u) = \bar{\mathfrak{d}}_1^{c_1^{(u)}} \cdots \bar{\mathfrak{d}}_{t_1}^{c_{t_1}^{(u)}} \mathfrak{j}_1^{(u)},$$
$$(s = v_1^* + 1, \cdots, m; \; u = v_2^* + 1, \cdots, m)$$

darstellen können, so daß die Exponenten a, b, c gewisse Werte 0, 1 haben und $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{j}^{(s)}$, $\mathfrak{j}_1$, $\mathfrak{j}_1^{(u)}$ Ideale in k bedeuten.

Wir wollen nun nachweisen, daß diese Relationen voneinander unabhängig sind, d. h. daß keine Beziehung

$$(6)\quad (\mathfrak{M})^{e}(\mathfrak{M}_{v_1^*+1})^{e_{v_1^*+1}}\cdots(\mathfrak{M}_m)^{e_m}(\bar{\mu})^{e'}(\bar{\mu}_{v_2^*+1})^{e'_{v_2^*+1}}\cdots(\bar{\mu}_m)^{e'_m}=\mathfrak{j}^*$$

bestehen kann, wobei die Exponenten $e, e_{v_1^*+1}, \cdots, e_m, e', e'_{v_2^*+1}, \cdots, e'_m$ irgendwelche Werte 0, 1 haben und $\mathfrak{j}^*$ ein Ideal in k ist, außer wenn $e = e_{v_1^*+1} = \cdots = e_m = e' = e'_{v_2^*+1} = \cdots = e'_m = 0$ und $\mathfrak{j}^* = 1$ ist.

Zu diesem Behufe erheben wir (6) in die h^{te} Potenz und erhalten

$$(7)\quad \mathfrak{M}^{eh}\mathfrak{M}_{v_1^*+1}^{e_{v_1^*+1}h}\cdots\mathfrak{M}_m^{e_m h}\bar{\mu}^{e'h}\bar{\mu}_{v_2^*+1}^{e'_{v_2^*+1}h}\cdots\bar{\mu}_m^{e'_m h}=\iota\mathfrak{E},$$

wo ι eine ganze Zahl aus k und $\mathfrak{E}$ eine Einheit aus K ist. Indem wir (7) symbolisch mit $1-S$ potenzieren, erhalten wir

$$(\mathfrak{M}^{1-S})^{eh}(\mathfrak{M}_{v_1^*+1}^{1-S})^{e_{v_1^*+1}h}\cdots(\mathfrak{M}_m^{1-S})^{e_m h}(\bar{\mu}^{1-S})^{e'h}(\bar{\mu}_{v_2^*+1}^{1-S})^{e'_{v_2^*+1}h}\cdots(\bar{\mu}_m^{1-S})^{e'_m h}=\mathfrak{E}^{1-S}$$

oder nach (3)

$$i^{-eh}\mathfrak{H}'^{e_{v_1^*+1}h}_{v_1^*+1}\cdots\mathfrak{H}'^{e_m h}_m(-1)^{e'h}\bar{\vartheta}^{e'_{v_2^*+1}h}_{v_2^*+1}\cdots\bar{\vartheta}^{e'_m h}_m=\mathfrak{E}^{1-S}.$$

Führen wir nun für $\mathfrak{H}'_{v_1^*+1}, \cdots, \mathfrak{H}'_m$ die Werte aus (1) ein und beachten dann die in Satz 3 ausgesprochene Eigenschaft der Einheiten $\mathfrak{H}_1, \cdots, \mathfrak{H}_m$, so erkennen wir sofort, daß die Exponenten $e_{v_1^*+1}, \cdots, e_m$ sämtlich gleich 0 sein müssen. Ebenso überzeugen wir uns, daß auch die Exponenten $e'_{v_2^*+1}, \cdots, e'_m$ sämtlich gleich 0 sein müssen, wenn wir für $\bar{\vartheta}_{v_2^*+1}, \cdots, \bar{\vartheta}_m$ die Werte aus (2) einsetzen und dann die Eigenschaft der relativen Grundeinheiten $\bar{\vartheta}_1, \cdots, \bar{\vartheta}_m$ beachten (man sehe hierzu H. Rq. Z., § 14). Es ist also jetzt noch zu zeigen, daß auch $e = e' = 0$ sein muß. Aus (7) folgt $\mathfrak{M}^{(2e'+e)h} = \iota\mathfrak{E}$, oder wenn man mit 4 potenziert

$$\mu^{(2e'+e)h} = \iota^4\mathfrak{E}^4.$$

Da nun $\mathfrak{E}^4$ eine Einheit in k sein muß, so ergibt sich aus unserer speziellen Voraussetzung über μ, daß $e = e' = 0$ sein muß. Es kann daher keine Relation von der Gestalt (7) bestehen. Dann folgt aber, daß man mit Hilfe der Gleichungen (4) und (5) $2m - w^* + 2$ unter den Idealen $\mathfrak{D}_1, \cdots, \mathfrak{D}_{t_1+t_2}, \bar{\mathfrak{d}}_1, \cdots, \bar{\mathfrak{d}}_{t_1}$ — es seien dazu etwa $\mathfrak{D}_1, \cdots, \mathfrak{D}_\sigma, \bar{\mathfrak{d}}_1, \cdots, \bar{\mathfrak{d}}_\tau$, wo $\sigma + \tau = 2m - w^* + 2$ ist, geeignet — durch die übrigen, die wir mit $\mathfrak{B}_1, \cdots, \mathfrak{B}_{2t_1+t_2-2m+w^*-2}$ bezeichnen, in der Gestalt

$$(8)\quad \begin{aligned}\mathfrak{D}_s &= (\mathfrak{B}_s)\mathfrak{B}_1^{a_1^{(s)}}\cdots\mathfrak{B}_{2t_1+t_2-2m+w^*-2}^{a_{2t_1+t_2-2m+w^*-2}^{(s)}}\mathfrak{j}_s,\\ \bar{\mathfrak{d}}^u &= (\Gamma_u)\mathfrak{B}_1^{b_1^{(u)}}\cdots\mathfrak{B}_{2t_1+t_2-2m+w^*-2}^{b_{2t_1+t_2-2m+w^*-2}^{(u)}}\mathfrak{j}_u,\\ &(s=1,2,\cdots,\sigma;\ u=1,2,\cdots,\tau)\end{aligned}$$

darstellen kann, wobei die Exponenten $a^{(s)}, b^{(u)}$ gewisse Werte 0, 1 haben, $\mathfrak{B}_s$, Γ_u Hauptideale in $K(\sqrt[4]{\mu})$, $\mathfrak{j}_s$, $\mathfrak{j}_u$ Ideale in k bedeuten.

Um dies einzusehen, haben wir außer der bewiesenen Tatsache, daß eine Beziehung (6) nicht bestehen kann, wenn nicht sämtliche Exponenten $e, e_{v_1^*+1}, \cdots, e_m, e', e'_{r_1^*+1}, \cdots, e'_m$ gleich Null sind und $j^* = 1$ wird, nur noch den Umstand zu berücksichtigen, daß die Quadrate der Ideale $\mathfrak{D}_1, \cdots, \mathfrak{D}_{t_1+t_2}$; $(\mathsf{M}), (\mathsf{M}_{r_1^*+1}), \cdots, (\mathsf{M}_m)$ Ideale in $K(\sqrt{\mu})$ sind, die durch die Substitution $S = \sqrt{\mu} : i\sqrt{\mu}$ ungeändert bleiben, und daß die Biquadrate von

$$(\mathsf{M}), (\mathsf{M}_{r_1^*+1}), \cdots, (\mathsf{M}_m),$$

wie auch die Quadrate von $\bar{\mathfrak{d}}_{r_2^*+1}, \cdots, \bar{\mathfrak{d}}_m$ Ideale in k werden.

Aus (8) ergibt sich sofort die Beziehung

$$a^* \leqq t_1 + \frac{t_2}{2} + \frac{w^*}{2} - m - 1.$$

Die Abänderungen, welche der Beweis in den ausgeschlossenen Fällen, wo μ das Produkt einer Einheit in k mit dem Quadrate einer ganzen Zahl in k ist, zu erfahren hat, sind leicht zu treffen. Man überzeugt sich auch in diesen Fällen von der Richtigkeit des Satzes 7.

Wir wollen das erhaltene Resultat auf beliebige ambige Komplexe des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ ausdehnen, indem wir folgenden Satz beweisen.

Satz 8. Es sei die Anzahl der verschiedenen Primideale des Körpers k, welche in der Relativdiskriminante $\mathfrak{D}_{\sqrt{\mu}, k}$ aufgehen, gleich $t_1 + t_2$ und es seien hiervon genau t_1 in der Relativdiskriminante $\mathfrak{D}_{\sqrt{\mu}, k}$ als Faktoren enthalten; ferner mögen diejenigen Einheiten in k, welche Relativnormen $N_{\sqrt{\mu}, k}$ von Einheiten oder gebrochenen Zahlen in $K(\sqrt{\mu})$ sind, 2^w verschiedene biquadratische Verbände bilden: Dann gilt, wenn wir die Anzahl aller ambigen Komplexe in $K(\sqrt{\mu})$ mit 4^a bezeichnen und

$$t = t_1 + \frac{t_2}{2}, \quad v = \frac{w}{2}$$

setzen, für a die Beziehung

$$a \leqq t + v - m - 1.$$

Beweis. Wir behalten die Bezeichnungsweise des vorigen Satzes bei. Dann wird man offenbar $w - w^*$ Einheiten $\xi_1, \cdots, \xi_{w-w^*}$ in k finden können, die Relativnormen $N_{\sqrt{\mu}, k}$ von gebrochenen Zahlen in $K(\sqrt{\mu})$ sind, so daß eine Beziehung von der Form

$$\eta_1^{a_1} \cdots \eta_{r_1^*}^{a_{r_1^*}} \vartheta_1^{2b_1} \cdots \vartheta_{r_2^*}^{2b_{r_2^*}} \zeta_1^{c_1} \cdots \zeta_{w-w^*}^{c_{w-w^*}} \xi^4 = 1,$$

wo ξ eine Einheit in k bedeutet und die Exponenten

$$a_1, \cdots, a_{r_1^*}, \; b_1, \cdots, b_{r_2^*}, \; c_1, \cdots, c_{w-w^*}$$

beliebige Werte 0, 1 haben, nur dann bestehen kann, wenn sämtliche Exponenten $a_1, \cdots, a_{r_1^*}, b_1, \cdots, b_{r_2^*}, c_1, \cdots, c_{w-w^*}$ gleich 0 sind und $\xi^4 = 1$

wird. Wir denken uns die Einheiten $\zeta_1, \cdots, \zeta_{w-w^*}$ so bestimmt, daß für $\zeta_{w-w^*}^2, \zeta_{w-w^*-1}^2, \cdots, \zeta_1^2$ der Reihe nach Beziehungen von der Gestalt

$$\eta_1^{a_1^{(s)}} \cdots \eta_{v_1^*}^{a_{v_1^*}^{(s)}} \vartheta_1^{2b_1^{(s)}} \cdots \vartheta_{v_2^*}^{2b_{v_2^*}^{(s)}} \zeta_s^2 \zeta_{s+1}^{c_{s+1}^{(s)}} \cdots \zeta_{w-w^*}^{c_{w-w^*}^{(s)}} \xi_s^4 = 1,$$
$$(s = w - w^*, w - w^* - 1, \cdots, 1)$$

statthaben, wobei die Exponenten a, b, c gewisse Werte 0, 1 haben und ξ_s Einheiten in k vorstellen. Dann wird man jede Einheit ζ in k, welche Relativnorm $N_{\sqrt[4]{\mu},k}$ einer ganzen oder gebrochenen Zahl in $K(\sqrt[4]{\mu})$ ist, eindeutig in die Form

$$\zeta = \eta_1^{a_1} \cdots \eta_{v_1^*}^{a_{v_1^*}} \vartheta_1^{2b_1} \cdots \vartheta_{v_2^*}^{2b_{v_2^*}} \zeta_1^{c_1} \cdots \zeta_{w-w^*}^{c_{w-w^*}} \xi^4$$

bringen können, wo die Exponenten $a_1, \cdots, a_{v_1^*}, b_1, \cdots, b_{v_2^*}, c_1, \cdots, c_{w-w^*}$ gewisse Werte 0, 1 haben und ξ eine Einheit in k ist.

Wir bezeichnen mit $\mathsf{A}_1, \cdots, \mathsf{A}_{w-w^*}$ Zahlen in $K(\sqrt[4]{\mu})$, so daß

$$\zeta_1 = N_{\sqrt[4]{\mu},k}(\mathsf{A}_1), \cdots, \zeta_{w-w^*} = N_{\sqrt[4]{\mu},k}(\mathsf{A}_{w-w^*})$$

wird. Verfahren wir dann genau so, wie Hilbert in A. Z. § 148 oder Furtwängler in seiner Preisarbeit, § 5, Satz 20, so können wir $w - w^*$ Ideale $\mathfrak{A}_1, \cdots, \mathfrak{A}_{w-w^*}$ bestimmen, so daß

$$\mathsf{A}_s = \mathfrak{A}_s^{1-S},$$
$$(s = 1, 2, \cdots, w - w^*),$$

wird.

Nach den Erläuterungen im Beweise zu Satz 7 kann jedes Ideal $\mathfrak{J}$ des Körpers $K(\sqrt[4]{\mu})$ mit der Eigenschaft $\mathfrak{J} = S\mathfrak{J}$ durch gewisse $2t_1 + t_2 - 2m + w^* - 2$ Ideale $\mathfrak{B}_1, \cdots, \mathfrak{B}_{2t_1+t_2-2m+w^*-2}$, in der Form

$$\mathfrak{J} = (\mathsf{B})\mathfrak{B}_1^{a_1} \cdots \mathfrak{B}_{2t_1+t_2-2m+w^*-2}^{a_{2t_1+t_2-2m+w^*-2}} \mathfrak{j} \tag{9}$$

ausgedrückt werden, wo die Exponenten $a_1, \cdots, a_{2t_1+t_2-2m+w^*-2}$ gewisse Werte 0, 1 haben, (B) ein Hauptideal in $K(\sqrt[4]{\mu})$ und $\mathfrak{j}$ ein Ideal in k bedeutet. Bezeichnen wir nun die ambigen Komplexe, die aus den Idealen $\mathfrak{A}_1, \cdots, \mathfrak{A}_{w-w^*}, \mathfrak{B}_1, \cdots, \mathfrak{B}_{2t_1+t_2-2m+w^*-2}$ entspringen, mit $A_1, \cdots, A_{w-w^*}$, $B_1, \cdots, B_{2t_1+t_2-2m+w^*-2}$, so kann gezeigt werden, daß jeder ambige Komplex P des Körpers $K(\sqrt[4]{\mu})$ in der Form

$$P = A_1^{a_1}, \cdots, A_{w-w^*}^{a_{w-w^*}} B_1^{b_1}, \cdots, B_{2t_1+t_2-2m+w^*-2}^{b_{2t_1+t_2-2m+w^*-2}} \tag{10}$$

darstellbar ist, wo die Exponenten a, b gewisse Werte 0, 1 haben.

Es sei $\mathfrak{A}$ ein beliebiges Ideal des ambigen Komplexes P. Da jeder ambige Komplex in $K(\sqrt[4]{\mu})$ nur ambige Klassen enthält, so wird eine Beziehung

$$\left(\frac{S\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}}\right)^3 = \Theta$$

bestehen müssen, wo Θ eine Zahl in $K(\sqrt[4]{\mu})$ bedeutet. Da die Relativnorm $N_{\sqrt[4]{\mu},k}$ von Θ eine Einheit ζ wird, so können wir setzen

$$N_{\sqrt[4]{\mu},k}(\Theta) = \zeta = \eta_1^{a_1} \cdots \eta_{\varepsilon_1^*}^{a_{\varepsilon_1^*}} \vartheta_1^{2b_1} \cdots \vartheta_{\varepsilon_2^*}^{2b_{\varepsilon_2^*}} \xi_1^{c_1} \cdots \xi_{w-w^*}^{c_{w-w^*}} \xi^4,$$

so daß die Exponenten $a_1, \cdots, a_{\varepsilon_1^*}, b_1, \cdots, b_{\varepsilon_2^*}, c_1, \cdots, c_{w-w^*}$ gewisse Werte 0, 1 haben und ξ eine Einheit in k bedeutet. Bilden wir jetzt die Zahl

$$(11)\quad \Theta' = \Theta H_1^{-a_1} \cdots H_{\varepsilon_1^*}^{-a_{\varepsilon_1^*}} \vartheta_1^{-2b_1} \cdots \vartheta_{\varepsilon_2^*}^{-2b_{\varepsilon_2^*}} A_1^{-c_1} \cdots A_{w-w^*}^{-c_{w-w^*}} \xi^{-1},$$

so ist

$$N_{\sqrt[4]{\mu},k}(\Theta') = 1$$

und wir können demnach

$$\Theta' = \Lambda^{1-S}$$

setzen, wo Λ eine ganze Zahl in $K(\sqrt[4]{\mu})$ bedeutet. Führen wir dies in (10) ein und gehen zu den Idealen zurück, so erhalten wir eine Relation von der Gestalt

$$(\Lambda)^{1-S} = \left(\frac{S\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}}\right)^s \left(\mathfrak{A}_1^{-c_1} \cdots \mathfrak{A}_{w-w^*}^{-c_{w-w^*}}\right)^{1-S}.$$

Wenn wir daher

$$(12)\qquad \mathfrak{A}^s \mathfrak{A}_1^{c_1} \cdots \mathfrak{A}_{w-w^*}^{c_{w-w^*}} \Lambda = \mathfrak{J}$$

setzen, so wird

$$\mathfrak{J} = S\mathfrak{J}$$

und wir können demnach $\mathfrak{J}$ durch die Ideale $\mathfrak{B}_1, \cdots, \mathfrak{B}_{2t_1+t_2-2m+w^*-2}$, wie Gleichung (9) lehrt, ausdrücken. Tun wir dies und beachten dann die im Beweise zu Satz 7 erläuterten Eigenschaften der Ideale

$$\mathfrak{B}_1, \cdots, \mathfrak{B}_{2t_1+t_2-2m+w^*-2},$$

so folgt sofort aus (12) eine Relation von der Gestalt (10).

Damit ist Satz 8 für den Fall, daß μ nicht das Produkt aus einer Einheit in k mit dem Quadrate einer ganzen Zahl in k ist, bewiesen. Man überzeugt sich aber leicht, daß Satz 8 auch im ausgeschlossenen Falle seine Gültigkeit behält.

§ 6.

Die Geschlechter im Körper $K(\sqrt[4]{\mu})$.

Bezüglich der Begriffe: „Geschlecht", „Charakterensystem einer Zahl und eines Ideals", „charakteristische Einheiten" verweisen wir auf § 8 der Lietzmannschen Dissertation.

Es gilt der Satz:

Satz 9. Wenn t und v dieselbe Bedeutung haben, wie in Satz 8, und man mit r_1 die Anzahl der vierwertigen, mit r_2 die Anzahl der zweiwertigen Charaktere eines Komplexes in K bezeichnet, so besteht die Beziehung

$$t + v - m \leqq r, \tag{1}$$

wo $r = r_1 + \frac{r_2}{2}$ gesetzt worden ist.

Beweis. Bezeichnet man mit $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{r_1^*}$ die vierwertigen, mit $\varepsilon_{r_1^*+1}, \cdots, \varepsilon_{r_1^*+r_2^*}$ die zweiwertigen charakteristischen Einheiten des Körpers $K(\sqrt[4]{\mu})$ und haben $\eta_1, \cdots, \eta_{v_1^*}$, $\vartheta_1, \cdots, \vartheta_{v_2^*}$, $\xi_1, \cdots, \xi_{w-w^*}$ dieselbe Bedeutung wie im Beweise zu Satz 8, so kann keine Beziehung von der Form

$$\varepsilon_1^{a_1} \cdots \varepsilon_{r_1^*}^{a_{r_1^*}} \varepsilon_{r_1^*+1}^{a_{r_1^*+1}} \cdots \varepsilon_{r_1^*+r_2^*}^{a_{r_1^*+r_2^*}} \eta_1^{b_1} \cdots \eta_{v_1^*}^{b_{v_1^*}} \vartheta_1^{2c_1} \cdots \vartheta_{v_2^*}^{2c_{v_2^*}} \xi_1^{d_1} \cdots \xi_{w-w^*}^{d_{w-w^*}} = \xi^4 \tag{2}$$

bestehen, wo die Exponenten $a_1, \cdots, a_{r_1^*}$ gewisse Werte 0, 1, 2, 3, die Exponenten $a_{r_1^*+1}, \cdots, a_{r_1^*+r_1^*}$, $b_1, \cdots, b_{v_1^*}$, $c_1, \cdots, c_{v_2^*}$, $d_1, \cdots, d_{w-w^*}$ hingegen nur die Werte 0, 1 haben können, außer es sind sämtliche angeführten Exponenten gleich 0. Bestünde nämlich eine Relation (2), so müßte

$$\left(\left(\frac{\varepsilon_1^{a_1} \cdots \varepsilon_{r_1^*+r_2^*}^{a_{r_1^*+r_2^*}} \eta_1^{b_1} \cdots \eta_{v_1^*}^{b_{v_1^*}} \vartheta_1^{2c_1} \cdots \vartheta_{v_2^*}^{2c_{v_2^*}} \xi_1^{d_1} \cdots \xi_{w-w^*}^{d_{w-w^*}}, \mu}{\mathfrak{w}}\right)\right) = 1$$

sein für sämtliche Primideale $\mathfrak{w}$ der charakteristischen Symbole. Dies ist jedoch unmöglich, wenn nicht sämtliche Exponenten $a_1, \cdots, a_{r_1^*}$ durch 4 und die Exponenten $a_{r_1^*+1}, \cdots, a_{r_1^*+r_2^*}$ durch 2 teilbar sind und die übrigen Exponenten sämtlich gerade ausfallen.

Nun ist die Anzahl aller biquadratischen Einheitenverbände in k gleich 4^m. Lassen wir im Ausdrucke

$$\varepsilon_1^{a_1} \cdots \varepsilon_{r_1^*}^{a_{r_1^*}} \varepsilon_{r_1^*+1}^{a_{r_1^*+1}} \cdots \varepsilon_{r_1^*+r_2^*}^{a_{r_1^*+r_2^*}} \eta_1^{b_1} \cdots \eta_{v_1^*}^{b_{v_1^*}} \vartheta_1^{2c_1} \cdots \vartheta_{v_2^*}^{2c_{v_2^*}} \xi_1^{d_1} \cdots \xi_{w-w^*}^{d_{w-w^*}} \xi^4$$

die Exponenten $a_1, \cdots, a_{r_1^*}$ alle Werte 0, 1, 2, 3, die Exponenten

$$a_{r_1^*+1}, \cdots, a_{r_1^*+r_2^*}, b_1, \cdots, b_{v_1^*}, c_1, \cdots, c_{v_2^*}, d_1, \cdots, d_{w-w^*}$$

die Werte 0, 1 und ξ sämtliche Einheiten in k durchlaufen, so erhalten wir insgesamt $4^{r_1^* + \frac{r_2^*}{2} + v}$ biquadratische Einheitenverbände; folglich ist

$$r_1^* + \frac{r_2^*}{2} + v \leqq m$$

und demnach

$$t + v - m \leqq r. \tag{3}$$

Wegen Satz 8 muß $r \geqq 1$ sein.

Bezeichnet man mit A die Anzahl aller ambigen Komplexe in $K(\sqrt[l]{\mu})$ und mit g die Anzahl der Geschlechter in $K(\sqrt[l]{\mu})$, so ist $g \leqq A$ $= \frac{1}{2}$ Beachten wir nun die im Satze 8 enthaltene Beziehung und (3), so ergibt sich für die Anzahl g der Geschlechter in $K(\sqrt[l]{\mu})$ die Relation

$$g \leqq 4^{r-1}.$$

§ 7.

Ein gewisses System von $m + z$ zu $1 - i$ primen Primidealen des Körpers k.

Es möge k ein Zahlkörper $2m^{te}$- Grades sein, über den wir folgende Annahmen machen:

1) *Der Körper k enthalte den Körper der imaginären Zahlen $k(i)$ als Unterkörper und sei nebst seinen konjugierten Körpern $k', \cdots, k^{(2m-1)}$ imaginär.*

2) *Die Anzahl h der Idealklassen im Körper k sei ungerade.*

Wir verstehen ferner unter $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_{m-1}$ ein volles System von Grundeinheiten des Körpers k, und es sei ε_m eine Einheitswurzel in k, deren Quadratwurzel nicht in k liegt, so daß jede beliebige Einheit ε des Körpers k sich auf eine und nur auf eine Weise in der Gestalt

$$\varepsilon = \varepsilon_1^{u_1} \varepsilon_2^{u_2} \cdots \varepsilon_m^{u_m} \xi^2$$

darstellen läßt, wo $u_1, u_2, \cdots, u_m$ gewisse Werte 0, 1 haben und ξ eine Einheit in k bedeutet.

Für die Primzahl $1 + i$ des Körpers $k(i)$ möge in k die Zerlegung

$$1 + i = \mathfrak{l}_1^{\lambda_1} \mathfrak{l}_2^{\lambda_2} \cdots \mathfrak{l}_z^{\lambda_z}$$

gelten, wo $\mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2, \cdots, \mathfrak{l}_z$ voneinander verschiedene Primideale des Körpers k bedeuten, und es sei weiter

$$(\lambda_1) = \mathfrak{l}_1^{\lambda_1 h'}, \quad (\lambda_2) = \mathfrak{l}_2^{\lambda_2 h'}, \cdots, (\lambda_z) = \mathfrak{l}_z^{\lambda_z h'},$$

wobei $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_z$ ganze Zahlen in k sind und h' derart bestimmt werden soll, daß es die Kongruenz $hh' \equiv 1 \pmod 4$ befriedigt.

Wir wollen nun folgenden Satz beweisen:

Satz 10. Es seien $\mathfrak{q}_1, \cdots, \mathfrak{q}_m$ solche zu $1 + i$ prime Primideale des Körpers k, für welche

$$\left(\left(\frac{\varepsilon_s}{\mathfrak{q}_s}\right)\right) = \pm i, \quad \left(\left(\frac{\varepsilon_k}{\mathfrak{q}_s}\right)\right) = +1 \qquad (s \neq k),$$

$$(s, k = 1, 2, \cdots, m)$$

ausfällt; ferner seien $\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_m$ quadratisch primäre*) Primideale in k, für welche

$$\left(\left(\frac{\varepsilon_s}{\mathfrak{p}_k}\right)\right) = +1, \qquad (s, k = 1, 2, \cdots, m);$$

$$\left(\frac{\lambda_k}{\mathfrak{p}_k}\right) = -1, \qquad \left(\frac{\lambda_k}{\mathfrak{p}_l}\right) = +1 \qquad (k \neq l)$$

$$(k, l = 1, 2, \cdots, z)$$

wird. Setzen wir nun

$$\mathfrak{q}_1^{\lambda\lambda'} = (\varkappa_1), \cdots, \mathfrak{q}_m^{\lambda\lambda'} = (\varkappa_m), \qquad \mathfrak{p}_1^{\lambda\lambda'} = (\pi_1), \cdots, \mathfrak{p}_s^{\lambda\lambda'} = (\pi_s),$$

so daß $\varkappa_1, \cdots, \varkappa_m$, $\pi_1, \cdots, \pi_s$ gewisse ganze Zahlen des Körpers k bedeuten und außerdem $\pi_1, \cdots, \pi_s$ quadratisch primäre Zahlen sind, dann gilt für jede beliebige zu $1+i$ prime ganze Zahl ω in k nach dem Modul 8 eine Kongruenz von der Gestalt

$$(1) \qquad \omega \equiv \varepsilon_1^{u_1} \cdots \varepsilon_m^{u_m} \varkappa_1^{v_1} \cdots \varkappa_m^{v_m} \pi_1^{w_1} \cdots \pi_s^{w_s} \alpha^4, \quad (8),$$

worin die Exponenten $u_1, \cdots, u_m$, $v_1, \cdots, v_m$ gewisse Werte 0, 1, 2, 3, die Exponenten $w_1, \cdots, w_s$ nur die Werte 0, 1 haben können und α eine geeignete ganze Zahl in k bedeutet.

Beweis. Wir zeigen zunächst, daß eine Zahl μ von der Form

$$(a) \qquad \mu = \varepsilon_1^{u_1} \cdots \varepsilon_m^{u_m} \varkappa_1^{v_1} \cdots \varkappa_m^{v_m} \pi_1^{w_1} \cdots \pi_s^{w_s},$$

wo $u_1, \cdots, u_m$, $v_1, \cdots, v_m$ gewisse Werte 0, 1, 2, 3, $w_1, \cdots, w_s$ nur die Werte 0, 1 haben können, nicht dem Biquadrate einer ganzen Zahl in k nach 8 kongruent sein kann, es sei denn, daß die Exponenten

$$u_1, \cdots, u_m, \quad v_1, \cdots, v_m, \quad w_1, \cdots, w_s$$

sämtlich gleich 0 sind.

Wenn unter den Exponenten $u_1, \cdots, u_m$, $v_1, \cdots, v_m$, $w_1, \cdots, w_s$ mindestens einer ungerade ist, so folgt die Richtigkeit unserer Behauptung aus dem Umstande, daß

$$\varepsilon_1^{u_1} \cdots \varepsilon_m^{u_m} \varkappa_1^{v_1} \cdots \varkappa_m^{v_m} \pi_1^{w_1} \cdots \pi_s^{w_s},$$

wo die Exponenten $u_1, \cdots, u_m$, $v_1, \cdots, v_m$, $w_1, \cdots, w_s$ gewisse Werte 0, 1 haben, nicht dem Quadrate einer ganzen Zahl in k nach dem Modul

$$\mathfrak{l}_1^{4l_1+1}\, \mathfrak{l}_2^{4l_2+1} \cdots \mathfrak{l}_s^{4l_s+1}$$

kongruent sein kann, es sei denn, daß die Exponenten $u_1, \cdots, u_m$, $v_1, \cdots, v_m$, $w_1, \cdots, w_s$ sämtlich gleich 0 sind (H. Rq. Z. § 21, Satz 29). Soll also μ

*) Wir gebrauchen im Nachstehenden statt der Ausdrücke „primär", „hyperprimär" der Theorie des relativquadratischen Zahlkörpers die ausführlicheren Ausdrücke „quadratisch primär", „quadratisch hyperprimär".

dem Biquadrate einer ganzen Zahl in k nach 8 kongruent sein, so müssen jedenfalls die Exponenten $u_1, \cdots, u_m, v_1, \cdots, v_m, w_1, \cdots, w_s$ in (a) sämtlich gerade ausfallen.

Sind aber die Exponenten $u_1, \cdots, u_m, v_1, \cdots, v_m, w_1, \cdots, w_s$ sämtlich gerade und setzen wir etwa

$u_1 = 2a_1, \cdots, u_m = 2a_m, \quad v_1 = 2b_1, \cdots, v_m = 2b_m, \quad w_1 = 0, \cdots, w_s = 0,$

wo $a_1, \cdots, a_m, b_1, \cdots, b_m$ gewisse Werte 0, 1 haben, so müßte eine Kongruenz von der Gestalt

$$\varepsilon_1^{2a_1} \cdots \varepsilon_m^{2a_m} \varkappa_1^{2b_1} \cdots \varkappa_m^{2b_m} \equiv \alpha^4, \quad (8)$$

bestehen, worin α eine ganze Zahl in k bedeutet.

Wir greifen nun unter den Primidealen, die in $1+i$ als Faktoren enthalten sind, ein beliebiges heraus und bezeichnen es mit $\mathfrak{l}$. Es möge $\mathfrak{l}$ in $1+i$ genau zur l^{ten} Potenz aufgehen, so folgt aus der letzten Kongruenz, daß

$$\varepsilon_1^{a_1} \cdots \varepsilon_m^{a_m} \varkappa_1^{b_1} \cdots \varkappa_m^{b_m} \equiv \pm \alpha^2, \quad (\mathfrak{l}^{4l})$$

sein muß. Beachten wir jetzt, daß $-1 = i^2$ und i eine Zahl in k ist, so können wir folgende Kongruenzen aufschreiben:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1^{a_1} \cdots \varepsilon_m^{a_m} \varkappa_1^{b_1} \cdots \varkappa_m^{b_m} &\equiv \alpha_1^2, \quad (\mathfrak{l}_1^{4l_1}),\\
\varepsilon_1^{a_1} \cdots \varepsilon_m^{a_m} \varkappa_1^{b_1} \cdots \varkappa_m^{b_m} &\equiv \alpha_2^2, \quad (\mathfrak{l}_2^{4l_2}),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\varepsilon_1^{a_1} \cdots \varepsilon_m^{a_m} \varkappa_1^{b_1} \cdots \varkappa_m^{b_m} &\equiv \alpha_s^2, \quad (\mathfrak{l}_s^{4l_s}),
\end{aligned}$$

wo $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ geeignete ganze Zahlen in k vorstellen. Man könnte demnach eine ganze Zahl β in k derart bestimmen, daß die Kongruenz

$$\varepsilon_1^{a_1} \cdots \varepsilon_m^{a_m} \varkappa_1^{b_1} \cdots \varkappa_m^{b_m} \equiv \beta^2, \quad (4)$$

stattfände. Dies ist jedoch nur möglich, wenn die Exponenten $a_1, \cdots, a_m, b_1, \cdots, b_m$ sämtlich gleich Null sind (H. Rq. Z. § 21). Damit ist die Aussage über die Zahl μ bewiesen.

Wir setzen nun zur Abkürzung

$$L_1 = n(\mathfrak{l}_1^{2l_1})\left(1 - \frac{1}{n(\mathfrak{l}_1)}\right),$$

wo n die Norm genommen im Körper k bedeutet, und verstehen unter

$$\alpha_1^{(1)}, \cdots, \alpha_1^{(L_1)}$$

ein volles System von ganzen zu $\mathfrak{l}_1$ primen und nach $\mathfrak{l}_1^{2l_1}$ einander inkongruenten Zahlen in k, die überdies sämtlich kongruent 1 nach dem Modul $\mathfrak{l}_2^{2l_2}\mathfrak{l}_3^{2l_3}\cdots\mathfrak{l}_s^{2l_s}$ sein sollen. Da allgemein

$$\alpha_1^{(k)} \not\equiv i\alpha_1^{(k)}, \quad (\mathfrak{l}_1^{2l_1})$$
$$(k = 1, 2, \cdots, L_1)$$

ist, so können wir annehmen, es sei etwa stets

$$i\alpha_1^{(k)} \equiv \alpha_1^{\left(\frac{L_1}{2}+k\right)}, \quad (\mathfrak{l}_1^{2l_1})$$
$$\left(k = 1, 2, \cdots, \frac{L_1}{2}\right).$$

Die $\frac{L_1}{2}$ Zahlen $\alpha_1^{(1)}, \cdots, \alpha_1^{\left(\frac{L_1}{2}\right)}$ haben dann offenbar die Eigenschaft, daß, wenn α_1 eine beliebige unter ihnen bedeutet, in diesem Systeme keine Zahl vorkommt, die kongruent $i\alpha_1$ nach dem Modul $\mathfrak{l}_1^{2l_1}$ wäre.

Ferner setzen wir zur Abkürzung

$$L_2 = n(\mathfrak{l}_2^{2l_2})\left(1 - \frac{1}{n(\mathfrak{l}_2)}\right),$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$L_s = n(\mathfrak{l}_s^{2l_s})\left(1 - \frac{1}{n(\mathfrak{l}_s)}\right)$$

und bilden in der entsprechenden Weise wie oben zunächst das System von $\frac{L_2}{2}$ ganzen, zu $\mathfrak{l}_2$ primen Zahlen

$$\alpha_2^{(1)}, \cdots, \alpha_2^{\left(\frac{L_2}{2}\right)},$$

die sämtlich kongruent 1 nach $\mathfrak{l}_1^{2l_1}\mathfrak{l}_3^{2l_3}\cdots\mathfrak{l}_s^{2l_s}$ sind und die Eigenschaft haben, daß, wenn α_2 eine beliebige Zahl dieses Systems ist, in diesem System keine Zahl vorkommt, die kongruent $i\alpha_2$ nach dem Modul $\mathfrak{l}_2^{2l_2}$ wäre, u. s. f.; endlich bilden wir ein System von $\frac{L_s}{2}$ ganzen, zu $\mathfrak{l}_s$ primen Zahlen

$$\alpha_s^{(1)}, \cdots, \alpha_s^{\left(\frac{L_s}{2}\right)},$$

die sämtlich kongruent 1 nach $\mathfrak{l}_1^{2l_1}\mathfrak{l}_2^{2l_2}\cdots\mathfrak{l}_{s-1}^{2l_{s-1}}$ sind und die Eigenschaft haben, daß, wenn α_s eine beliebige Zahl des Systems bedeutet, in diesem Systeme keine Zahl vorkommt, die kongruent $i\alpha_s$ nach dem Modul $\mathfrak{l}_s^{2l_s}$ wäre.

Der Ausdruck

$$(2) \qquad \varepsilon_1^{u_1}\cdots\varepsilon_m^{u_m}\varkappa_1^{v_1}\cdots\varkappa_m^{v_m}\pi_1^{w_1}\cdots\pi_s^{w_s}\left(\alpha_1^{(i_1)}\right)^4\cdots\left(\alpha_s^{(i_s)}\right)^4$$
$$\left(\begin{array}{c} u_1, \cdots, u_m, \ v_1, \cdots, v_m = 0, 1, 2, 3; \ w_1, \cdots, w_s = 0, 1, \\ i_1 = 1, 2, \cdots, \frac{L_1}{2}; \cdots; \ i_s = 1, 2, \cdots, \frac{L_s}{2} \end{array}\right)$$

stellt ein System von

$$2^{6m}\left(1-\frac{1}{n(l_1)}\right)\left(1-\frac{1}{n(l_2)}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n(l_z)}\right)$$

ganzen Zahlen in k dar; diese sind sämtlich zu $1+i$ prim und nach 8 einander inkongruent. In der Tat, wären zwei Zahlen von der Gestalt (2) einander nach 8 kongruent, wäre etwa

$$(3)\qquad \begin{aligned}&\varepsilon_1^{u_1}\cdots\varepsilon_m^{u_m}\varkappa_1^{v_1}\cdots\varkappa_m^{v_m}\pi_1^{w_1}\cdots\pi_m^{w_m}\left(\alpha_1^{(i_1)}\right)^4\cdots\left(\alpha_z^{(i_z)}\right)^4\\ &\equiv\varepsilon_1^{u'_1}\cdots\varepsilon_m^{u'_m}\varkappa_1^{v'_1}\cdots\varkappa_m^{v'_m}\pi_1^{w'_1}\cdots\pi_m^{w'_z}\left(\alpha_1^{(i_1')}\right)^4\cdots\left(\alpha_z^{(i_z')}\right)^4,\quad (8),\end{aligned}$$

so würde, da die Zahlen $\alpha_1^{(i)},\cdots,\alpha_z^{(i)}$ sämtlich zu $1+i$ prim sind, aus dem vorhin Bewiesenen sofort folgen, daß die Exponenten $u_1,\cdots,u_m$, $v_1,\cdots,v_m$, $w_1,\cdots,w_z$ bez. mit den Exponenten $u'_1,\cdots,u'_m$, $v'_1,\cdots,v'_m$, $w'_1,\cdots,w'_z$ übereinstimmen und es wäre mithin

$$\left(\alpha_1^{(i_1)}\right)^4\cdots\left(\alpha_z^{(i_z)}\right)^4\equiv\left(\alpha_1^{(i'_1)}\right)^4\cdots\left(\alpha_z^{(i'_z)}\right)^4,\quad (8).$$

Aus dieser Kongruenz entnehmen wir der Reihe nach die z Kongruenzen

$$\left(\alpha_1^{(i_1)}\right)^4\equiv\left(\alpha_1^{(i'_1)}\right)^4,\quad \left(\mathfrak{l}_1^{6l_1}\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left(\alpha_1^{(i_z)}\right)^4\equiv\left(\alpha_z^{(i'_z)}\right)^4,\quad \left(\mathfrak{l}_z^{6l_z}\right).$$

Betrachten wir nun eine beliebige unter diesen Kongruenzen, z. B. die folgende:

$$\left(\alpha_k^{(i_k)}\right)^4\equiv\left(\alpha_k^{(i'_k)}\right)^4,\quad \left(\mathfrak{l}_k^{6l_k}\right).$$

Aus dieser Kongruenz würde weiter folgen, daß

$$\left[\left(\alpha_k^{(i_k)}\right)^2+\left(\alpha_k^{(i'_k)}\right)^2\right]\left[\left(\alpha_k^{(i_k)}\right)^2-\left(\alpha_k^{(i'_k)}\right)^2\right]\equiv 0,\quad \left(\mathfrak{l}_k^{6l_k}\right)$$

sein muß. Demnach müßte entweder

$$\left(\alpha_k^{(i_k)}\right)^2+\left(\alpha_k^{(i'_k)}\right)^2\quad\text{oder}\quad\left(\alpha_k^{(i_k)}\right)^2-\left(\alpha_k^{(i'_k)}\right)^2$$

durch $\mathfrak{l}_k^{4l_k}$ teilbar sein. Im ersteren Falle könnten wir weiter schließen, daß $\alpha_k^{(i_k)}-i\alpha_k^{(i'_k)}$ durch $\mathfrak{l}_k^{2l_k}$ teilbar sein muß. Dies verstößt aber gegen die Eigenschaft der oben aufgestellten z Systeme der α. Im letzteren Falle würde wieder folgen, daß $\alpha_k^{(i_k)}-\alpha_k^{(i'_k)}$ durch $\mathfrak{l}_k^{2l_k}$ teilbar sein muß, woraus sich $i_k=i_k'$ ergibt. Dies gilt für $k=1,2,\cdots,z$, so daß wir allgemein

$$i_1=i_1',\quad i_2=i_2',\cdots,i_z=i_z'$$

hätten, d. h. die beiden Ausdrücke auf der linken und rechten Seite der Kongruenz (3) waren nicht voneinander verschieden.

Nun gibt es für den Modul 8 genau

$$2^{6m}\left(1-\frac{1}{n(l_1)}\right)\left(1-\frac{1}{n(l_2)}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n(l_z)}\right)$$

zu $1+i$ prime und untereinander inkongruente Zahlen; mithin bilden die ganzen Zahlen in (2) ein volles Restsystem der genannten Art nach 8. Dies ist die Aussage des Satzes 10.

Auch für den Modul $\mathfrak{l}_1^{6l_1+1}\,\mathfrak{l}_2^{6l_2+1}\dots\mathfrak{l}_s^{6l_s+1}$ kann man eine der Kongruenz (1), die wir für den Modul 8 fanden, analoge Kongruenz bestimmen. Es gilt hier

Satz 10*. Wenn $\mathfrak{q}_1,\cdots,\mathfrak{q}_m,\ \mathfrak{p}_1,\cdots,\mathfrak{p}_s;\ \varkappa_1,\cdots,\varkappa_m,\ \pi_1,\cdots,\pi_s$ dieselbe Bedeutung haben, wie in Satz 10, so gilt für jede beliebige zu $1+i$ prime ganze Zahl ω in k nach dem Modul $\mathfrak{l}_1^{6l_1+1}\mathfrak{l}_2^{6l_2+1}\dots\mathfrak{l}_s^{6l_s+1}$ eine Kongruenz von der Gestalt

$$(4)\qquad \omega \equiv \varepsilon_1^{u_1}\cdots\varepsilon_m^{u_m}\varkappa_1^{v_1}\cdots\varkappa_m^{v_m}\pi_1^{w_1}\cdots\pi_s^{w_s}\,\alpha^4,\quad \left(\mathfrak{l}_1^{6l_1+1}\mathfrak{l}_2^{6l_2+1}\dots\mathfrak{l}_s^{6l_s+1}\right),$$

worin die Exponenten $u_1,\cdots,u_m,\ v_1,\cdots v_m,\ w_1,\cdots,w_s$ gewisse Werte 0, 1, 2, 3 haben und α eine geeignete ganze Zahl in k ist.

Beweis. Auch in diesem Falle können wir zunächst nachweisen, daß eine Zahl von der Form

$$\varepsilon_1^{u_1}\cdots\varepsilon_m^{u_m}\varkappa_1^{v_1}\cdots\varkappa_m^{v_m}\pi_1^{w_1}\cdots\pi_s^{w_s},$$

wo die Exponenten $u_1,\cdots,u_m,\ v_1,\cdots,v_m,\ w_1,\cdots,w_s$ gewisse Werte 0, 1, 2, 3 haben, nicht dem Biquadrate einer ganzen Zahl in k nach dem Modul $\mathfrak{l}_1^{6l_1+1}\mathfrak{l}_2^{6l_2+1}\dots\mathfrak{l}_s^{6l_s+1}$ kongruent sein kann, es sei denn, daß die Exponenten $u_1,\cdots,u_m,\ v_1,\cdots,v_m, w_1,\cdots,w_s$ sämtlich gleich Null sind. Man beweist dies wie im analogen Falle des Satzes 10. Die Abänderungen, die an jenem Beweise anzubringen sind, weil die Exponenten $w_1,\cdots,w_s$ jetzt die vier Werte 0, 1, 2, 3 haben können, sind leicht zu treffen. (Man beachte hierzu H. Rq. Z. § 30.)

Wir setzen nun zur Abkürzung

$$L_1 = n(\mathfrak{l}_1^{2l_1})\,(n(\mathfrak{l}_1)-1)$$

und verstehen unter

$$(5)\qquad \alpha_1^{(1)},\cdots,\alpha_1^{(L_1)}$$

ein volles System von ganzen zu $\mathfrak{l}_1$ primen nach $\mathfrak{l}_1^{2l_1+1}$ einander inkongruenten Zahlen in k, die überdies sämtlich kongruent 1 nach dem Modul $\mathfrak{l}_2^{2l_2+1}\,\mathfrak{l}_3^{2l_3+1}\dots\mathfrak{l}_s^{2l_s+1}$ sein sollen. Da allgemein

$$\alpha_1^{(k)} \not\equiv -\alpha_1^{(k)},\quad \not\equiv \pm i\alpha_1^{(k)},\quad (\mathfrak{l}_1^{2l_1+1})$$
$$(k=1,2,\cdots,L_1)$$

ist, so können wir die Zahlen des Systems (5) folgendermaßen anordnen:

$$\alpha_1^{(1)}, \cdots, \quad \alpha_1^{\left(\frac{L_1}{4}\right)},$$
$$-\alpha_1^{(1)}, \cdots, \quad -\alpha_1^{\left(\frac{L_1}{4}\right)},$$
$$i\alpha_1^{(1)}, \cdots, \quad i\alpha_1^{\left(\frac{L_1}{4}\right)},$$
$$-i\alpha_1^{(1)}, \cdots, \quad -i\alpha_1^{\left(\frac{L_1}{4}\right)}.$$

Die Zahlen der zweiten, dritten und vierten Reihe erhält man aus den Zahlen der ersten Reihe, indem man die Zahlen dieser Reihe beziehungsweise mit -1, i und $-i$ multipliziert. Die Zahlen der ersten Reihe haben dann offenbar die Eigenschaft, daß, wenn α_1 eine beliebige unter ihnen bedeutet, in diesem Systeme keine Zahl vorkommt, die kongruent $-\alpha$, $i\alpha$ oder $-i\alpha$ nach dem Modul $\mathfrak{l}_1^{2l_1+1}$ wäre.

Ferner setzen wir

$$L_2 = n(\mathfrak{l}_2^{2l_2})\,(n(\mathfrak{l}_2) - 1),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$L_s = n(\mathfrak{l}_s^{2l_s})\,(n(\mathfrak{l}_s) - 1)$$

und bilden in der entsprechenden Weise für den Modul $\mathfrak{l}_2^{2l_2+1}$ ein analoges System von $\frac{L_2}{4}$ Zahlen u. s. f.; endlich für den Modul $\mathfrak{l}_s^{2l_s+1}$ ein analoges System von $\frac{L_s}{4}$ Zahlen. Man vergleiche hierzu den Beweis zu Satz 10. Bezeichnet man diese Systeme der Reihe nach mit

$$\alpha_2^{(1)}, \cdots, \alpha_2^{\left(\frac{L_2}{4}\right)},$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\alpha_s^{(1)}, \cdots, \alpha_s^{\left(\frac{L_s}{4}\right)},$$

so kann man, wie in Satz 10, nachweisen, daß der Ausdruck

$$(6) \qquad \varepsilon_1^{u_1} \cdots \varepsilon_m^{u_m} \varkappa_1^{v_1} \cdots \varkappa_m^{v_m} \cdots \pi_1^{w_1} \cdots \pi_s^{w_s} \left(\alpha_1^{(i_1)}\right)^4 \cdots \left(\alpha_s^{(i_s)}\right)^4,$$
$$\left(\begin{matrix} u_1, \cdots, u_m;\ v_1, \cdots, v_m;\ w_1, \cdots, w_s = 0, 1, 2, 3, \\ i_1 = 1, 2, \cdots, \frac{L_1}{4};\ \cdots;\ i_s = 1, 2, \cdots, \frac{L_s}{4} \end{matrix}\right)$$

ein System von

$$2^{4m} L_1 L_2 \cdots L_s$$

ganzen Zahlen in k darstellt, die sämtlich zu $1+i$ prim und nach $\mathfrak{l}_1^{6l_1+1}\mathfrak{l}_2^{6l_2+1}\cdots\mathfrak{l}_s^{6l_s+1}$ einander inkongruent sind. Da es aber für den Modul $\mathfrak{l}_1^{6l_1+1}\mathfrak{l}_2^{6l_2+1}\cdots\mathfrak{l}_s^{6l_s+1}$ genau $2^{4m} L_1 L_2 \cdots L_s$ solcher Zahlen gibt, so bilden die ganzen Zahlen (6) ein volles Restsystem der genannten Art nach $\mathfrak{l}_1^{6l_1+1}\mathfrak{l}_1^{6l_2+1}\cdots\mathfrak{l}_s^{6l_s+1}$; dies ist die Aussage des Satzes 10*.

§ 8.

Ein Satz aus der Theorie des relativquadratischen Zahlkörpers.

Wir wollen in diesem Paragraphen einen Satz ableiten, von welchem wir später Gebrauch machen werden.

Satz 11. Es seien $\mathfrak{l}_1, \cdots, \mathfrak{l}_s$ die voneinander verschiedenen Primfaktoren von $1+i$ in k und es gehe $\mathfrak{l}_1$ genau zur l_1^{ten}, ferner die Primideale $\mathfrak{l}_2, \cdots, \mathfrak{l}_s$ bez. genau zur $l_2, \cdots, l_s^{\text{ten}}$ Potenz in $1+i$ auf. Wir setzen

$$\mathfrak{l}_1^h = (\lambda_1), \cdots, \mathfrak{l}_s^h = (\lambda_s),$$

so daß $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$ ganze Zahlen im k sind, und bestimmen ein quadratisch primäres Primideal $\mathfrak{p}_1$ in k derart, daß es die Gleichungen

$$(1) \qquad \left(\frac{\lambda_1}{\mathfrak{p}_1}\right) = -1, \quad \left(\frac{\lambda_2}{\mathfrak{p}_1}\right) = +1, \cdots, \left(\frac{\lambda_s}{\mathfrak{p}_1}\right) = +1$$

befriedigt; es sei endlich $\mathfrak{p}_1^h = (\pi_1)$, wo π_1 eine quadratisch primäre Zahl bedeutet.

Ist dann μ eine quadratisch primäre Zahl in k, für welche die Gleichungen

$$\left(\frac{\mu}{\mathfrak{l}_1}\right) = -1, \quad \left(\frac{\mu}{\mathfrak{l}_s}\right) = +1, \quad (s = 2, 3, \cdots, s)$$

bestehen, so gilt für μ nach dem Modul $\mathfrak{l}_1^{4l_1+1} \cdots \mathfrak{l}_s^{4l_s+1}$ eine Kongruenz von der Gestalt

$$\mu \equiv \pi_1 \alpha^2, \quad (\mathfrak{l}_1^{4l_1+1} \cdots \mathfrak{l}_s^{4l_s+1}),$$

wo α eine ganze Zahl in k bedeutet.

Beweis. Wegen (1) müssen auch die Beziehungen

$$\left(\frac{\pi_1}{\mathfrak{l}_1}\right) = -1, \quad \left(\frac{\pi_1}{\mathfrak{l}_2}\right) = +1, \cdots, \left(\frac{\pi_1}{\mathfrak{l}_s}\right) = +1$$

stattfinden; daher ist

$$\left(\frac{\pi_1 \mu}{\mathfrak{l}_s}\right) = +1, \quad (s = 1, 2, \cdots, s),$$

d. h. $\pi_1 \mu$ ist eine quadratisch hyperprimäre Zahl in k, womit Satz 11 bewiesen ist.

§ 9.

Das primäre Ideal und die primäre Zahl.

Definition 3. Ist das zu $1+i$ prime Ideal $\mathfrak{a}$ in k so beschaffen, daß für jede Einheit ε in k das Symbol $\left(\left(\frac{\varepsilon}{\mathfrak{a}}\right)\right)$ den Wert $+1$ hat, so heiße $\mathfrak{a}$ ein *biquadratisch primäres* oder kurz *primäres Ideal.* Alle Ideale, die diese Eigenschaft nicht haben, heißen *biquadratisch nichtprimäre* oder kurz *nichtprimäre Ideale.*

Definition 4. Es sei α eine beliebige ganze Zahl in k, die nicht das Quadrat einer ganzen Zahl in k ist. Fällt dann die Relativdiskriminante $D_{\sqrt[4]{\alpha},k}$ des Körpers $K(\sqrt[4]{\alpha})$ prim zu $1+i$ aus, so heiße α eine *biquadratisch primäre* oder kurz *primäre Zahl*.

§ 10.

Eigenschaften der primären Primideale.

Die primären Ideale zeichnen sich durch besondere Eigenschaften aus, zu deren Herleitung uns folgender Hilfssatz verhelfen wird.

Satz 12. Bedeutet μ eine *quadratisch primäre* Zahl des Körpers k, so kann man stets ganze Zahlen ξ in k bestimmen derart, daß die Zahl $\xi^2\mu$ *primär* wird.

Beweis. Es sei $\mathfrak{l}$ ein Primideal des Körpers k, welches in $1+i$, u. zw. genau zur l^{ten} Potenz aufgeht. Da nach Voraussetzung μ eine quadratisch primäre Zahl ist, so ist das Symbol $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{l}}\right)$ entweder gleich $+1$ oder -1. Im ersteren Falle zerfällt $\mathfrak{l}$ im Körper $K(\sqrt{\mu})$ in zwei voneinander verschiedene Primideale $\bar{\mathfrak{l}}$, $S\bar{\mathfrak{l}}$ nach der Gleichung $\mathfrak{l}=\bar{\mathfrak{l}}\cdot S\bar{\mathfrak{l}}$. Nun ist $n(\mathfrak{l}^e)=n_{\sqrt{\mu}}(\bar{\mathfrak{l}}^e)$, wo e eine beliebige positive ganze rationale Zahl ist, und es wird jede ganze Zahl in $K(\sqrt{\mu})$ kongruent einer ganzen Zahl des Körpers k nach $\mathfrak{l}^e$. Insbesondere muß eine ganze Zahl ξ in k bestehen derart, daß

$$\sqrt{\mu}\equiv\xi, \quad (\bar{\mathfrak{l}}^{4l}) \tag{1}$$

wird.

Ist hingegen $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{l}}\right)=-1$ und etwa

$$\mu\equiv\alpha^2, \quad (\mathfrak{l}^{4l}), \tag{2}$$

wo α eine ganze Zahl in k bedeutet, so bestimmen wir eine ganze Zahl λ in k, die genau durch $\mathfrak{l}$ teilbar ist und eine zu $\mathfrak{l}$ prime ganze Zahl ϱ, die durch $\frac{\lambda}{\mathfrak{l}}$ teilbar ist. Dann ist

$$\left(\frac{\varrho}{\lambda}\right)^l(\alpha+i\sqrt{\mu})$$

eine ganze zu $\mathfrak{l}$ prime Zahl in $K(\sqrt{\mu})$.

Wir zeigen nun, daß man stets eine ganze Zahl ξ in k bestimmen kann derart, daß die Kongruenz

$$\varrho^{2l}\xi\sqrt{\mu}\equiv\left(\frac{\varrho}{\lambda}\right)^{2l}(\alpha+i\sqrt{\mu})^2, \quad (\mathfrak{l}^{4l}) \tag{3}$$

befriedigt wird. Diese Kongruenz kann folgendermaßen geschrieben werden

$$\left(\frac{\varrho}{\lambda}\right)^{2l}(\alpha^2-\mu)-\left(\frac{\varrho}{\lambda}\right)^{2l}(\lambda^{2l}\xi+2\alpha i)\sqrt{\mu}\equiv 0, \quad (\mathfrak{l}^{4l}).$$

Bezeichnet man die linke Seite dieser Kongruenz etwa mit $\bar{\sigma}$, so muß $\bar{\sigma}+S\bar{\sigma}$ durch $\mathfrak{l}^{4l}$ und $\bar{\sigma}\cdot S\bar{\sigma}$ durch $\mathfrak{l}^{8l}$ teilbar sein. Das erstere ist immer der Fall, und es muß demnach ξ so bestimmt werden, daß die Kongruenz

$$\left(\frac{\varrho}{\lambda}\right)^{4l}(\alpha^2-\mu)^2-\left(\frac{\varrho}{\lambda}\right)^{4l}(\lambda^{2l}\xi+2\alpha i)^2\mu\equiv 0, \quad (\mathfrak{l}^{8l})$$

stattfindet. Multipliziert man diese Kongruenz mit μ, so kann sie auch in der Gestalt

$$\left(\varrho^{2l}\xi+\frac{2\varrho^{2l}\alpha i}{\lambda^{2l}}\right)^2\mu^2\equiv\left(\frac{\varrho}{\lambda}\right)^{4l}(\alpha^2-\mu)^2\mu, \quad (\mathfrak{l}^{8l})$$

geschrieben werden oder weiter, wenn man (2) beachtet, in der Form

$$\left(\varrho^{2l}\xi+\frac{2\varrho^{2l}\alpha i}{\lambda^{2l}}\right)^2\mu^2\equiv\left(\frac{\varrho}{\lambda}\right)^{4l}(\alpha^2-\mu)^2\alpha^2, \quad (\mathfrak{l}^{8l}).$$

Bestimmt man jetzt ξ nach der Kongruenz

$$\left(\varrho^{2l}\xi+\frac{2\varrho^{2l}\alpha i}{\lambda^{2l}}\right)\mu\equiv\left(\frac{\varrho}{\lambda}\right)^{2l}(\alpha^2-\mu)\alpha, \quad (\mathfrak{l}^{6l}),$$

so befriedigt es die oben gestellte Anforderung.

Wir bezeichnen mit $\mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2, \cdots, \mathfrak{l}_s$ die sämtlichen in $1+i$ aufgehenden Primideale des Körpers k, und es gehe $\mathfrak{l}_1$ genau zur l_1^{ten}, $\mathfrak{l}_2$ genau zur l_2^{ten}, usf., $\mathfrak{l}_s$ genau zur l_s^{ten} Potenz in $1+i$ auf, dann lehren die Kongruenzen (1) und (3), daß man zu diesen Primidealen stets ganze Zahlen $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_s$ in k finden kann derart, daß Kongruenzen von der Gestalt

$$\begin{aligned}
\xi_1\sqrt{\mu}&\equiv\bar{\alpha}_1^2, \quad (\mathfrak{l}_1^{4l_1}),\\
\xi_2\sqrt{\mu}&\equiv\bar{\alpha}_2^2, \quad (\mathfrak{l}_2^{4l_2}),\\
&\cdots\cdots\cdots\\
\xi_s\sqrt{\mu}&\equiv\bar{\alpha}_s^2, \quad (\mathfrak{l}_s^{4l_s})
\end{aligned}$$

statthaben, wo $\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \cdots, \bar{\alpha}_s$ ganze Zahlen in $K(\sqrt{\mu})$ bedeuten. Bestimmt man ferner eine ganze Zahl ξ nach folgenden Kongruenzen:

$$\begin{aligned}
\xi&\equiv\xi_1, \quad (\mathfrak{l}_1^{4l_1}),\\
\xi&\equiv\xi_2, \quad (\mathfrak{l}_2^{4l_2}),\\
&\cdots\cdots\\
\xi&\equiv\xi_s, \quad (\mathfrak{l}_s^{4l_s}),
\end{aligned}$$

so wird für diese Zahl ξ offenbar auch eine Kongruenz von der Form

$$\xi\sqrt{\mu}\equiv\bar{\alpha}^2, \quad (4)$$

bestehen müssen, wo $\bar{\alpha}$ eine ganze Zahl in $K(\sqrt{\mu})$ bedeutet, und dies ist die Aussage des Hilfssatzes 12.

Nun sind wir imstande, folgenden Satz zu beweisen:

Satz 13. Ist $\mathfrak{p}$ ein beliebiges primäres Primideal in k, so kann man stets eine primäre Zahl π in k bestimmen derart, daß $\mathfrak{p}^{hh'} = (\pi)$ wird.

Beweis. Da $\mathfrak{p}$ ein primäres Primideal sein soll, so können wir zunächst eine quadratisch primäre Zahl π^* in k bestimmen, so daß $\mathfrak{p}^{hh'} = (\pi^*)$ wird. Nun bestehen nach dem vorigen Satze immer solche ganze Zahlen ω in k, die eine Kongruenz von der Form

$$\omega\sqrt{\pi^*} \equiv \bar{\alpha}^2, \quad (4) \tag{4}$$

befriedigen, wo $\bar{\alpha}$ eine ganze Zahl in $K(\sqrt{\pi^*})$ bedeutet. Wir bestimmen ferner die Primideale $\mathfrak{q}_1, \cdots, \mathfrak{q}_m$ in k derart, daß die Beziehungen

$$\left(\left(\frac{\pi^*}{\mathfrak{q}_s}\right)\right) = \pm i, \quad \left(\left(\frac{\varepsilon_s}{\mathfrak{q}_s}\right)\right) = \pm i, \quad \left(\left(\frac{\varepsilon_t}{\mathfrak{q}_s}\right)\right) = +1 \quad (t+s) \tag{5}$$

$$(s = 1, 2, \cdots, m)$$

bestehen, und setzen

$$\mathfrak{q}_s^{hh'} = (\varkappa_s), \quad (s = 1, 2, \cdots, m),$$

so daß $\varkappa_1, \cdots, \varkappa_m$ ganze Zahlen in k bedeuten. Dann gilt für ω eine Kongruenz von der Gestalt

$$\omega \equiv \varepsilon \varkappa_1^{u_1} \cdots \varkappa_m^{u_m} \alpha^2, \quad (4),$$

wo die Exponenten $u_1, \cdots, u_m$ gewisse Werte 0, 1 haben, ε eine Einheit und α eine ganze Zahl in k vorstellt. Demnach können wir die Kongruenz (4) auf die Form

$$\varepsilon \varkappa_1^{u_1} \cdots \varkappa_m^{u_m} \sqrt{\pi^*} \equiv \bar{\beta}^2, \quad (4) \tag{6}$$

bringen, wo $\bar{\beta}$ eine ganze Zahl in $K(\sqrt{\pi^*})$ ist. Sind nun sämtliche Exponenten $u_1, \cdots, u_m$ gleich Null, so ist $\pi = \varepsilon^2 \pi^*$ eine Zahl, wie sie Satz (13) fordert. Wir machen demzufolge die gegenteilige Annahme, es seien etwa die Exponenten $u_1, \cdots, u_e$ gleich 1, die übrigen gleich 0, setzen

$$\varepsilon \varkappa_1^{u_1} \cdots \varkappa_e^{u_e} \sqrt{\pi^*} = \bar{\pi}$$

und betrachten den Körper $K(\sqrt{\bar{\pi}})$. Im Körper $K(\sqrt{\pi^*})$ bleiben die Primideale $\mathfrak{q}_1, \cdots, \mathfrak{q}_m$ wegen (5) unzerlegt, $\mathfrak{p}$ hingegen wird das Quadrat eines Primideals $\bar{\mathfrak{p}}$. Die Relativdiskriminante des Körpers $K(\sqrt{\bar{\pi}})$ bezüglich $K(\sqrt{\pi^*})$ enthält die Primideale $\mathfrak{q}_1, \cdots, \mathfrak{q}_e, \bar{\mathfrak{p}}$ als Faktoren und keine anderen mehr. Wir wollen zeigen, daß die Anzahl der (quadratischen) Geschlechter in $K(\sqrt{\bar{\pi}})$ gleich 1 ist.

Zu diesem Behufe beachten wir zunächst, daß die Klassenzahl des Körpers $K(\sqrt{\pi^*})$ eine ungerade Zahl ist (H. Rq. Z. § 33 im Beweise zu

Satz 47) und daß jede beliebige Einheit ε in k der Relativnorm $N_{\sqrt{\pi^*},k}(\bar{\varepsilon})$ einer Einheit in $K(\sqrt{\pi^*})$ gleich ist (H. Rq. Z. Satz 33). Bestehen ferner in $K(\sqrt{\pi^*})$ die Kongruenzen

$$\bar{\varepsilon}^{\frac{n(\mathfrak{q}_s)-1}{4}} \equiv i^{w_s}, \quad (\mathfrak{q}_s)$$
$$(s = 1, 2, \cdots, e),$$
$$\bar{\varepsilon}^{\frac{n(\bar{\mathfrak{p}})-1}{4}} \equiv i^{w}, \quad (\bar{\mathfrak{p}}),$$

wo $n(\mathfrak{q}_s)$, $n(\bar{\mathfrak{p}})$ die Normen genommen in $K(\sqrt{\pi^*})$ bedeuten und die Exponenten $w_1, \cdots, w_e$, w gewisse Werte 0, 1, 2, 3 haben, so müssen zugleich auch die Kongruenzen

$$S\bar{\varepsilon}^{\frac{n(\mathfrak{q}_s)-1}{4}} \equiv i^{w_s}, \quad (\mathfrak{q}_s)$$
$$(s = 1, 2, \cdots, m),$$
$$S\bar{\varepsilon}^{\frac{n(\bar{\mathfrak{p}})-1}{4}} \equiv i^{w}, \quad (\bar{\mathfrak{p}})$$

statthaben, wo $S = (\sqrt{\pi^*} : -\sqrt{\pi^*})$ ist. Es bestehen somit in $K(\sqrt{\pi^*})$ die Gleichungen

$$\left(\left(\frac{\bar{\varepsilon}}{\mathfrak{q}_s}\right)\right) = \left(\left(\frac{S\bar{\varepsilon}}{\mathfrak{q}_s}\right)\right)$$
$$(s = 1, 2, \cdots, m), \tag{7}$$
$$\left(\left(\frac{\bar{\varepsilon}}{\bar{\mathfrak{p}}}\right)\right) = \left(\left(\frac{S\bar{\varepsilon}}{\bar{\mathfrak{p}}}\right)\right).$$

Bedeutet schließlich $\bar{\mathfrak{r}}$ ein beliebiges Ideal in $K(\sqrt{\pi^*})$, so gilt stets die Gleichung

$$\left(\left(\frac{\varepsilon}{\bar{\mathfrak{r}}}\right)\right)_{K(\sqrt{\pi^*})} = \left(\left(\frac{\varepsilon}{N_{\sqrt{\pi^*},k}(\bar{\mathfrak{r}})}\right)\right)_k.$$

Hieraus folgern wir, daß wegen (5)

$$\left(\left(\frac{\varepsilon_s}{\mathfrak{q}_s}\right)\right) = \left(\left(\frac{\bar{\varepsilon}_s}{\mathfrak{q}_s}\right)\right)\left(\left(\frac{S\bar{\varepsilon}_s}{\mathfrak{q}_s}\right)\right) = -1,$$
$$\left(\left(\frac{\varepsilon_t}{\mathfrak{q}_s}\right)\right) = \left(\left(\frac{\bar{\varepsilon}_t}{\mathfrak{q}_s}\right)\right)\left(\left(\frac{S\bar{\varepsilon}_t}{\mathfrak{q}_s}\right)\right) = +1 \qquad (t \neq s) \tag{8}$$
$$(s = 1, 2, \cdots, m),$$
$$\left(\left(\frac{\varepsilon}{\bar{\mathfrak{p}}}\right)\right) = \left(\left(\frac{\bar{\varepsilon}}{\bar{\mathfrak{p}}}\right)\right)\left(\left(\frac{S\bar{\varepsilon}}{\bar{\mathfrak{p}}}\right)\right) = +1 \tag{8*}$$

sein muß, wo sämtliche Gleichungen für den Körper $K(\sqrt{\pi^*})$ gelten und $\varepsilon_s = N_{\sqrt{\pi^*},k}(\bar{\varepsilon}_s)$ gesetzt wurde.

Aus S_1 und S^*_1 ergibt sich weiter bei Berücksichtigung von (6)

$$\left(\left(\frac{\varepsilon_s}{a_s}\right)\right) = \pm i, \quad \left(\left(\frac{\varepsilon_t}{a_s}\right)\right) = \pm 1 \quad (t \neq s)$$
$$(s = 1, 2, \cdots, e),$$
$$\left(\left(\frac{\varepsilon}{\mathfrak{p}}\right)\right) = \pm 1.$$

woraus wir folgende Gleichungen ableiten:

$$\left(\frac{\varepsilon_s}{a_s}\right) = -1, \quad \left(\frac{\varepsilon_t}{a_s}\right) = +1 \quad (t \neq s)$$
$$(s = 1, 2, \cdots, e),$$
$$\left(\frac{\varepsilon}{\mathfrak{p}}\right) = +1.$$

Demzufolge ist die Anzahl der geschlechtsbestimmenden Charaktere für den Körper $K(\sqrt{\pi})$ gleich 1, womit unsere Behauptung als richtig erwiesen ist.

Aus dieser Tatsache ergibt sich, weil $\mathfrak{p}$ ein quadratisch primäres Primideal in $K(\sqrt{\pi^*})$ ist, genau in derselben Weise, wie bei Hilbert, Rq. Z. § 23, daß die oben gemachte Annahme, es seien einige der Exponenten $u_1, \cdots, u_m$ in (6) von Null verschieden, unstatthaft ist, womit Satz 13 vollständig bewiesen ist.

Auch die Umkehrung dieses Satzes ist gültig, wie der folgende Satz zeigt:

Satz 14. Wenn π eine primäre Zahl in k ist und wenn überdies $(\pi) = \mathfrak{p}^{hl}$ ist, wo $\mathfrak{p}$ ein Primideal in k bedeutet, so ist dieses Primideal $\mathfrak{p}$ stets primär.

Beweis. Nach Voraussetzung ist die Relativdiskriminante des Körpers $K(\sqrt{\pi})$ bezüglich k prim zu $1 + i$; sie enthält nur das eine Primideal $\mathfrak{p}$ des Körpers k als Faktor. Die Relativdiskriminante von $K(\sqrt[l]{\pi})$ bezüglich $K(\sqrt{\pi})$ enthält nur das in $\mathfrak{p}$ aufgehende Primideal $\mathfrak{p}$ des Körpers $K(\sqrt{\pi})$ als Faktor. Bezeichnen wir mit 2^{v^*} die Anzahl der Einheitenverbände, welche von denjenigen Einheiten in $K(\sqrt{\pi})$ gebildet werden, welche Relativnormen $N_{\sqrt[l]{\pi}, \sqrt{\pi}}$ von Einheiten in $K(\sqrt[l]{\pi})$ sind, so besteht, weil die Klassenzahl in $K(\sqrt{\pi})$ ungerade ist, die Beziehung

$$1 + v^* - 2m > 0.$$

Es ist also $v^* \geqq 2m$, und weil v^* nicht größer als $2m$ sein kann, muß $v^* = 2m$ sein. Somit ist jede Einheit in $K(\sqrt{\pi})$ die Relativnorm $N_{\sqrt[l]{\pi}, \sqrt{\pi}}$ einer Einheit des Körpers $K(\sqrt[l]{\pi})$. Da jedoch auch jede Einheit

in k der Relativnorm $N_{\sqrt{\pi},k}$ einer Einheit in $K(\sqrt{\pi})$ gleich ist, so folgt hieraus, daß jede Einheit in k die Relativnorm $N_{\sqrt[4]{\pi},k}$ von einer Einheit in $K(\sqrt[4]{\pi})$ sein muß. Es ist demnach, wenn ξ eine beliebige Einheit in k vorstellt,

$$\left(\left(\frac{\xi, \pi}{\mathfrak{p}}\right)\right) = \left(\left(\frac{\xi}{\mathfrak{p}}\right)\right) = +1,$$

d. h. $\mathfrak{p}$ ist ein primäres Primideal.

II. Teil.

§ 11.

Eigenschaften primärer Ideale und Zahlen.

Satz 15. Sind α_1 und α_2 primäre Zahlen, so ist auch ihr Produkt $\alpha_1\alpha_2$ primär.

Beweis. Wegen der über α_1 und α_2 gemachten Voraussetzung sind die Relativdiskriminanten $D_{\sqrt[4]{\alpha_1},k}$ und $D_{\sqrt[4]{\alpha_2},k}$ zu $1+i$ prim; demnach muß auch die Relativdiskriminante des aus $K(\sqrt[4]{\alpha_1})$ und $K(\sqrt[4]{\alpha_2})$ zusammengesetzten Körprrs K' in bezug auf k zu $1+i$ prim ausfallen; folglich auch die Relativdiskriminante $D_{\sqrt[4]{\alpha_1\alpha_2},k}$ des Unterkörpers $K(\sqrt[4]{\alpha_1\alpha_2})$ von K'.

Auf Grund des speziellen Reziprozitätsgesetzes, welches wir nunmehr für den Körper k als gültig annehmen, und der bisher bewiesenen Sätze beweist man nun leicht die Sätze 37, 38 und 39 der Lietzmannschen Dissertation. Sonach kann Satz 13 folgendermaßen verallgemeinert werden:

Satz 16. Ist $\mathfrak{a}$ ein beliebiges primäres Ideal in k, so ist es stets möglich, eine primäre Zahl α in k derart zu bestimmen, daß $\mathfrak{a}^{h h'} = (\alpha)$ wird.

Beweis. Es sei α^* eine ganze Zahl in k, so daß $\mathfrak{a}^{h h'} = (\alpha^*)$ wird. Nach Satz 10 besteht für α^* nach dem Modul 8 eine Kongruenz von der Form

$$\alpha^* \equiv \varepsilon \varkappa_1^{\nu_1} \cdots \varkappa_m^{\nu_m} \pi_1^{w_1} \cdots \pi_s^{w_s} \beta^4, \quad (8),$$

wo ε eine Einheit in k ist und die Bedeutung der übrigen Größen in dieser Kongruenz aus Satz 10 zu entnehmen ist. Wir nehmen hier insbesondere an, die Zahlen $\pi_1, \cdots, \pi_s$ seien *biquadratisch* primäre Zahlen. Es ist dann $\alpha\varepsilon^{-1}\varkappa_1^{4-\nu_1} \cdots \varkappa_m^{4-\nu_m}$ eine primäre Zahl. Es gilt demnach nach Satz 38 der Lietzmannschen Dissertation die Gleichung

$$\prod_{(w)}{}' \left(\left(\frac{\nu, \alpha^* \varepsilon^{-1} \varkappa_1^{4-\nu_1} \cdots \varkappa_m^{4-\nu_m}}{w}\right)\right) = +1$$

für jede beliebige zu $1+i$ prime ganze Zahl ν in k, wenn das Produkt $\prod_{(\mathfrak{w})}'$ über sämtliche zu $1+i$ prime Primideale des Körpers k erstreckt wird. Setzen wir insbesondere für ν die Einheiten $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_m$ ein, so ergibt sich bei Berücksichtigung der Eigenschaften der Primideale $\mathfrak{q}_1, \cdots, \mathfrak{q}_m$ sofort, daß $v_1, \cdots, v_m$ sämtlich gleich 0 sein müssen; daher ist $\alpha = \alpha^* \varepsilon^{-1}$ eine primäre Zahl, w. z. b. w.

Auch die Umkehrung dieses Satzes gilt. Sie lautet:

Satz 17. Wenn $\mathfrak{a}$ ein zu $1+i$ primes Ideal in k und α eine ganze Zahl in k ist, so daß $\mathfrak{a}^{h h'} = (\alpha)$ wird und überdies die Zahl α primär ausfällt, so ist $\mathfrak{a}$ ein primäres Ideal in k.

Den Beweis dieses Satzes gewinnen wir aus Satz 38 der Lietzmannschen Dissertation, wenn wir in der Gleichung dieses Satzes für ν eine beliebige Einheit ξ in k und für μ die Zahl α nehmen.

Wir wollen nun folgenden Satz beweisen:

Satz 18. Eine beliebige ganze Zahl μ des Körpers k ist stets dann und nur dann primär, wenn sie einer Kongruenz von der Gestalt

$$\mu \equiv \pi_1^{w_1} \cdots \pi_s^{w_s} \alpha^4, \quad (8) \tag{1}$$

Genüge leistet, wo $w_1, \cdots, w_s$ gewisse Werte 0, 1 haben, α eine ganze Zahl in k ist und die *biquadratisch* primären Zahlen $\pi_1, \cdots, \pi_s$ gemäß Satz 10 bestimmt worden sind.

Beweis. Genügt μ der Kongruenz (1), so ist $\mu \pi_1^{4-w_1} \cdots \pi_s^{4-w_s}$ eine primäre Zahl. Da aber auch $\pi_1^{w_1} \cdots \pi_s^{w_s}$ primär ist, so muß auch das Produkt μ dieser Zahlen primär sein.

Ist umgekehrt μ primär, so gilt für μ sicher eine Kongruenz

$$\mu \equiv \varepsilon \pi_1^{v_1} \cdots \pi_m^{v_m} \pi_1^{w_1} \cdots \pi_s^{w_s} \alpha^4, \quad (8),$$

wo ε eine Einheit in k ist und die Bedeutung der übrigen Größen aus Satz 10 zu entnehmen ist. Dieser Kongruenz zufolge muß auch

$$\mu \varepsilon^{-1} \pi_1^{4-v_1} \cdots \pi_m^{4-v_m}$$

eine primäre Zahl sein. Berücksichtigen wir nun den Satz 38 der Lietzmannschen Dissertation und verfahren wie im Beweise zu Satz 17, so überzeugen wir uns leicht, daß $v_1 = v_2 = \cdots = v_m = 0$ sein muß. Es ist daher auch $\mu \varepsilon^{-1}$ primär und somit auch ε. Demnach muß ε die vierte Potenz einer Einheit in k sein, weil die Klassenzahl von k ungerade ist. Man vergleiche hierzu H. Rq. Z., Satz 28. Somit gilt wirklich für μ eine Kongruenz von der Form (1).

§ 12.

Die hyperprimären Ideale und Zahlen.

Definition 5. Ist α eine ganze Zahl in k, für welche eine Kongruenz von der Form

$$\alpha \equiv \beta^4, \quad \left(\mathfrak{l}_1^{6l_1+1} \cdots \mathfrak{l}_s^{6l_s+1}\right)$$

statthat, wo β eine ganze Zahl in k ist und $\mathfrak{l}_1, \cdots, \mathfrak{l}_s$; $l_1, \cdots, l_s$ die frühere Bedeutung haben, so heiße α eine *biquadratisch hyperprimäre* oder kurz *hyperprimäre Zahl* des Körpers k.

Für hyperprimäre Zahlen gilt Satz 41 der Lietzmannschen Dissertation.

Definition 6. Ist $\mathfrak{a}$ ein primäres Ideal in k, für welches die Gleichungen

$$\left(\left(\frac{\lambda_1}{\mathfrak{a}}\right)\right) = +1, \cdots, \quad \left(\left(\frac{\lambda_z}{\mathfrak{a}}\right)\right) = +1$$

bestehen, so heiße $\mathfrak{a}$ ein *biquadratisch hyperprimäres* oder kurz *hyperprimäres Ideal* des Körpers k.

Es gilt der Satz:

Satz 19. Ist $\mathfrak{a}$ ein hyperprimäres Ideal in k, so kann man stets eine hyperprimäre Zahl α in k derart bestimmen, daß $\mathfrak{a}^{hh'} = (\alpha)$ wird.

Beweis. Es sei α^* irgend eine ganze Zahl in k, so daß $\mathfrak{a}^{hh'} = (\alpha^*)$ wird, so können wir dem Satze 10* gemäß für α^* eine Kongruenz von der Form

$$\alpha^* \equiv \varepsilon^* \varkappa_1^{v_1} \cdots \varkappa_m^{v_m} \pi_1^{w_1} \cdots \varkappa_s^{w_z} \beta^4, \quad \left(\mathfrak{l}_1^{6l_1+1} \cdots \mathfrak{l}_s^{6l_s+1}\right)$$

aufstellen, wo ε^* eine Einheit, β eine ganze Zahl in k bedeutet und die Bedeutung der übrigen Größen aus Satz 10* zu ersehen ist.

Die Zahl

$$\mu = \alpha^* \varepsilon^{*3} \varkappa_1^{4-v_1} \cdots \varkappa_m^{4-v_m} \pi_1^{4-w_1} \cdots \pi_s^{4-w_z}$$

ist eine hyperprimäre Zahl in k. Folglich müssen die Gleichungen

$$(1) \quad \begin{cases} \prod_{(\mathfrak{w})}{}' \left(\left(\frac{\varepsilon_s, \mu}{\mathfrak{w}}\right)\right) = +1, & (s = 1, 2, \cdots, m), \\ \prod_{(\mathfrak{w})}{}' \left(\left(\frac{\lambda_t, \mu}{\mathfrak{w}}\right)\right) = +1, & (t = 1, 2, \cdots, z) \end{cases}$$

statthaben. Aus (1) ergeben sich weiter die Beziehungen

$$(2) \quad \left(\left(\frac{\varepsilon_s}{\alpha^* \varkappa_1^{4-v_1} \cdots \varkappa_m^{4-v_m} \pi_1^{4-w_1} \cdots \pi_s^{4-w_z}}\right)\right) = \left(\left(\frac{\varepsilon_s}{\mathfrak{a}}\right)\right) \left(\left(\frac{\varepsilon_s}{\mathfrak{q}_1}\right)\right)^{-v_1} \cdots \left(\left(\frac{\varepsilon_s}{\mathfrak{q}_m}\right)\right)^{-v_m} \left(\left(\frac{\varepsilon_s}{\mathfrak{p}_1}\right)\right)^{-w_1} \cdots \left(\left(\frac{\varepsilon_s}{\mathfrak{p}_s}\right)\right)^{-w_z} = +1,$$

$$(s = 1, 2, \cdots, m),$$

$$\left(\left(\frac{\lambda_t}{\alpha^{\varkappa}\mathfrak{a}_1^{\varkappa_1}\cdots\mathfrak{a}_m^{\varkappa_m}\mathfrak{b}_1^{\varkappa_1}\cdots\mathfrak{b}_s^{\varkappa_s}}\right)\right)$$

(3) $$= \left(\left(\frac{\lambda_t}{\alpha}\right)\right)\left(\left(\frac{\lambda_t}{\mathfrak{a}_1}\right)\right)^{-\varkappa_1}\cdots\left(\left(\frac{\lambda_t}{\mathfrak{a}_m}\right)\right)^{-\varkappa_m}\left(\left(\frac{\lambda_t}{\mathfrak{b}_1}\right)\right)^{-\varkappa_1}\cdots\left(\left(\frac{\lambda_t}{\mathfrak{b}_s}\right)\right)^{-\varkappa_s}=+1,$$

$$(t=1,2,\cdots,s).$$

Berücksichtigen wir jetzt die Eigenschaften der Ideale $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1, \cdots, \mathfrak{a}_m$, $\mathfrak{b}_1, \cdots, \mathfrak{b}_s$, so ergibt sich zunächst aus (2), daß sämtliche Exponenten $\varkappa_1, \cdots, \varkappa_m$ gleich 0 sein müssen: dann folgt aber aus (3), daß auch die Exponenten $\varkappa_1, \cdots, \varkappa_s$ sämtlich gleich 0 werden müssen. Demnach ist $\alpha = \varepsilon^{\varkappa_1}\alpha^*$ eine Zahl von der im Satz 19 verlangten Eigenschaft.

Die Umkehrung des Satzes 20 lautet wie folgt:

Satz 20. Ist α eine hyperprimäre Zahl in k, so ist

$$\left(\left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha}\right)\right)=-1,\cdots,\left(\left(\frac{\varepsilon_m}{\alpha}\right)\right)=-1,$$
$$\left(\left(\frac{\lambda_1}{\alpha}\right)\right)=-1,\cdots,\left(\left(\frac{\lambda_m}{\alpha}\right)\right)=+1.$$

Der Beweis folgt unmittelbar aus Satz 41 der Lietzmannschen Dissertation.

§ 13.

Das Symbol $\left(\left(\frac{\nu,\mu}{\mathfrak{l}}\right)\right)$ und das biquadratische Reziprozitätsgesetz.

Es gelingt jetzt leicht, nach dem Vorbilde Hilberts (H. Rq. Z. § 32 ff.) das biquadratische Reziprozitätsgesetz im Körper k abzuleiten.

Es seien $\mathfrak{l}_1, \cdots, \mathfrak{l}_s$ die in $1-i$ aufgehenden Primideale des Körpers k, und es gehe $\mathfrak{l}_1$ in $1+i$ genau zur l_1^{ten}; $\mathfrak{l}_2, \cdots, \mathfrak{l}_s$ bez. genau zur $l_2^{\text{ten}}, \cdots, l_s^{\text{ten}}$ Potenz in $1+i$ auf.

Sind ν, μ zwei zu $1+i$ prime ganze Zahlen in k, so bestimme man eine ganze Zahl μ^* nach den Kongruenzen

(1) $$\begin{aligned}\mu^* &\equiv \mu, \quad (\mathfrak{l}_1^{6l_1}),\\ \mu^* &\equiv \alpha^4, \quad (\mathfrak{l}_2^{6l_2}\cdots\mathfrak{l}_s^{6l_s});\end{aligned}$$

wenn hingegen ν, μ beliebige ganze Zahlen in k sind und $\mathfrak{l}_1$ in μ genau zur α^{ten} Potenz aufgeht, bestimme man μ^*, so daß

(2) $$\begin{aligned}\mu^* &\equiv \mu, \quad (\mathfrak{l}_1^{6l_1+\alpha+1}),\\ \mu^* &\equiv \alpha^4, \quad (\mathfrak{l}_2^{6l_2+1}\cdots\mathfrak{l}_s^{6l_s+1})\end{aligned}$$

wird: hierbei ist α eine beliebige zu $\mathfrak{l}_2, \cdots, \mathfrak{l}_s$ prime ganze Zahl in k.

Definiert man dann das Symbol $\left(\left(\frac{\nu,\mu}{\mathfrak{l}_1}\right)\right)$ durch die Gleichung

(3) $$\left(\left(\frac{\nu,\mu}{\mathfrak{l}_1}\right)\right)=\prod_{(\mathfrak{w})}{}'\left(\left(\frac{\nu,\mu^*}{\mathfrak{w}}\right)\right)^{-1},$$

wo das Produkt $\prod_{(\mathfrak{w})}'$ über sämtliche zu $1+i$ primen Primideale in k zu erstrecken ist, so ist ν dann und nur dann biquadratischer Normenrest des Körpers $K(\sqrt[4]{\mu})$ nach $\mathfrak{l}_1$, wenn

$$\left(\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}_1}\right)\right) = +1 \tag{4}$$

ausfällt.

Sind ν, μ zwei beliebige von Null verschiedene ganze Zahlen in k, dann gilt stets die Gleichung

$$\prod_{(\mathfrak{w})} \left(\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{w}}\right)\right) = +1, \tag{5}$$

wo das Produkt über alle Primideale $\mathfrak{w}$ des Körpers k zu erstrecken ist (L. § 17, Satz 48).

Die Gleichung (5) stellt das biquadratische Reziprozitätsgesetz in allgemeinster Gestalt dar.

Wir möchten an dieser Stelle nur noch eines besonderen Falles dieses allgemeinen Reziprozitätsgesetzes erwähnen.

Satz 21. Sind $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$ zwei beliebige *quadratisch primäre Primideale* und setzt man

$$\mathfrak{p}_1^{h h'} = (\pi_1), \quad \mathfrak{p}_2^{h h'} = (\pi_2),$$

so daß π_1, π_2 *quadratisch primäre Zahlen* in k vorstellen, so gilt das Reziprozitätsgesetz

$$\left(\left(\frac{\pi_1}{\mathfrak{p}_2}\right)\right) = \left(\left(\frac{\pi_2}{\mathfrak{p}_1}\right)\right).$$

Beweis. Es seien die Primideale $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$ etwa so beschaffen, daß

$$\left(\left(\frac{\varepsilon_s}{\mathfrak{p}_1}\right)\right) = c_s, \quad \left(\frac{\lambda_t}{\mathfrak{p}_1}\right) = d_t,$$

$$\left(\left(\frac{\varepsilon_s}{\mathfrak{p}_2}\right)\right) = c_s', \quad \left(\frac{\lambda_t}{\mathfrak{p}_2}\right) = d_t',$$

$$(s = 1, 2, \cdots, m, \quad t = 1, 2, \cdots, \varkappa)$$

wird; dabei haben $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_m$; $\lambda_1, \cdots, \lambda_\varkappa$ die vorige Bedeutung und c_s, c_s', d_t, d_t' bedeuten gewisse Werte ± 1, Wir bestimmen ein Primideal $\mathfrak{r}$ in k, welches die Gleichungen

$$\left(\left(\frac{\varepsilon_s}{\mathfrak{r}}\right)\right) = \pm c_s'', \quad \left(\left(\frac{\lambda_t}{\mathfrak{r}}\right)\right) = \pm d_t'',$$

$$(s = 1, 2, \cdots, m; \quad t = 1, 2, \cdots, \varkappa)$$

befriedigt; hierbei ist unter c_s'', d_t'' der Wert $+1$ zu verstehen, wenn $c_s = c_s'$ bez. $d_t = d_t'$ ist, und der Wert i, wenn $c_s = -c_s'$ bez. $d_t = -d_t'$ ausfällt. Dann ist das Ideal $\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\mathfrak{r}^2$ primär. Setzen wir $\mathfrak{r}^{h h'} = (\varrho)$, so

daß ϱ eine ganze Zahl in k wird, so kann man eine Einheit ε in k bestimmen derart, daß $\varepsilon\pi_1\pi_2\varrho^2$ primär wird. Nun muß für $\varepsilon\pi_1\pi_2\varrho^2$ gewiß eine Kongruenz von der Form

$$\varepsilon\pi_1\pi_2\varrho^2 \equiv \alpha^2, \quad (4)$$

bestehen, wo α eine ganze Zahl in k vorstellt, woraus sich für ε eine Kongruenz von der Gestalt

$$\varepsilon \equiv \beta^2, \quad (4)$$

ergibt, wo β wieder eine ganze Zahl in k bedeutet. Demnach muß ε gleich dem Quadrate einer Einheit η in k werden. (H. Rq. Z. § 21, Satz 28), so daß $\eta^2\pi_1\pi_2\varrho^2$ eine primäre Zahl ist.

Beachten wir nun, daß das Produkt

$$\prod_{(\mathfrak{w})}{}' \left(\left(\frac{\pi_1,\ \eta^2\pi_1\pi_2\varrho^2}{\mathfrak{w}}\right)\right) = +1$$

sein muß, wenn man es über alle zu $1+i$ primen Primideale $\mathfrak{w}$ des Körpers k erstreckt (L. § 14, Satz 38), so folgt hieraus unmittelbar die Gleichung

$$\left(\left(\frac{\pi_1}{\mathfrak{p}_2}\right)\right)\left(\left(\frac{\pi_2}{\mathfrak{p}_1}\right)\right)^{-1}\left(\frac{\pi_1}{\mathfrak{r}}\right)\left(\frac{\varrho}{\mathfrak{p}_1}\right) = +1. \quad (6)$$

Es ist aber nach der Theorie des relativquadratischen Zahlkörpers (H. Rq. Z. § 25, Satz 36)

$$\left(\frac{\pi_1}{\mathfrak{r}}\right)\left(\frac{\varrho}{\mathfrak{p}_1}\right) = +1,$$

womit sich aus (6) die Richtigkeit des Satzes 21 ergibt.

§ 14.

Ein Satz über die Relativdiskriminante $D_{\sqrt[l]{\mu},k}$.

Satz 22. Es sei $\mathfrak{l}=\mathfrak{l}_1$ ein beliebiges in $1+i$ genau zur l^{ten} Potenz enthaltenes Primideal des Körpers k und μ eine ganze Zahl in k, die genau durch $\mathfrak{l}^a$ teilbar und nicht das Quadrat einer ganzen Zahl in k ist. Soll die Relativdiskriminante $D_{\sqrt[l]{\mu},k}$ prim zu $\mathfrak{l}$ sein, so muß nach Satz 1 a durch 4 teilbar sein, und wir können dann stets eine zu $\mathfrak{l}$ prime ganze Zahl μ_1 in k bestimmen, so daß $K(\sqrt[l]{\mu}) = K(\sqrt[l]{\mu_1})$ wird.

Wir bezeichnen mit $\mathfrak{l}_2, \cdots, \mathfrak{l}_s$ die noch außer $\mathfrak{l}$ in $1+i$ aufgehenden Primideale des Körpers k und bestimmen die ganzen Zahlen $\lambda = \lambda_1$, $\lambda_2, \cdots, \lambda_s$ derart, daß

$$\mathfrak{l}^{h h'} = (\lambda), \quad \mathfrak{l}_2^{h h'} = (\lambda_2), \cdots, \mathfrak{l}_s^{h h'} = (\lambda_s)$$

wird. Ferner möge $\mathfrak{p}$ ein primäres Primideal in k sein, für welches die Beziehungen

(1) $$\left(\left(\frac{\lambda}{\mathfrak{p}}\right)\right) = \pm i, \quad \left(\left(\frac{\lambda_2}{\mathfrak{p}}\right)\right) = +1, \cdots, \left(\left(\frac{\lambda_s}{\mathfrak{p}}\right)\right) = +1$$

gelten. Bedeutet dann π eine primäre Zahl in k, so daß man $\mathfrak{p}^{hh'} = (\pi)$ setzen kann, so ist die Relativdiskriminante $D_{\sqrt{\mu},k}$ stets dann und nur dann prim zu $\mathfrak{l}$, wenn eine Kongruenz von der Form

(2) $$\mu_1 \equiv \pi^w \alpha^4, \quad (\mathfrak{l}^6)$$

statthat, wo w einen der Werte 0, 1 hat und α eine ganze Zahl in k bedeutet.

Beweis. Besteht eine Kongruenz von der Gestalt (2), so ist wegen Satz 2, weil $\pi^w \alpha^4$ eine primäre Zahl ist, gewiß die Diskriminante $D_{\sqrt{\mu_1},k}$ zu $\mathfrak{l}$ prim. Somit haben wir nur noch die Umkehrung davon zu beweisen.

Es mögen die Primideale $\mathfrak{l}_2, \cdots, \mathfrak{l}_s$ beziehungsweise genau zur $\mathfrak{l}_2^{\text{ten}}, \cdots, \mathfrak{l}_s^{\text{ten}}$ Potenz in $1+i$ aufgehen. Dann bestimmen wir eine ganze Zahl μ^* in k, so daß die Kongruenzen

(3) $$\mu_1 \equiv \mu^*, \quad (\mathfrak{l}^6),$$

(4) $$\mu^* \equiv \beta^4, \quad (\mathfrak{l}_2^{6l_2} \cdots \mathfrak{l}_s^{6l_s})$$

stattfinden, wo β eine zu $\mathfrak{l}_2 \cdots \mathfrak{l}_s$ prime ganze Zahl in k vorstellt. Die Zahl μ^* ist diesen Kongruenzen zufolge sicherlich primär, und es muß für dieselbe nach Satz 10 und Satz 18 eine Kongruenz von der Form

$$\mu^* \equiv \pi^w \pi_2^{w_2} \cdots \pi_s^{w_s} \gamma^4, \qquad (8)$$

bestehen, wo die Exponenten $w, w_2, \cdots, w_s$ gewisse Werte 0, 1 haben und γ eine ganze Zahl in k bedeutet. Hierbei seien $\pi_2, \cdots, \pi_s$ primäre Zahlen und die entsprechenden Primideale $\mathfrak{p}_2, \cdots, \mathfrak{p}_s$ des Satzes 10 als primäre Primideale so bestimmt, daß für dieselben die Gleichungen

$$\left(\left(\frac{\lambda_s}{\mathfrak{p}_s}\right)\right) = \pm i, \quad \left(\left(\frac{\lambda_t}{\mathfrak{p}_s}\right)\right) = +1, \qquad (s \neq t),$$
$$(s = 2, 3, \cdots, s)$$

gelten.

Ist nun μ^* quadratisch hyperprimär, so müssen die Exponenten $w, w_2, \cdots, w_s$ sämtlich gleich 0 sein; ist es jedoch nur quadratisch primär und nicht hyperprimär, so ist wegen (4)

$$\left(\frac{\mu^*}{\mathfrak{l}_2}\right) = +1, \cdots, \left(\frac{\mu^*}{\mathfrak{l}_s}\right) = +1;$$

folglich muß $\left(\frac{\mu^*}{\mathfrak{l}}\right) = -1$ sein. Demnach muß nach Satz 11 $w_2 = 0, \cdots, w_s = 0$ und $w_1 = 1$ ausfallen, und es besteht in der Tat für μ_1 eine Kongruenz von der Form (2). Da aber wegen (1) auch stets

$$\left(\left(\frac{\pi}{\mathfrak{l}}\right)\right) = \pm i, \quad \left(\left(\frac{\pi}{\mathfrak{l}_2}\right)\right) = +1, \cdots, \left(\left(\frac{\pi}{\mathfrak{l}_s}\right)\right) = +1$$

ist, so befriedigt die laut (2) bestimmte Zahl $\pi^{\varkappa}\alpha^{4}$ schon von selbst eine Kongruenz von der Gestalt

$$\varkappa^{\varkappa}\alpha^{4} \equiv \beta^{4}, \quad (\mathfrak{l}_2^{\varepsilon_2 4} \cdots \mathfrak{l}_z^{\varepsilon_z 4})$$

und kann als μ^{*} der Kongruenz (3) und (4) genommen werden. Beachtet man endlich, daß wegen (3) die Diskriminanten $D_{\sqrt[4]{\mu_1},k}$ und $D_{\sqrt[4]{\mu^{*}},k}$ entweder beide durch $\mathfrak{l}$ teilbar oder beide zu $\mathfrak{l}$ prim sind, so ist damit Satz 22 bewiesen.

§ 15.

Die Anzahl der biquadratischen Normenreste.

Satz 23. Wenn $\mathfrak{p}$ ein zu $1+i$ primes Primideal des Körpers k ist, das nicht in der Relativdiskriminante $D_{\sqrt[4]{\mu},k}$ des relativbiquadratischen Körpers $K(\sqrt[4]{\mu})$ aufgeht, so ist *jede* zu $\mathfrak{p}$ prime Zahl ν biquadratischer Normenrest des Körpers $K(\sqrt[4]{\mu})$ nach $\mathfrak{p}$.

Ist dagegen $\mathfrak{p}$ ein zu $1+i$ primes Primideal des Körpers k, das wohl in der Relativdiskriminante $D_{\sqrt[4]{\mu},k}$ des Körpers $K(\sqrt[4]{\mu})$, aber nicht in der Relativdiskriminante $D_{\sqrt{\mu},k}$ des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ aufgeht, und bedeutet e einen beliebigen positiven ganzen rationalen Exponenten, so sind von allen vorhandenen zu $\mathfrak{p}$ primen und nach $\mathfrak{p}^{e}$ einander inkongruenten Zahlen in k die *Hälfte* biquadratische Normenreste des Körpers $K(\sqrt[4]{\mu})$ nach $\mathfrak{p}$; geht hingegen $\mathfrak{p}$ auch in der Relativdiskriminante $D_{\sqrt[4]{\mu},k}$ des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ auf, so sind von den erwähnten zu $\mathfrak{p}$ primen Zahlen nur der *vierte Teil* biquadratische Normenreste des Körpers $K(\sqrt[4]{\mu})$ nach $\mathfrak{p}$.

Der Beweis für diesen Satz ergibt sich leicht aus den Eigenschaften des Symbols $\left(\left(\frac{\nu,\mu}{\mathfrak{p}}\right)\right)$. Man sehe hierzu L. § 7.

Wir gehen nun zur Bestimmung der Anzahl der biquadratischen Normenreste nach einem in $1+i$ aufgehenden Primideal über und wollen den folgenden Satz beweisen:

Satz 24. Es sei $\mathfrak{l}_1$ ein Primfaktor von $1+i$ und zwar gehe $\mathfrak{l}_1$ genau zur l_1^{ten} Potenz in $1+i$ auf: Wenn dann die Relativdiskriminante $D_{\sqrt[4]{\mu},k}$ des Körpers $K(\sqrt[4]{\mu})$ nicht durch $\mathfrak{l}_1$ teilbar ist, so ist *jede* zu $\mathfrak{l}_1$ prime ganze Zahl ν in k Normenrest des Körpers $K(\sqrt[4]{\mu})$ nach $\mathfrak{l}_1$. Ist dagegen die Relativdiskriminante $D_{\sqrt[4]{\mu},k}$ durch $\mathfrak{l}_1$ teilbar, die Relativdiskriminante $D_{\sqrt{\mu},k}$ des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ jedoch zu $\mathfrak{l}_1$ prim, und bezeichnet man mit L einen beliebigen Exponenten größer als $6l$, so sind von

allen vorhandenen zu $\mathfrak{l}_1$ primen und nach $\mathfrak{l}_1^L$ inkongruenten Zahlen ν in k genau die *Hälfte* Normenreste des Körpers $K(\sqrt[4]{\mu})$ nach $\mathfrak{l}_1$. Ist endlich auch die Relativdiskriminante $D_{\sqrt{\mu},k}$ durch $\mathfrak{l}_1$ teilbar, so sind von allen vorhandenen zu $\mathfrak{l}_1$ primen und nach $\mathfrak{l}_1^L$ inkongruenten Zahlen ν in k genau der *vierte Teil* Normenreste des Körpers $K(\sqrt[4]{\mu})$ nach $\mathfrak{l}_1$.

Beweis. Wenn $\mathfrak{l}_1$ nicht in der Relativdiskriminante $D_{\sqrt[4]{\mu},k}$ von $K(\sqrt[4]{\mu})$ aufgeht, so können wir μ prim zu $\mathfrak{l}_1$ annehmen. Eine gemäß (1) des § 13 zu μ bestimmte Zahl μ^* wird dann laut Satz 18 und 11 einer Kongruenz von der Form

$$\mu^* \equiv \pi_1^{w_1} \beta^4, \quad (8)$$

Genüge leisten müssen, wo π_1 eine wie in Satz 18 bestimmte primäre Zahl ist, w_1 einen der Werte 0 oder 1 hat, und β eine ganze Zahl in k bedeutet. Wir können demnach setzen

$$\left(\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}_1}\right)\right) = \prod_{(\mathfrak{w})}{}' \left(\left(\frac{\nu, \pi_1^{w_1}}{\mathfrak{w}}\right)\right)^{-1}.$$

Es wird somit, weil π_1 primär ist, $\left(\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}_1}\right)\right) = +1$, wie es Satz 24 fordert.

Um aber die zweite Aussage des Satzes zu beweisen, nehmen wir zunächst an, μ sei prim zu $\mathfrak{l}_1$. Nun stellen wir für die zu μ nach (1) des § 13 bestimmte ganze Zahl μ^* eine Kongruenz von der Form (1) des § 7 auf, verstehen jedoch hier wie in der Folge stets unter $\pi_1, \cdots, \pi_s$ *primäre* Zahlen. Es sei

$$(1) \qquad \mu^* \equiv \varepsilon_1^{u_1} \cdots \varepsilon_m^{u_m} \varkappa_1^{v_1} \cdots \varkappa_m^{v_m} \pi_1^{w_1} \cdots \pi_s^{w_s} \alpha^4, \quad (8),$$

wo die Exponenten $u_1, \cdots, u_m$; $v_1, \cdots, v_m$ gewisse Werte 0, 1, 2, 3, hingegen die Exponenten $w_1, \cdots, w_s$ nur gewisse Werte 0, 1 haben können, und a eine geeignete ganze Zahl in k bedeutet.

Soll die Relativdiskriminante $D_{\sqrt{\mu},k}$ des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ durch $\mathfrak{l}_1$ teilbar sein, so ist dazu notwendig und hinreichend, daß mindestens einer der Exponenten $u_1, \cdots, u_m, v_1, \cdots, v_m$ in (1) ungerade sei. Denn es darf in diesem Falle μ nicht einer Quadratzahl in k nach dem Modul $\mathfrak{l}_1^{4h}$ kongruent ausfallen. Wären jedoch sämtliche Exponenten $u_1, \cdots, u_m$, $v_1, \cdots, v_m$ gerade, so wäre nach (1) μ^* einer Quadratzahl in k nach dem Modul $\mathfrak{l}_1^{4h}$ kongruent und demzufolge würde dies wegen (1) des § 13 auch für μ der Fall sein. Wenn hingegen auch nur einer der Exponenten $u_1, \cdots, u_m, v_1, \cdots, v_m$ ungerade ist, so kann μ keiner Quadratzahl in k nach dem Modul $\mathfrak{l}_1^{4h}$ kongruent sein. Denn wäre dies der Fall, so müßte wegen (1) des § 13 die Zahl μ^* einer Quadratzahl nach dem Mo-

dul 4 kongruent sein, was der Annahme über die Exponenten $u_1, \cdots, u_m$, $v_1, \cdots, v_m$ widerspricht, wie aus (1) zu ersehen ist.

Wir nehmen nun an, es gebe unter den Exponenten $u_1, \cdots, u_m$, $v_1, \cdots, v_m$ mindestens einen, der ungerade ist. Dann zeigt man leicht unter Zuhilfenahme der Eigenschaften der Primideale $\mathfrak{q}_1, \cdots, \mathfrak{q}_m, \mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_s$, daß das Symbol $\left(\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}_1}\right)\right)$ für solche Zahlen ν, die zu $\mathfrak{l}_1$ prim sind, die Werte $\pm i$ haben kann. In der Tat nehmen wir zunächst an, es seien sämtliche Exponenten v, aber nicht alle u gleich Null, und es sei etwa u_s von Null verschieden und ungerade, so wird

$$(2) \qquad \left(\left(\frac{\varkappa_s, \mu}{\mathfrak{l}_1}\right)\right) = \prod_{(\mathfrak{w})}{}' \left(\left(\frac{\varkappa_s, \mu^*}{\mathfrak{w}}\right)\right) = \left(\left(\frac{\varepsilon_s}{\mathfrak{q}_s}\right)\right)^{u_s} = \pm i.$$

Sind dagegen nicht alle v gleich Null und etwa v_s von Null verschieden und ungerade, so schließen wir ähnlich, daß

$$(3) \qquad \left(\left(\frac{\varepsilon_s, \mu}{\mathfrak{l}_1}\right)\right) = \prod_{(\mathfrak{w})}{}' \left(\left(\frac{\varepsilon_s, \mu^*}{\mathfrak{w}}\right)\right) = \left(\left(\frac{\varepsilon_s}{\mathfrak{q}_s}\right)\right)^{v_s} = \pm i$$

sein muß.

Soll ferner die Relativdiskriminante $D_{\sqrt{\mu}, k}$ des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ prim zu $\mathfrak{l}_1$ sein, so folgt ähnlich, wie in dem eben erledigten Falle, daß dazu notwendig und hinreichend ist, daß die Exponenten $u_1, \cdots, u_m, v_1, \cdots, v_m$ sämtlich gerade ausfallen; soll aber $D_{\sqrt{\mu}, k}$ durch $\mathfrak{l}_1$ teilbar sein, so muß mindestens einer dieser Exponenten von 0 verschieden sein.

Sind diese Exponenten nicht sämtlich gleich 0, so zeigt man leicht, wie oben, daß das Symbol $\left(\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}_1}\right)\right)$ für solche Zahlen ν, die zu $\mathfrak{l}_1$ prim sind, auch den Wert -1 erreichen kann. Das Symbol $\left(\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}_1}\right)\right)$ kann in diesem Falle für die in Rede stehenden Zahlen ν überhaupt nur die Werte $+1$ und -1 haben.

Wir sahen, daß das Symbol $\left(\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}_1}\right)\right)$ für solche Zahlen ν, μ, die zu $\mathfrak{l}_1$ prim sind, wenn die Relativdiskriminante $D_{\sqrt{\mu}, k}$ durch $\mathfrak{l}_1$ teilbar ist, beziehungsweise zwei oder vier Werte annehmen kann. Es ist nun leicht, die Aussage des Satzes 24 über die Anzahl der Normenreste für den gegenwärtigen Fall zu beweisen.

Wegen $L > 6l_1$ sind zwei nach $\mathfrak{l}_1^L$ kongruente zu $\mathfrak{l}_1$ prime ganze Zahlen in k stets gleichzeitig Normenreste oder Normennichtreste nach $\mathfrak{l}_1$. Wir bezeichnen nun mit $\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_s$ ein System ganzer Zahlen in k von folgender Beschaffenheit: Die Zahlen $\nu_1, \cdots, \nu_s$ sollen nach $\mathfrak{l}_1^L$ untereinander inkongruente und zu $\mathfrak{l}_1$ prime Normenreste nach $\mathfrak{l}_1$ sein; endlich

soll jede zu $\mathfrak{l}_1$ prime Zahl, welche Normenrest nach $\mathfrak{l}_1$ ist, einer jener Zahlen $\nu_1, \cdots, \nu_s$ nach $\mathfrak{l}_1^L$ kongruent sein. Ist nun ν ein zu $\mathfrak{l}_1$ primer Normennichtrest nach $\mathfrak{l}_1$, für den etwa

$$\left(\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}_1}\right)\right) = i$$

ausfällt, so sind die Zahlen

$$\begin{aligned} &\nu\nu_1, \cdots, \nu\nu_s, \\ &\nu^2\nu_1, \cdots, \nu^2\nu_s, \\ &\nu^3\nu_1, \cdots, \nu^3\nu_s \end{aligned}$$

sämtlich Normennichtreste nach $\mathfrak{l}_1$, und wir können leicht zeigen, daß jeder beliebige zu $\mathfrak{l}_1$ prime Normennichtrest nach $\mathfrak{l}_1$ einer dieser $3s$ Zahlen nach $\mathfrak{l}_1^L$ kongruent ausfällt.

Es sei ν' irgend ein beliebiger Normennichtrest nach $\mathfrak{l}_1$ und etwa

$$\left(\left(\frac{\nu', \mu}{\mathfrak{l}_1}\right)\right) = i^t,$$

wo t einen der Werte 1, 2 oder 3 haben kann, so bestimmen wir eine ganze Zahl ν^*, so daß

$$\nu'^t\nu^* \equiv 1, \quad (\mathfrak{l}_1^L)$$

wird. Es folgt dann wegen $L > 6l_1$ die Gleichung

$$\left(\left(\frac{\nu^*, \mu}{\mathfrak{l}_1}\right)\right) = \left(\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}_1}\right)\right)^{-t} = i^{-t};$$

somit ist $\nu'\nu^*$ Normenrest nach $\mathfrak{l}_1$ und folglich einer der Zahlen $\nu_1, \cdots, \nu_s$ nach $\mathfrak{l}_1^L$ kongruent; es sei etwa $\nu'\nu^* \equiv \nu_i$ nach $\mathfrak{l}_1^L$; dann ist

$$\nu'\nu'^t\nu^* \equiv \nu' \equiv \nu'^t\nu_i, \quad (\mathfrak{l}_1^L).$$

Ist das Symbol $\left(\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}_1}\right)\right)$ für solche Zahlen ν, die zu $\mathfrak{l}_1$ prim sind, nur der Werte $+1$ und -1 fähig, so zeigt man in ganz analoger Weise, daß von allen vorhandenen zu $\mathfrak{l}_1$ primen und nach $\mathfrak{l}_1^L$ inkongruenten Zahlen ν in k genau die Hälfte Normenreste des Körpers $K(\sqrt[4]{\mu})$ nach $\mathfrak{l}_1$ sind. Damit ist dann die Aussage des zweiten Teiles von Satz 24 für solche Zahlen μ, die zu $\mathfrak{l}_1$ prim sind, vollständig bewiesen.

Um nun diesen Teil des Satzes für beliebige Zahlen μ zu beweisen, nehmen wir an, das Primideal $\mathfrak{l}_1$ gehe in μ genau zur a_1^{ten} Potenz auf. Setzt man $\mathfrak{l}_1^{hh'} = (\lambda_1)$, so daß λ_1 eine ganze Zahl in k wird, so ist $\frac{\mu^{hh'}}{\lambda_1^{a_1}}$ eine ganze zu $\mathfrak{l}_1$ prime Zahl in k. Wir bestimmen eine ganze Zahl μ^* in k, welche die Kongruenzen

$$\mu^* \equiv \frac{\lambda^{h'}}{\lambda_2^{\cdot}} \cdot \quad \mathfrak{l}_2^{\cdot-1}$$

$$\lambda_2^{h} \mu^* = \varepsilon^{h} \cdot \quad (\mathfrak{l}_2^{\cdot-1} \cdots \mathfrak{l}_s^{\cdot-1}),$$

wobei ε eine beliebige zu $\mathfrak{l}_2, \cdots, \mathfrak{l}_s$ prime ganze Zahl in k vorstellt. Die auf diese Weise bestimmte Zahl μ^* fällt zu $1+i$ prim aus.

Es gilt, wie man leicht einsieht, die Beziehung

$$(\cdot) \qquad \left(\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}_2^{\cdot}}\right)\right) = \left(\left(\frac{\nu, \mu^{h'}}{\mathfrak{l}_2^{\cdot}}\right)\right) = \prod_{\pi}' \left(\left(\frac{\nu, \lambda_2^{h} \mu^*}{\pi}\right)\right)^{-1},$$

wo, wie immer, das Produkt $\prod'$ über sämtliche zu $1+i$ primen Primideale in k zu erstrecken ist.

Wir können für μ^* nach Satz 10* eine Kongruenz nach dem Modul $\mathfrak{l}_1^{\cdot-1} \cdots \mathfrak{l}_s^{\cdot-1}$ aufstellen: sie laute etwa:

$$(6) \qquad \mu^* \equiv \varepsilon_1^{\cdot} \cdots \varepsilon_m^{\cdot} \pi_1^{\cdot} \cdots \pi_m^{\cdot m} \pi_1^{\cdot r_1} \cdots \pi_s^{\cdot r_s} \varepsilon^{\cdot}. \quad (\mathfrak{l}_1^{\cdot-1} \cdots \mathfrak{l}_s^{\cdot-1}),$$

wo die Bedeutung der einzelnen Größen dieser Kongruenz aus Satz 10* zu ersehen ist. Mithin ergibt sich aus (5) die folgende Gleichung

$$(7) \qquad \left(\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}_1^{\cdot}}\right)\right) = \prod_{\pi}' \left(\left(\frac{\nu \cdot \varepsilon_1^{a_1} \varepsilon_2^{b_1} \cdots \varepsilon_m^{b_m} \pi_1^{r_1} \cdots \pi_m^{r_m} \pi_1^{w_1} \cdots \pi_s^{w_s}}{\pi}\right)\right)^{-1}.$$

Soll nun die Relativdiskriminante $D_{\mathfrak{l}_1^{\cdot}, k}$ des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ durch $\mathfrak{l}_1$ teilbar sein, so muß entweder a_1 ungerade sein, oder, wenn a_1 gerade ist, mindestens einer der Exponenten $u_1, \cdots, u_m, r_1, \cdots, r_m$ ungerade ausfallen. Im letzteren Falle folgert man wie oben, daß das Symbol $\left(\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}_1^{\cdot}}\right)\right)$ für solche Zahlen ν, die zu $\mathfrak{l}_1$ prim sind, der Werte $\pm i$ fähig ist. Im ersteren Falle setzen wir in (7) für ν die Zahl π_1 ein und erhalten die Gleichung

$$\left(\left(\frac{\pi_1, \mu}{\mathfrak{l}_1^{\cdot}}\right)\right) = \left(\left(\frac{\lambda_1}{\mathfrak{p}_1^{\cdot}}\right)\right)^{-a_1} = \pm i.$$

Soll ferner die Relativdiskriminante $D_{\mathfrak{l}_1^{\cdot}, k}$ des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ prim zu $\mathfrak{l}_1$ ausfallen, so muß jedenfalls a_1 gerade sein, ebenso die Exponenten $u_1, \cdots, u_m, r_1, \cdots, r_m$. Man ersieht dann unmittelbar aus (6), daß in einem solchen Falle das Symbol $\left(\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}_1^{\cdot}}\right)\right)$ für diejenigen Zahlen ν, die zu $\mathfrak{l}_1$ prim sind, höchstens die Werte $+1$ und -1 haben kann.

Nun sei zunächst $a_1 \equiv 2, (4)$. Führt man dann in (7) für ν die Zahl π_1 ein, so ergibt sich die Gleichung

$$\left(\left(\frac{\pi_1, \mu}{\mathfrak{l}_1^{\cdot}}\right)\right) = \left(\frac{\lambda_1}{\mathfrak{p}_1}\right) = -1.$$

Ist ferner $a_1 \equiv 0$, (4), so überzeugt man sich leicht wie oben (man sehe die Gleichungen (2) und (3)), daß das Symbol $\left(\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}_1}\right)\right)$, wenn nicht sämtliche Exponenten $u_1, \cdots, u_m, v_1, \cdots, v_m$ gleich 0 sind, für solche Zahlen ν, die zu $\mathfrak{l}_1$ prim sind, die Werte $+1$ und -1 erhalten kann.

Beachten wir endlich, daß die Schlüsse, die wir bei der Bestimmung der Anzahl der Normenreste im Falle eines zu $\mathfrak{l}_1$ primen μ gemacht haben, auch, wenn μ durch $\mathfrak{l}_1$ teilbar ist, uneingeschränkt gültig sind, so ist damit Satz 24 vollständig bewiesen.

§ 15.

Der Fundamentalsatz über die Geschlechter eines relativbiquadratischen Zahlkörpers.

Auf Grund der bisher erlangten Resultate beweist man nun leicht den Fundamentalsatz über die Geschlechter eines relativbiquadratischen Zahlkörpers. Das Beweisverfahren ist dem Hilbertschen Verfahren für den analogen Fall im relativquadratischen Zahlkörper vollkommen ähnlich. Wir wollen es hier nicht durchführen. Man gelangt zu folgendem Resultate:

Satz 25. Es sei r_1 die Anzahl der vierwertigen, r_2 die Anzahl der zweiwertigen Charaktere, welche ein Geschlecht des relativbiquadratischen Körpers $K(\sqrt[4]{\mu})$ bestimmen: Ist dann ein System von r_1 beliebigen vierten und ein System von r_2 beliebigen zweiten Einheitswurzeln vorgelegt, so bilden diese Systeme dann und nur dann das Charakterensystem eines Geschlechtes in $K(\sqrt[4]{\mu})$, wenn das Produkt der sämtlichen $r_1 + r_2$ Einheitswurzeln gleich $+1$ ist. Die Anzahl der in $K(\sqrt[4]{\mu})$ vorhandenen Geschlechter ist daher 4^{r-1}, wenn $r = r_1 + \frac{r_2}{2}$ gesetzt wird.

Wir folgern aus diesem Satze sofort folgende Tatsache:

Satz 26. Die Anzahl g der Geschlechter in einem relativbiquadratischen Körper ist gleich der Anzahl A seiner ambigen Komplexe.

Beweis. Nach Satz 25 ist

$$g = 4^{r-1}.$$

Es ist aber weiter

$$g \leqq A \leqq 4^{t+v-m-1}, \tag{1}$$

(man sehe hierzu § 6); folglich muß

$$r \leqq t + v - m$$

sein und da nach Satz 9

$$r \geqq t + v - m$$

ist, so ergibt sich

$$r = t + v - m$$

und mithin nach (1) $g = A$.

Aus diesem Satze 26 folgt nun leicht der folgende wichtige Satz:

Satz 27. Jeder Komplex des Hauptgeschlechtes in einem relativbiquadratischen Zahlkörper $K(\sqrt[4]{\mu})$ ist die $(1-S)^{te}$ symbolische Potenz eines Komplexes in $K(\sqrt[4]{\mu})$, d. h. jede Klasse des Hauptgeschlechtes in $K(\sqrt[4]{\mu})$ ist gleich dem Produkte aus der $(1-S)^{ten}$ symbolischen Potenz einer Klasse und aus einer solchen Klasse, welche Ideale des Körpers k enthält.

Beweis. Bezeichnet man mit f die Anzahl der Komplexe des Hauptgeschlechtes und mit f' die Anzahl derjenigen Komplexe vom Hauptgeschlechte, welche $(1-S)^{te}$ symbolische Potenzen anderer Komplexe sind, so ist $Af' = gf$ (L. § 9). Da sich aber $A = g$ ergeben hat, muß auch $f = f'$ sein und dies ist eben die Aussage des Satzes 27.

Es möge zum Schluß hier noch bemerkt werden, daß auch für den relativbiquadratischen Zahlkörper ein Satz von den Relativnormen wie im relativquadratischen Körper besteht. Er lautet:

Satz 28. Wenn ν, μ irgend zwei beliebige ganze Zahlen $+0$ des Körpers k bedeuten, von denen μ nicht das Quadrat einer Zahl in k ist, und welche für jedes Primideal $\mathfrak{w}$ in k die Bedingung:

$$\left(\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{w}}\right)\right) = +1$$

erfüllen, so ist die Zahl ν stets gleich der Relativnorm $N_{\sqrt[4]{\mu}, k}$ einer ganzen oder gebrochenen Zahl des Körpers $K(\sqrt[4]{\mu})$.

Der Beweis dieses Satzes schließt sich genau an den Hilbertschen für den analogen Fall im relativquadratischen Körper an (H. Rq. Z., § 43). Es ist wohl eine kleine Modifikation an demselben anzubringen wegen der charakteristischen Einheiten, deren Symbol den Wert -1 hat; diese ist jedoch leicht zu treffen.

§ 16.

Über den Körper der imaginären Zahlen.

Um ein Beispiel für die erhaltenen allgemeinen Resultate zu haben, bestimmen wir das biquadratische Reziprozitätsgesetz für zwei zu $\lambda = 1 + i$ prime Primzahlen des Körpers $k(i)$ der imaginären Zahlen und die Ergänzungssätze. Wir schlagen jedoch den gerade entgegengesetzten Weg zu demjenigen ein, der in Hilberts Theorie des ralativquadratischen Zahlkörpers und entsprechend in Lietzmanns Dissertation befolgt wird. Wir bestimmen zunächst die Werte des Symbols $\left(\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{w}}\right)\right)$ für beliebige Prim-

ideale $\mathfrak{w}$, geben dann die Definition des Geschlechtes in $K(\sqrt[4]{\mu})$ gleich allgemein, die Fälle, wo die Relativdiskriminante von $K(\sqrt[4]{\mu})$ durch λ teilbar ist, nicht ausschließend, und ermitteln für die Anzahl der Geschlechter in den betrachteten Körpern $K(\sqrt[4]{\mu})$ eine *obere Grenze*. Auf Grund dieses Resultates ergibt sich dann das gesuchte Reziprozitätsgesetz mit den Ergänzungssätzen leicht unter Zuhilfenahme des Eisensteinschen speziellen Reziprozitätsgesetzes für eine rationale und eine imaginäre Primzahl.

Es seien μ, ν beliebige ganze Zahlen des Körpers k und es gehe die Primzahl $\lambda = 1 + i$ in μ genau zur a^{ten}, in ν genau zur b^{ten} Potenz auf; ferner sei π eine zu λ prime Primzahl in k. Wir setzen $\frac{\nu^a}{\mu^b} = \frac{\varrho}{\sigma}$, so daß ϱ und σ zu λ prime Zahlen werden, und definieren das Symbol $\left(\left(\frac{\nu, \mu}{\pi}\right)\right)$ durch die Gleichung

$$\left(\left(\frac{\nu, \mu}{\pi}\right)\right) = \left(\left(\frac{(-1)^{ab}\varrho\sigma^3}{\pi}\right)\right).$$

Man zeigt dann leicht auf Grund der Sätze der Theorie des relativquadratischen Zahlkörpers, daß die Zahl ν dann und nur dann Normenrest des Körpers $K(\sqrt[4]{\mu})$ wird, wenn

$$\left(\left(\frac{\nu, \mu}{\pi}\right)\right) = +1$$

ausfällt.

Wir wollen nun weiter untersuchen, wann eine ganze Zahl ν des Körpers k Normenrest des Körpers $K(\sqrt[4]{\mu})$ nach der Primzahl λ wird.

Zu diesem Behufe stellen wir zunächst für die zu λ primen Zahlen ν Kongruenzen nach den Moduln 8 und λ^7 auf, entsprechend Satz 10 und 10*. Im Körper $k(i)$ gibt es keine Grundeinheit: wir nehmen für ε_m der Sätze 10 und 10* die Einheitswurzel i; ferner für $\varkappa$ die Primzahl $3 - 2i$ und endlich für π die Primzahl $1 + 4i$. Diese Primzahlen entsprechen den Anforderungen der Sätze 10 und 10*, denn es bestehen die Gleichungen

$$\left(\left(\frac{i}{3-2i}\right)\right) = -i, \quad \left(\left(\frac{i}{1+4i}\right)\right) = +1, \quad \left(\frac{\lambda}{1+4i}\right) = -1;$$

dabei ist $1 + 4i$ eine primäre Zahl.

Berücksichtigen wir nun, daß für jede zu λ prime Zahl α die Kongruenz

$$\alpha^4 \equiv 1, \quad (\lambda^7)$$

besteht, so können wir für jede zu λ prime Zahl ν Kongruenzen von der Form

(1) $$\nu \equiv i^a(3-2i)^b(1+4i)^c, \quad (8),$$

(2) $$\nu \equiv i^a(3-2i)^b(1+4i)^c, \quad (\lambda^7)$$

aufstellen, wobei die Exponenten a, b gewisse Werte 0, 1, 2, 3 haben, hingegen der Exponent c in (1) die Werte 0, 1 und in (2) die Werte 0, 1, 2, 3 haben kann. Es soll zur Abkürzung

$$i^a(3-2i)^b(1+4i)^c = (a\ b\ c)$$

gesetzt werden.

Es seien nun μ, ν zwei beliebige ganze Zahlen in k, und es gehe die Primzahl λ in μ genau zur e^{ten}, in ν genau zur e'^{ten} Potenz auf; ferner mögen die Kongruenzen

$$\mu \equiv \lambda^e(a\ b\ c), \quad (\lambda^{7+e}),$$
$$\nu \equiv \lambda^{e'}(a'\ b'\ c'), \quad (\lambda^{7+e'})$$

statthaben. Ich definiere dann das Symbol $\left(\left(\frac{\nu, \mu}{\lambda}\right)\right)$ durch die Gleichung

(3) $$\left(\left(\frac{\nu, \mu}{\lambda}\right)\right) = i^{a'b-ab'+2bb'+cc'-c'e}.$$

Die Rechnung zeigt, daß ν dann und nur dann Normenrest des Körpers $K(\sqrt[\lambda]{\mu})$ wird, wenn

(4) $$\left(\left(\frac{\nu, \mu}{\lambda}\right)\right) = +1$$

ausfällt.

Für das Symbol $\left(\left(\frac{\nu, \mu}{\lambda}\right)\right)$ bestehen, wie unmittelbar aus (3) zu ersehen ist, die Beziehungen

(5) $$\begin{aligned} \left(\left(\frac{\nu, \mu}{\lambda}\right)\right)\left(\left(\frac{\mu, \nu}{\lambda}\right)\right) &= +1, \\ \left(\left(\frac{\nu, \mu}{\lambda}\right)\right)\left(\left(\frac{\nu, \mu'}{\lambda}\right)\right) &= \left(\left(\frac{\nu, \mu\mu'}{\lambda}\right)\right), \\ \left(\left(\frac{\nu, \mu}{\lambda}\right)\right)\left(\left(\frac{\nu', \mu}{\lambda}\right)\right) &= \left(\left(\frac{\nu\nu', \mu}{\lambda}\right)\right), \end{aligned}$$

wo μ, ν, μ', ν' ganz beliebige ganze Zahlen in k bedeuten.

Die Gleichung (4) steht in vollem Einklange mit Satz 24. Wir heben hier nur den Fall eines primären μ noch besonders hervor. μ ist primär, wenn eine Kongruenz von der Form

$$\mu \equiv (0\,0\,c), \quad (8)$$

besteht. Es wird dann in der Tat

$$\left(\left(\frac{\nu, \mu}{\lambda}\right)\right) = +1$$

für jede beliebige zu λ prime ganze Zahl ν in k.

Nun können wir zur Definition des Geschlechtes schreiten und zur Bestimmung der *oberen Grenze* 4^{r-1} für die Anzahl der Geschlechter auf Grund der Sätze 7 und 8. Dann ergibt sich das gesuchte Reziprozitätsgesetz leicht, wenn man die Hilbertsche Methode im Kummerschen Körper befolgt (H. A. Z.).

Für den biquadratischen Charakter der Einheit i in bezug auf die Zahl μ des Körpers $\varkappa$ gilt die Gleichung

$$\left(\left(\frac{i}{\mu}\right)\right) = i^{\frac{n(\mu)-1}{4}},$$

wo $n(\mu)$ die Norm der Zahl μ genommen im Körper k vorstellt.

Setzen wir nun $\mu \equiv (a\ b\ c)$, (λ^7), so wird

$$n(\mu) \equiv (-3)^b, \quad (16)$$

und es ist demnach

$$\frac{n(\mu)-1}{4} \equiv -b, \quad (4).$$

Folglich besteht die Beziehung

$$\left(\left(\frac{i}{\mu}\right)\right) = i^{-b}, \tag{6}$$

die wir mit bezug auf (3) auch folgendermaßen schreiben können:

$$\left(\left(\frac{i}{\mu}\right)\right)^{-1} = \left(\left(\frac{i,\mu}{\lambda}\right)\right). \tag{6*}$$

Die Gleichungen (6) und (6*) stellen *den ersten Ergänzungssatz* zum biquadratischen Reziprozitätsgesetz im Körper der imaginären Zahlen $k(i)$ dar.

Je nach dem Werte, den der biquadratische Charakter der Einheit i nach einer Primzahl in k hat, wollen wir diese Primzahlen in folgende drei Arten einteilen: zur ersten Art gehören diejenigen Primzahlen π in k, für welche

$$\left(\left(\frac{i}{\pi}\right)\right) = \pm i$$

wird; zur zweiten Art die Primzahlen $\varkappa_1$, für welche

$$\left(\left(\frac{i}{\varkappa_1}\right)\right) = -1$$

und endlich zur dritten Art diejenigen Primzahlen $\varkappa_2$, für welche

$$\left(\left(\frac{i}{\varkappa_2}\right)\right) = +1$$

ausfällt. Den Primzahlen $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ der zweiten und der dritten Art wollen wir in der Folge stets eine solche Form erteilen, daß die Gleichungen

$$\varkappa_1 \equiv (2\ 2\ c), \quad (\lambda^7),$$
$$\varkappa_2 \equiv (0\ 0\ c), \quad (\lambda^7)$$

befriedigt werden, was durch Multiplikation mit einer geeigneten Potenz von i immer geschehen kann.

Am leichtesten findet man das biquadratische Reziprozitätsgesetz in $k(i)$ für zwei Primzahlen π und π_1 der ersten Art. Ist nämlich π_1 eine Primzahl der ersten Art, so kann man stets eine Potenz i^t der Einheit i bestimmen derart, daß

$$\left(\left(\frac{i^t\pi}{\pi_1}\right)\right) = +1 \tag{7}$$

wird. Demnach ist π_1 im Körper $K(\sqrt[4]{i^t\pi})$ die Relativnorm bezüglich k eines Primideals $\mathfrak{P}_1$ dieses Körpers $K(\sqrt[4]{i^t\pi})$. Die Relativdiskriminante des Körpers $K(\sqrt[4]{i^t\pi})$ bezüglich k enthält nur die Primzahlen λ und π als Faktoren. Folglich besteht das Charakterensystem der Zahl π_1 im Körper $K(\sqrt[4]{i^t\pi})$ aus den Symbolen

$$\left(\left(\frac{\pi_1, i^t\pi}{\lambda}\right)\right), \quad \left(\left(\frac{\pi_1, i^t\pi}{\pi}\right)\right) = \left(\left(\frac{\pi_1}{\pi}\right)\right).$$

Da wir aber angenommen haben, daß π eine Primzahl der ersten Art sei, so können wir wieder eine Potenz i^{t_1} von i bestimmen derart, daß

$$\left(\left(\frac{i^{t_1}\pi_1}{\pi}\right)\right) = +1 \tag{8}$$

wird. Mithin besteht das Charakterensystem des Primideals $\mathfrak{P}_1$ aus dem einzigen Symbol

$$\left(\left(\frac{i^{t_1}\pi_1, i^t\pi}{\lambda}\right)\right).$$

Der Körper $K(\sqrt[4]{i^t\pi})$ enthält nur ein Geschlecht: das Hauptgeschlecht. Deshalb muß

$$\left(\left(\frac{i^{t_1}\pi_1, i^t\pi}{\lambda}\right)\right) = +1$$

sein.

Wir können diese Gleichung auch folgendermaßen schreiben:

$$\left(\left(\frac{i, i}{\lambda}\right)\right)^{tt_1} \left(\left(\frac{i, \pi}{\lambda}\right)\right)^{t_1} \left(\left(\frac{\pi, i}{\lambda}\right)\right)^{t} \left(\left(\frac{\pi_1, \pi}{\lambda}\right)\right) = +1. \tag{9}$$

Nun beachten wir die Beziehungen

$$\left(\left(\frac{i, i}{\lambda}\right)\right) = 1, \quad \left(\left(\frac{i, \pi}{\lambda}\right)\right)\left(\left(\frac{\pi, i}{\lambda}\right)\right) = 1,$$

$$\left(\left(\frac{\pi, i}{\lambda}\right)\right) = \left(\left(\frac{i}{\pi}\right)\right), \quad \left(\left(\frac{\pi_1, i}{\lambda}\right)\right) = \left(\left(\frac{i}{\pi_1}\right)\right),$$

die aus (3) und (5) unmittelbar folgen, und bringen die Gleichungen (7) und (8) auf die Form

$$\left(\left(\frac{i}{\pi_1}\right)\right)^t = \left(\left(\frac{\pi}{\pi_1}\right)\right)^{-1}, \quad \left(\left(\frac{i}{\pi}\right)\right)^{t_1} = \left(\left(\frac{\pi_1}{\pi}\right)\right)^{-1},$$

so ergibt sich leicht aus (9) für die Primzahlen π und π_1 *das biquadratische Reziprozitätsgesetz*

$$\left(\left(\frac{\pi}{\pi_1}\right)\right)\left(\left(\frac{\pi_1}{\pi}\right)\right)^{-1} = \left(\left(\frac{\pi_1, \pi}{\lambda}\right)\right) \tag{10}$$

oder nach (3) in der Gestalt

$$\left(\left(\frac{\pi}{\pi_1}\right)\right)\left(\left(\frac{\pi_1}{\pi}\right)\right)^{-1} = i^{a_1 b - a b_1 + 2 b b_1}, \tag{10*}$$

wobei die Kongruenzen

$$\pi \equiv (a\ b\ c); \quad \pi \equiv (a_1\ b_1\ c_1), \quad (\lambda^7)$$

bestehen.

Auch für ganz beliebige Primzahlen π, π_1, die einer beliebigen Art angehören, gilt das Reziprozitätsgesetz in derselben Gestalt, wie es die Gleichungen (10) und (10*) darstellen, wovon wir uns schrittweise überzeugen werden.

Zu diesem Behufe leiten wir zunächst einige besondere Fälle des Reziprozitätsgesetzes ab.

Es sei zunächst $\varkappa_1$ eine Primzahl der zweiten Art, π eine beliebige Primzahl. Wir nehmen an, es sei

$$\left(\left(\frac{\varkappa_1}{\pi}\right)\right) = +1.$$

Dann ist π die Relativnorm bezüglich k eines bestimmten Primideals $\mathfrak{P}$ des Körpers $K(\sqrt[4]{\varkappa_1})$. Das Charakterensystem der Zahl π besteht aus den Symbolen

$$\left(\left(\frac{\pi, \varkappa_1}{\lambda}\right)\right), \quad \left(\left(\frac{\pi, \varkappa_1}{\varkappa_1}\right)\right) = \left(\left(\frac{\pi}{\varkappa_1}\right)\right),$$

weil λ und π die einzigen Primzahlen in k sind, die in der Relativdiskriminante des Körpers $K(\sqrt[4]{\varkappa_1})$ bezüglich k aufgehen. Nun kann man wegen der Annahme, die wir über $\varkappa_1$ machten, eine geeignete Potenz i^t von i bestimmen derart, daß

$$\left(\left(\frac{i^t \pi, \varkappa_1}{\lambda}\right)\right) = +1 \tag{11}$$

wird. Hieraus folgt aber weiter, daß das Charakterensystem des Ideals $\mathfrak{P}$ aus dem einen Symbol

$$\left(\left(\frac{i^t \pi, \varkappa_1}{\varkappa_1}\right)\right) = \left(\left(\frac{i^t \pi}{\varkappa_1}\right)\right)$$

besteht. Wir schließen jetzt, wie wir es oben taten, daß

$$\left(\left(\frac{i^t \pi, \varkappa_1}{\varkappa_1}\right)\right) = \left(\left(\frac{i^t \pi}{\varkappa}\right)\right) = +1 \tag{12}$$

sein muß. Es ist nur noch der Exponent t zu bestimmen.

Zu diesem Zwecke schreiben wir die Gleichung (11) in der Gestalt

$$\left(\left(\frac{i, \varkappa_1}{\lambda}\right)\right)^t \left(\left(\frac{\pi, \varkappa_1}{\lambda}\right)\right) = +1$$

und berücksichtigen hiernach die Beziehungen

$$\left(\left(\frac{i, \varkappa_1}{\lambda}\right)\right) = -1, \quad \left(\left(\frac{\pi, \varkappa_1}{\lambda}\right)\right) = (-1)^{a+b},$$

wobei $\pi \equiv (a\, b\, c)$, (λ^7) gesetzt wurde; dann ergibt sich sofort für t die Kongruenz

$$t \equiv a + b, \quad (2).$$

Führen wir dies in (12) ein, so folgt wegen $\left(\left(\frac{i}{\varkappa_1}\right)\right) = -1$ folgende Gleichung

$$(-1)^{a+b}\left(\left(\frac{\pi}{\varkappa_1}\right)\right) = \left(\left(\frac{\pi, \varkappa_1}{\lambda}\right)\right)\left(\left(\frac{\pi}{\varkappa_1}\right)\right) = +1.$$

Dieselbe Gleichung folgt aber auch aus (10) für den gegenwärtigen Fall.

Es sei ferner $\varkappa_2$ eine Primzahl der dritten Art, π eine beliebige Primzahl.

Wir zeigen jetzt leicht, daß aus

$$\left(\left(\frac{\varkappa_2}{\pi}\right)\right) = +1$$

stets

$$\left(\left(\frac{\pi}{\varkappa_2}\right)\right) = +1$$

folgt. Wegen der ersten dieser Gleichungen ist die Zahl π die Relativnorm bezüglich k eines Primideals $\mathfrak{P}$ des Körpers $K(\sqrt[4]{\varkappa_2})$. Nun enthält die Relativdiskriminante des Körpers $K(\sqrt[4]{\varkappa_2})$ bezüglich k nur den einen Primfaktor $\varkappa_2$ (Satz 1 nnd 19); folglich besteht das Charakterensystem der Zahl π aus dem einen Symbol $\left(\left(\frac{\pi, \varkappa_2}{\varkappa_2}\right)\right) = \left(\left(\frac{\pi}{\varkappa_2}\right)\right)$, ebenso aber auch das Charakterensystem von $\mathfrak{P}$, denn es ist $\left(\left(\frac{i, \varkappa_2}{\lambda}\right)\right) = +1$. Hieraus folgt, wie früher, die obige Behauptung.

Um nun auf Grund des Gefundenen das Reziprozitätsgesetz allgemein zu beweisen, setzen wir die Kenntnis des Eisensteinschen Reziprozitätsgesetzes zwischen einer rationalen und einer beliebigen komplexen Primzahl voraus. Bedeuten p, q zwei rationale Primzahlen, die erste von der Form $p \equiv 1$, (4), die zweite von der Form $q \equiv 3$, (4) und π eine beliebige komplexe Primzahl von der Form $\pi \equiv \pm 1$, oder $\equiv \pm 1 + 2i$, (4), so bestehen nach Eisenstein die Beziehungen

$$(14) \qquad \left(\left(\frac{p}{\pi}\right)\right) = \left(\left(\frac{\pi}{p}\right)\right), \quad \left(\left(\frac{-q}{\pi}\right)\right) = \left(\left(\frac{\pi}{q}\right)\right).$$

Es seien nun $\varkappa$ und $\varkappa_1$ zwei komplexe Primzahlen der zweiten oder der dritten Art. Wir zeigten bereits, daß in diesem Falle aus $\left(\left(\frac{\varkappa}{\varkappa_1}\right)\right) = +1$ stets $\left(\left(\frac{\varkappa_1}{\varkappa}\right)\right) = +1$ folgt. Jetzt nehmen wir an, es sei $\left(\left(\frac{\varkappa}{\varkappa_1}\right)\right) = i$, und bestimmen eine Primzahl ϱ in k derart, daß sie die Gleichungen

$$\left(\left(\frac{i}{\varrho}\right)\right) = \pm i, \quad \left(\left(\frac{\varkappa}{\varrho}\right)\right) = \mp i, \quad \left(\left(\frac{\varkappa'}{\varrho}\right)\right) = +1, \tag{15}$$
$$\left(\left(\frac{\varkappa_1}{\varrho}\right)\right) = \mp i, \quad \left(\left(\frac{\varkappa_1'}{\varrho}\right)\right) = +1$$

befriedigt; $\varkappa'$, $\varkappa_1'$ sind die zu $\varkappa$ bez. $\varkappa_1$ konjugierten Primzahlen.

Wegen der ersten dieser Gleichungen ist ϱ eine Primzahl der ersten Art. Wir wollen sie etwa in einer der Formen

$$\varrho \equiv (3\ 3\ c) \quad \text{oder} \quad \equiv (1\ 1\ c), \quad (\lambda^7) \tag{16}$$

annehmen, dem Vorzeichen von i in der ersten Gleichung (15) entsprechend, was stets durch Multiplikation mit einer geeigneten Potenz i^t von i geschehen kann.

Aus (15) folgen unmittelbar die Gleichungen

$$\left(\left(\frac{\varkappa\varkappa'}{\varrho}\right)\right) = \mp i, \quad \left(\left(\frac{\varkappa_1\varkappa_1'}{\varrho}\right)\right) = \mp i;$$

hierin sind $\varkappa\varkappa'$, $\varkappa_1\varkappa_1'$ rationale Primzahlen von der Form $p \equiv 1$, (4). Um nun auf diese Gleichungen das Reziprozitätsgesetz (14) anwenden zu können, müssen wir ϱ etwa noch mit i multiplizieren, damit

$$i\varrho = \pm 1 + 2i, \quad (4)$$

werde. Tun wir das, so folgen aus den letzten Gleichungen die Beziehungen

$$\left(\left(\frac{\varkappa\varkappa'}{\varrho}\right)\right) = \left(\left(\frac{i\varrho}{\varkappa\varkappa'}\right)\right), \quad \left(\left(\frac{\varkappa_1\varkappa_1'}{\varrho}\right)\right) = \left(\left(\frac{i\varrho}{\varkappa_1\varkappa_1'}\right)\right). \tag{17}$$

Da jedoch $\varkappa$, $\varkappa_1$ der Voraussetzung nach Primzahlen der ersten oder der zweiten Art vorstellen, so muß

$$\left(\left(\frac{i}{\varkappa\varkappa'}\right)\right) = +1, \quad \left(\left(\frac{i}{\varkappa_1\varkappa_1'}\right)\right) = +1$$

sein, und es folgt hiermit aus (17) weiter

$$\left(\left(\frac{\varkappa\varkappa'}{\varrho}\right)\right) = \left(\left(\frac{\varrho}{\varkappa}\right)\right)\left(\left(\frac{\varrho}{\varkappa'}\right)\right), \quad \left(\left(\frac{\varkappa_1\varkappa_1'}{\varrho}\right)\right) = \left(\left(\frac{\varrho}{\varkappa_1}\right)\right)\left(\left(\frac{\varrho}{\varkappa_1'}\right)\right).$$

Berücksichtigen wir jetzt, daß wegen (15) auf Grund der bereits entwickelten besonderen Reziprozitätsgesetze, weil wir ϱ in der Form (16) annahmen, die Gleichungen

$$\left(\left(\frac{\varrho}{\varkappa'}\right)\right) = -1, \quad \left(\left(\frac{\varrho}{\varkappa_1'}\right)\right) = +1$$

folgen, so ergeben sich schließlich die Gleichungen

$$(18) \qquad \left(\left(\frac{\varkappa}{\varrho}\right)\right) = \left(\left(\frac{\varrho}{\varkappa}\right)\right) = \mp i, \qquad \left(\left(\frac{\varkappa_1}{\varrho}\right)\right) = \left(\left(\frac{\varrho}{\varkappa_1}\right)\right) = \mp i.$$

Nun betrachten wir den Körper $K(\sqrt[4]{\varkappa\varrho})$. Wegen der über $\varkappa$ und ϱ gemachten Annahmen hat $\varkappa\varrho$ eine der Formen

$$\varkappa\varrho \equiv (1\ 1\ c) \quad \text{oder} \quad \equiv (3\ 3\ c), \quad (\lambda^7),$$

und es ist deshalb $\left(\left(\frac{i, \varkappa\varrho}{\lambda}\right)\right) = \mp i$. Die Relativdiskriminante des Körpers $K(\sqrt[4]{\varkappa\varrho})$ enthält die Primzahlen λ, $\varkappa$, ϱ als Faktoren, so daß das Charakterensystem der Zahl ϱ aus den drei Symbolen

$$\left(\left(\frac{\varrho, \varkappa\varrho}{\lambda}\right)\right), \quad \left(\left(\frac{\varrho, \varkappa\varrho}{\varkappa}\right)\right) = \left(\left(\frac{\varrho}{\varkappa}\right)\right), \quad \left(\left(\frac{\varkappa\varrho, \varkappa\varrho}{\varrho}\right)\right) = \left(\left(\frac{-\varkappa}{\varrho}\right)\right)^{-1}$$

besteht. Da aber ϱ in der Relativdiskriminante von $K(\sqrt[4]{\varkappa\varrho})$ als Faktor enthalten ist, so muß es gleich der vierten Potenz eines Primideals $\mathfrak{R}$ in $K(\sqrt[4]{\varkappa\varrho})$ sein. Um nun das Charakterensystem von $\mathfrak{R}$ zu finden, hat man nur zu beachten, daß $\left(\left(\frac{\varrho, \varkappa\varrho}{\lambda}\right)\right) = -1$ ist, und demnach ϱ mit -1 zu multiplizieren derart, daß

$$\left(\left(\frac{-\varrho, \varkappa\varrho}{\lambda}\right)\right) = +1$$

wird. Dann ergibt sich das Charakterensystem von $\mathfrak{R}$ in der Gestalt

$$(19) \qquad \left(\left(\frac{-\varrho}{\varkappa}\right)\right) = \left(\left(\frac{\varrho}{\varkappa}\right)\right), \qquad \left(\left(\frac{-\varrho, \varkappa\varrho}{\varrho}\right)\right) = \left(\left(\frac{\varkappa}{\varrho}\right)\right)^{-1}.$$

Aus (18) ersieht man, daß die Ideale $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}^2$, $\mathfrak{R}^3$, $\mathfrak{R}^4$ verschiedenen Geschlechtern angehören. Außer diesen Geschlechtern gibt es in $K(\sqrt[4]{\varkappa\varrho})$ keine anderen Geschlechter mehr. Wir ersehen ferner aus (18) und (19), daß das Produkt der Charaktere jedes einzelnen Geschlechtes gleich $+1$ ist. Hieraus folgt allgemein, daß das Produkt der Charaktere jedes beliebigen Ideals in $K(\sqrt[4]{\varkappa\varrho})$ gleich $+1$ sein muß.

Es besteht aber die Gleichung

$$(20) \qquad \left(\left(\frac{\varkappa\varrho}{\varkappa_1}\right)\right) = +1,$$

und es wird demzufolge $\varkappa_1$ im Körper $K(\sqrt[4]{\varkappa\varrho})$ die Relativnorm bezüglich k von einem gewissen Ideal $\mathfrak{R}_1$. Das Charakterensystem der Zahl $\varkappa_1$ enthält folgende Symbole:

$$\left(\left(\frac{\varkappa_1, \varkappa\varrho}{\lambda}\right)\right), \quad \left(\left(\frac{\varkappa_1, \varkappa\varrho}{\varkappa}\right)\right) = \left(\left(\frac{\varkappa_1}{\varkappa}\right)\right), \quad \left(\left(\frac{\varkappa_1, \varkappa\varrho}{\varrho}\right)\right) = \left(\left(\frac{\varkappa_1}{\varrho}\right)\right).$$

Wegen der Voraussetzungen, die über die Zahlen $\varkappa$, $\varkappa_1$ und ϱ gemacht wurden, muß $\left(\left(\frac{\varkappa_1, \varkappa\varrho}{\lambda}\right)\right) = +1$ werden. Da ferner $\left(\left(\frac{i, \varkappa\varrho}{\lambda}\right)\right) = \pm i$ ist, so besteht das Charakterensystem des Ideals $\mathfrak{R}_1$ aus den Charakteren $\left(\left(\frac{\varkappa_1}{\varkappa}\right)\right)$, $\left(\left(\frac{\varkappa_1}{\varrho}\right)\right)$, und es muß dem oben Gesagten zufolge

$$\left(\left(\frac{\varkappa_1}{\varkappa}\right)\right)\left(\left(\frac{\varkappa_1}{\varrho}\right)\right) = +1$$

sein. Vergleicht man jetzt diese Gleichung mit (20) und berücksichtigt hierbei noch die zweite der Gleichungen (19), so ergibt sich endlich, daß

$$\left(\left(\frac{\varkappa}{\varkappa_1}\right)\right) = \left(\left(\frac{\varkappa_1}{\varkappa}\right)\right) \tag{21}$$

sein muß, was auch aus (10) im gegenwärtigen Falle folgen würde.

Hätten wir anfangs angenommen, daß $\left(\left(\frac{\varkappa}{\varkappa_1}\right)\right) = -i$ sei, so hätten wir wieder in ähnlicher Weise die Gleichung (21) erhalten. Hieraus folgt schon, daß aus $\left(\left(\frac{\varkappa}{\varkappa_1}\right)\right) = -1$ stets $\left(\left(\frac{\varkappa_1}{\varkappa}\right)\right) = -1$ folgen muß.

Es bleibt nur noch übrig, den Fall, wo $\varkappa$ eine komplexe Primzahl der zweiten oder dritten, π eine Primzahl der ersten Art ist, näher zu betrachten.

Wir setzen $\pi \equiv (a\ b\ c)$, (λ^7) und können annehmen, daß $a + b = 4$ ist. Dann ergibt es sich aus dem früher bewiesenen Reziprozitätsgesetze, daß aus $\left(\left(\frac{\varkappa}{\pi}\right)\right) = +1$ stets $\left(\left(\frac{\pi}{\varkappa}\right)\right) = +1$ folgen muß. Ist aber $\left(\left(\frac{\varkappa}{\pi}\right)\right) = \pm i$, so kann durch ein ähnliches Verfahren, wie im oben ausführlich behandelten Falle, gezeigt werden, daß auch $\left(\left(\frac{\pi}{\varkappa}\right)\right) = \pm i$ ist.

Wir nehmen an, es sei $\left(\left(\frac{\varkappa}{\pi}\right)\right) = i$, und bestimmen ein Primideal ϱ derart, daß es die Gleichungen

$$\left(\left(\frac{i}{\varrho}\right)\right) = \pm i, \qquad \left(\left(\frac{\varkappa}{\varrho}\right)\right) = \mp i, \qquad \left(\left(\frac{\varkappa'}{\varrho}\right)\right) = 1,$$
$$\left(\left(\frac{\pi}{\varrho}\right)\right) = \mp i, \qquad \left(\left(\frac{\pi'}{\varrho}\right)\right) = 1$$

befriedigt; $\varkappa'$, π' sind die zu den Primzahlen $\varkappa$ bez. π konjugierten Primzahlen. Wir können wieder annehmen, es sei ϱ von der Form

$$\varrho \equiv (3\ 3\ c) \quad \text{bez.} \quad \equiv (1\ 1\ c), \quad (\lambda^7).$$

Da nach Voraussetzung $\left(\left(\frac{\pi'}{\varrho}\right)\right) = +1$ ist, so folgt hieraus wegen der Annahmen, die wir über die Zahlen π, ϱ gemacht haben, daß

$\left(\left(\frac{\varrho}{\pi'}\right)\right) = -1$ sein muß; denn es ist auch π' eine Primzahl von der ersten Art, so daß für π', ϱ die Reziprozitätsgleichung (10) gilt, und es wird, wenn wir $\pi' \equiv (a'\, b'\, c')$, (λ^7) setzen, $a' = b'$.

Nun können dieselben Schlüsse gemacht werden wie im oben behandelten Falle; man hat nur statt $\varkappa_1$ die Primzahl $\varkappa$ zu nehmen. Es ergeben sich unter Berücksichtigung der Gleichung $\left(\left(\frac{i}{\varkappa\bar{\varkappa}}\right)\right) = -1$ die Beziehungen

$$\left(\left(\frac{\varkappa}{\varrho}\right)\right) = \left(\left(\frac{\varrho}{\varkappa}\right)\right) = \mp i, \qquad \left(\left(\frac{\pi}{\varrho}\right)\right) = \left(\left(\frac{\varrho}{\pi}\right)\right) = \mp i. \tag{22}$$

Wie wir im vorigen Falle schlossen, daß der Körper $K(\sqrt[4]{\varkappa\varrho})$ vier voneinander verschiedene Geschlechter enthält und daß das Produkt der Charaktere, die ein Geschlecht bestimmen, gleich $+1$ ist, genau so können wir dasselbe im gegenwärtigen Falle schließen.

Nun ist dann weiter wegen der Gleichung $\left(\left(\frac{\varkappa\varrho}{\varkappa}\right)\right) = +1$ $\varkappa$ die Relativnorm bezüglich k eines Primideals $\mathfrak{P}$ des Körpers $K(\sqrt[4]{\varkappa\varrho})$. Betrachtet man das Charakterensystem dieses Ideals $\mathfrak{P}$, so findet man bei Beachtung der Gleichung $\left(\left(\frac{\pi,\, \varkappa\varrho}{\lambda}\right)\right) = +1$, daß

$$\left(\left(\frac{\pi}{\varkappa}\right)\right)\left(\left(\frac{\pi}{\varrho}\right)\right) = +1$$

sein muß. Vergleichen wir diese Gleichung mit der Gleichung

$$\left(\left(\frac{\varkappa\varrho}{\pi}\right)\right) = +1$$

und mit der zweiten der Gleichungen (22), so ergibt sich schließlich die Reziprozitätsgleichung

$$\left(\left(\frac{\varkappa}{\pi}\right)\right) = \left(\left(\frac{\pi}{\varkappa}\right)\right). \tag{23}$$

Ähnlich verfährt man, wenn $\left(\left(\frac{\varkappa}{\pi}\right)\right) = -i$ ist, und erhält zuletzt dieselbe Reziprozitätsgleichung.

Auch wenn man annimmt, daß $\left(\left(\frac{\varkappa}{\pi}\right)\right) = -1$ ist, kommt man schließlich durch dasselbe Verfahren zur Reziprozitätsgleichung (23). Es ist jedoch in diesem Falle die Primzahl ϱ so zu bestimmen, daß sie den Gleichungen

$$\left(\left(\frac{i}{\varrho}\right)\right) = \pm i, \quad \left(\left(\frac{\varkappa}{\varrho}\right)\right) = -1, \quad \left(\left(\frac{\varkappa'}{\varrho}\right)\right) = +1,$$
$$\left(\left(\frac{\pi}{\varrho}\right)\right) = -1, \quad \left(\left(\frac{\pi'}{\varrho}\right)\right) = +1$$

Genüge leistet.

Wir haben uns somit überzeugt, daß die Gleichung (10) für die betrachteten Fälle wirklich das Reziprozitätsgesetz liefert. Wir nahmen die Primzahlen, die wir der Betrachtung unterzogen, in besonderen Gestalten an, die stets durch Multiplikation mit einer geeigneten Potenz der Einheit i erreicht werden können. Lassen wir jedoch diese Annahme fallen und nehmen die Primzahlen π, π_1 in (10) in ganz beliebiger Form an, so überzeugt man sich leicht, daß auch dann noch immer jene Gleichung (10) richtig ist.

Wir wollen hier noch bemerken, daß aus (10) unmittelbar das besondere Reziprozitätsgesetz des Satzes 22 folgt.

Es soll jetzt schließlich *der zweite Ergänzungssatz* zum biquadratischen Reziprozitätsgesetze im Körper $k(i)$ abgeleitet werden. Bezeichnet man mit π eine beliebige zu λ prime Primzahl in k, für welche die Kongruenz $\pi \equiv (abc)$, (λ^7) besteht, so gilt die Gleichung

$$\left(\left(\frac{\lambda}{\pi}\right)\right)^{-1} = \left(\left(\frac{\lambda, \pi}{\lambda}\right)\right) \quad . \tag{24}$$

oder in einer anderen Form geschrieben:

$$\left(\left(\frac{\lambda}{\pi}\right)\right) = i^{-c}. \tag{24*}$$

Es sei zunächst π eine Primzahl der ersten Art. Dann können wir eine Potenz i^e von i bestimmen derart, daß

$$\left(\left(\frac{i^e\lambda}{\pi}\right)\right) = +1 \tag{25}$$

wird. Zufolge dieser Gleichung zerfällt π im Körper $K(\sqrt[4]{i^e\lambda})$ in vier voneinander verschiedene Primideale. Die Relativdiskriminante des Körpers $K(\sqrt[4]{i^e\lambda})$ enthält nur den einen Faktor λ. Die Einheit i ist im gegenwärtigen Falle Normenrest des Körpers $K(\sqrt[4]{i^e\lambda})$ nach λ, so daß das Charakterensystem eines Primideals $\mathfrak{P}$ des Körpers $K(\sqrt[4]{i^e\lambda})$, welches in π aufgeht, aus dem einzigen Charakter $\left(\left(\frac{\pi, i^e\lambda}{\pi}\right)\right)$ besteht; folglich muß

$$\left(\left(\frac{\pi, i^e\lambda}{\lambda}\right)\right) = +1$$

sein. Beachtet man ferner die Beziehung $\left(\left(\frac{\pi, i}{\lambda}\right)\right) = \left(\left(\frac{i}{\pi}\right)\right)$, so folgt mit Bezug auf (25) sofort die Gleichung (24), weil nach (5)

$$\left(\left(\frac{\pi, \lambda}{\lambda}\right)\right)\left(\left(\frac{\lambda, \pi}{\lambda}\right)\right) = +1$$

ist.

Nun sei $\varkappa$ eine Primzahl der dritten Art, so folgt aus $\left(\left(\frac{\lambda}{\varkappa}\right)\right) = +1$, weil der Körper $K(\sqrt[4]{\lambda})$ nur ein Geschlecht enthält und $\left(\left(\frac{i}{\varkappa}\right)\right) = +1$ ist, sofort die Gleichung

$$\left(\left(\frac{\varkappa, \lambda}{\lambda}\right)\right) = +1,$$

wie es der Ergänzungssatz (24) fordert.

Ist jedoch $\left(\left(\frac{\lambda}{\varkappa}\right)\right) = i$, so bestimmen wir eine Primzahl ϱ, welche die Gleichungen

$$\left(\left(\frac{i}{\varrho}\right)\right) = \pm i, \quad \left(\left(\frac{\varkappa}{\varrho}\right)\right) = \mp i$$

befriedigt. Dann ist nach dem biquadratischen Reziprozitätsgesetze

$$\left(\left(\frac{\varrho}{\varkappa}\right)\right) = \mp i;$$

folglich wird

$$\left(\left(\frac{\lambda\varrho}{\varkappa}\right)\right) = +1.$$

Die Relativdiskriminante bezüglich k von $K(\sqrt[4]{\lambda\varrho})$ enthält die zwei Faktoren λ und ϱ. Da jedoch

$$\left(\left(\frac{i, \lambda\varrho}{\varrho}\right)\right) = \left(\left(\frac{i}{\varrho}\right)\right) = \pm i$$

wird, so bilden die Idealklassen in $K(\sqrt[4]{\lambda\varrho})$ nur ein Geschlecht. Die Primzahl $\varkappa$ wird die Relativnorm bezüglich k eines Primideals $\mathfrak{K}$ in $K(\sqrt[4]{\lambda\varrho})$. Für den Charakter dieses Primideals finden wir die Gleichung

$$\left(\left(\frac{i\varkappa, \lambda\varrho}{\lambda}\right)\right) = \left(\left(\frac{i\varkappa}{\varrho}\right)\right) = +1.$$

Aus dieser Gleichung folgern wir weiter, daß

$$\left(\left(\frac{i, \lambda}{\lambda}\right)\right)\left(\left(\frac{i, \varrho}{\lambda}\right)\right)^{-1}\left(\left(\frac{\varkappa, \lambda}{\lambda}\right)\right)\left(\left(\frac{\varkappa, \varrho}{\lambda}\right)\right)^{-1} = +1$$

sein muß. Da jedoch $\left(\left(\frac{i, \lambda}{\lambda}\right)\right) = 1$, $\left(\left(\frac{\varkappa, \varrho}{\lambda}\right)\right) = 1$ ausfällt, folgt schließlich

$$\left(\left(\frac{\varkappa, \lambda}{\lambda}\right)\right) = \left(\left(\frac{i, \varrho}{\lambda}\right)\right) = \left(\left(\frac{\varrho, i}{\lambda}\right)\right)^{-1} = \left(\left(\frac{i}{\varrho}\right)\right)^{-1} = \left(\left(\frac{\lambda}{\varkappa}\right)\right)^{-1};$$

dies war zu beweisen.

Falls $\left(\left(\frac{\lambda}{\varkappa}\right)\right) = -i$ ist, trifft man leicht die Abänderungen, die in dem eben entwickelten Beweise anzubringen sind. Folglich bleibt nur

noch der Fall, daß $\left(\left(\frac{\lambda}{\varkappa}\right)\right) = -1$ ausfällt, zu betrachten. In diesem Falle bestimmen wir eine Primzahl ϱ in k derart, daß sie die Gleichungen

$$\left(\left(\frac{i}{\varrho}\right)\right) = \pm i, \quad \left(\left(\frac{\varkappa}{\varrho}\right)\right) = -1$$

befriedigt. Dann ist gewiß auch $\left(\left(\frac{\varrho}{\varkappa}\right)\right) = -1$, oder noch weiter

$$\left(\left(\frac{\lambda\varrho}{\varkappa}\right)\right) = +1.$$

Dieser Gleichung zufolge ist die Zahl $\varkappa$ die Relativnorm bezüglich k eines bestimmten Primideals $\mathfrak{R}$ in $K(\sqrt[4]{\lambda\varrho})$. Das Charakterensystem der Zahl $\varkappa$ enthält die Symbole

$$\left(\left(\frac{\varkappa, \lambda\varrho}{\lambda}\right)\right), \quad \left(\left(\frac{\varkappa, \lambda\varrho}{\varrho}\right)\right).$$

Es ist ferner $\left(\left(\frac{i, \lambda\varrho}{\varrho}\right)\right) = i$. Berücksichtigt man nun, daß

$$\left(\left(\frac{\varkappa, \lambda\varrho}{\varrho}\right)\right) = -1$$

ist, so folgt hieraus, daß das Charakterensystem von $\mathfrak{R}$ aus dem einen Charakter $\left(\left(\frac{-\varkappa, \lambda\varrho}{\lambda}\right)\right)$ besteht; mithin muß

$$\left(\left(\frac{-\varkappa, \lambda\varrho}{\lambda}\right)\right) = \left(\left(\frac{-\varkappa, \lambda}{\lambda}\right)\right)\left(\left(\frac{-\varkappa, \varrho}{\lambda}\right)\right)^{-1} = +1$$

sein. Hieraus folgt aber wegen der Gleichungen

$$\left(\left(\frac{-1, \lambda}{\lambda}\right)\right) = +1, \quad \left(\left(\frac{-1, \varrho}{\lambda}\right)\right) = -1, \quad \left(\left(\frac{\varkappa, \varrho}{\lambda}\right)\right) = +1$$

die Beziehung

$$\left(\left(\frac{\varkappa, \lambda}{\lambda}\right)\right) = -1,$$

was zu beweisen war.

Schließlich nehmen wir an, $\varkappa$ sei eine Primzahl der zweiten Art. Wir erkennen leicht, daß aus $\left(\left(\frac{\lambda}{\varkappa}\right)\right) = +1$ auch die Gleichung

$$\left(\left(\frac{\varkappa, \lambda}{\lambda}\right)\right) = +1$$

folgt. Zu diesem Behufe hat man den Körper $K(\sqrt[4]{\lambda})$ zu betrachten und zu beachten, daß wegen $\left(\left(\frac{i, \lambda}{\lambda}\right)\right) = +1$ in diesem Körper nur ein Geschlecht besteht.

Ist jedoch $\left(\left(\frac{\lambda}{\varkappa}\right)\right) = i$, so bestimmen wir eine Primzahl ϱ in k, welche den Gleichungen

$$\left(\left(\frac{i}{\varrho}\right)\right) = \pm i, \quad \left(\left(\frac{\varkappa}{\varrho}\right)\right) = \mp i$$

Genüge leistet, und nehmen ϱ in einer der Formen $\varrho \equiv (33c)$ bez. $\equiv (11c)$, (λ^7) an. Dann verfahren wir weiter wie zuvor. Die Fälle, wo $\left(\left(\frac{\lambda}{\varkappa}\right)\right) = -i$ oder $\left(\left(\frac{\lambda}{\varkappa}\right)\right) = -1$ ausfällt, bedürfen keiner weiteren Erläuterung mehr.

Damit ist der zweite Ergänzungssatz vollständig bewiesen für den Fall, daß die Primzahlen von derjenigen Gestalt sind, die wir ihnen bei der abgeschlossenen Untersuchung verliehen dachten. Da jedoch

$$\left(\left(\frac{i^s \cdot \lambda}{\lambda}\right)\right) = +1$$

ist, wenn s einen der Werte 0, 1, 2, 3 hat, so gilt die Gleichung (24) auch dann noch, wenn die Primzahl π in einer beliebigen Form genommen wird.

Vinkovci, am 18. Juni 1905.

Berichtigung

zu der Arbeit von G. Zemplén: Über die Kompatibilitätsbedingungen bei Unstetigkeiten in der Elektrodynamik in Band 62.

p. 578 ist in der Formel für $\bar{J}^L$ statt $x_t \mathfrak{A}_t^x + y_t \mathfrak{A}_t^y + z_t \mathfrak{A}_t^z$ zu setzen $x_t \mathfrak{A}^x + y_t \mathfrak{A}^y + z_t \mathfrak{A}^z$;

p. 580 ist in den Formeln (27), (28) und in der Zeile 11 v. u. überall statt σ zu setzen $\sigma \sqrt{\psi_x^2 + \psi_y^2 + \psi_z^2}$.

Simon, Dr. Max, Professor an der Universität Straßburg i. E., Methodik der elementaren Arithmetik in Verbindung mit algebraischer Analysis. Mit 9 Textfiguren. [VI u. 108 S.] gr. 8. 1906. geb. n. ℳ 2.20.

Starke, Dr. H., Professor an der Universität Greifswald, experimentelle Elektrizitätslehre. Mit besonderer Berücksichtigung der neueren Anschauungen und Ergebnisse dargestellt. Mit 275 in den Text gedruckten Abbildungen. [XIV u. 422 S.] gr. 8. 1904. In Leinw. geb. n. ℳ 6.—

Staude, Dr. Otto, Professor an der Universität Rostock, analytische Geometrie des Punktes, der geraden Linie und der Ebene. Ein Handbuch zu den Vorlesungen und Übungen über analytische Geometrie. Mit 387 Figuren im Text. [VIII u. 447 S.] gr. 8. 1905. In Leinw. geb. n. ℳ 14.—

Stolz, Dr. Otto, weil. Professor an der Universität Innsbruck, und **Dr. J. Anton Gmeiner,** Professor an der deutschen Universität Prag, Einleitung in die Funktionentheorie. Zweite, umgearbeitete und vermehrte Auflage der von den Verfassern in der „Theoretischen Arithmetik" nicht berücksichtigten Abschnitte der „Vorlesungen über allgemeine Arithmetik" von O. Stolz. Mit 21 Figuren im Text. [X u. 598 S.] gr. 8. 1905. In Leinw. geb. n. ℳ 15.—

Auch in 2 Abteilungen:

I. Abteilung. Mit 10 Figuren im Text. [VI u. 242 S.] 1904. In Leinw. geb. n. ℳ 6.—

II. — Mit 11 Figuren im Text. [VIII u. S. 243—598.] 1905. In Leinw. geb. n. ℳ 9.—

Thomae, Dr. J., Professor an der Universität Jena, Sammlung von Formeln und Sätzen aus dem Gebiete der elliptischen Funktionen nebst Anwendungen. [IV u. 44 S.] 4. 1905. kart. n. ℳ 2.80.

——— Grundriß einer analytischen Geometrie der Ebene. Mit 8 Figuren im Text. [X u. 183 S.] gr. 8. 1906. In Leinw. geb. n. ℳ 3.60.

Thomson, J. J., D. Sc. Lld. Ph. D. Sc. S. Fellow etc., Elektrizitäts-Durchgang in Gasen. Deutsche autor. Ausgabe unter Mitwirkung des Autors besorgt und ergänzt von Dr. E. Marx, Privatdozent an der Universität Leipzig. Mit 187 Figuren im Text. [VII u. 587 S.] gr. 8. 1906. geb. n. ℳ 18.—, in Leinw. geb. n. ℳ 19.—

Vahlen, Dr. Karl Theodor, Professor an der Universität Heidelberg, abstrakte Geometrie. Untersuchungen über die Grundlagen der Euklidischen und Nicht-Euklidischen Geometrie. Mit zahlreichen Figuren im Text. [XII u. 302 S.] gr. 8. 1905. In Leinw. geb. n. ℳ 12.—

Vivanti, G., Professor an der Universität Messina, Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen. Umarbeitung unter Mitwirkung des Verfassers deutsch hrsg. von Dr. A. Gutzmer, Professor an der Universität Halle a. S. [VI u. 512 S.] gr. 8. 1906. In Leinw. geb. n. ℳ 12.—

Wallentin, Dr. J., Regierungsrat und Landesschulinspektor in Wien, Einleitung in die theoretische Elektrizitätslehre. Mit 81 Figuren im Text. [X u. 444 S.] gr. 8. 1904. In Leinw. n. ℳ 12.—

Weber, Dr. H., und **Dr. J. Wellstein,** Professoren in Straßburg, Encyklopädie der Elementar-Mathematik. Ein Handbuch für Lehrer und Studierende. In 3 Bänden. gr. 8. I Band. Elementare Algebra und Analysis. Bearbeitet von H. Weber. 2. Auflage. Mit 38 Textfiguren. [XVIII u. 539 S.] 1906. In Leinw. geb. n. ℳ 9.60. II. Band. Elemente der Geometrie. Bearbeitet von H. Weber, J. Wellstein und W. Jacobsthal. Mit 280 Textfiguren. [XII u. 404 S.] 1905. In Leinw. geb. n. ℳ 12.— (Bd. III. Anwendungen der Elementar-Mathematik u. d. Pr.)

Weinstein, Dr. B., Professor an der Universität Berlin, die philosophischen Grundlagen der Wissenschaften. Vorlesungen gehalten an der Universität Berlin. [XIV u. 548 S.] 8. 1906. In Leinw. geb. n. ℳ 9.—

Wien, Dr. W., Professor an der Universität Würzburg, über Elektronen. Vortrag, gehalten auf der 77. Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte in Meran. [38 S.] gr. 8. 1905. geb. n. ℳ 1.—

Wilczynski, E. J., A. M., Ph. D., Research Associate of the Carnegie Institution of Washington, Assistant Professor of Mathematics at the University of California, projective differential geometry of curves and ruled surfaces. [VIII u. 320 S.] gr. 8. 1906. In Leinw. geb. n. ℳ 10.—

Mathematische Annalen Band 51 und Folge in der ganzen Serie oder einzeln zu kaufen gesucht. Gefällige Anerbieten unter N. 100 an die Verlagsbuchhandlung **B. G. Teubner** in **Leipzig** erbeten.

INHALT.

	Seite
Allgemeiner Existenzbeweis für den Klassenkörper eines beliebigen algebraischen Zahlkörpers. Von Philipp Furtwängler in Bonn	1
Die Reihenentwicklungen der Potentialtheorie. Von Emil Hilb in Augsburg. (Mit 5 Figuren im Text)	89
Sulla risoluzione aritmetica delle congruenze binomie secondo un modulo primo. Di Michele Cipolla a Palermo	54
Über aufeinander abwickelbare P-Flächen. Von B. Mlodzejewski in Moskau	62
Zur Theorie des relativbiquadratischen Zahlkörpers. Von Stephan Bochniček in Agram (Kroatien)	65
Berichtigung von Herrn G. Zemplén	144

Wir ersuchen unsere geehrten Herren Mitarbeiter, etwaige, den Abhandlungen beizufügende Figuren — gleichviel ob dieselben im Texte selbst oder auf besonderen Tafeln veröffentlicht werden sollen — im Interesse einer raschen und exakten Ausführung stets auf besonderen Blättern, wenn möglich in der gewünschten Größe und in tunlichst präziser Zeichnung dem Manuskripte beifügen zu wollen. Außerdem wird um möglichst genaue Angabe der Adresse gebeten.

Die Redaktion.

☞ Jeder Band der Annalen besteht aus 4 Heften und umfaßt ca. 36 Druckbogen. Um jedoch in jedem Heft nur abgeschlossene Artikel zu geben, werden die einzelnen Hefte mitunter von ungleicher Stärke sein.

Der Preis für den Band von 4 Heften beträgt 20 Mark; jährlich erscheinen etwa 4—6 Hefte. Alle Buchhandlungen und Postanstalten nehmen Bestellungen an.

Verantwortl. Redaktion: **F. Klein**, Göttingen, Wilh.-Weber-Str. 3, **W. v. Dyck**, München, Hildegardstr. 1½, **David Hilbert**, Göttingen, Wilh.-Weber-Str. 29, **Otto Blumenthal**, Aachen, Bötschenstraße 57.

Zusendungen sind zu richten an die Mitglieder der auf der Titelseite genannten Gesamtredaktion.

Hierzu Beilagen von B. G. Teubner in Leipzig, welche wir der Beachtung unserer Leser bestens empfehlen.

MATHEMATISCHE ANNALEN.

BEGRÜNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN.

Unter Mitwirkung der Herren

PAUL GORDAN, ADOLPH MAYER, CARL NEUMANN, MAX NOETHER
KARL VONDERMÜHLL, HEINRICH WEBER

gegenwärtig herausgegeben

von

Felix Klein
in Göttingen

Walther v. Dyck
in München

David Hilbert
in Göttingen.

Otto Blumenthal
in Aachen.

63. Band. 2. Heft.

Mit 2 Figuren im Text.

Ausgegeben am 30. November 1906.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1906.

☞ Generalregister zu den Mathematischen Annalen, Band 1—50. Zusammengestellt von A. Sommerfeld. Mit einem Bildnis von A. Clebsch in Heliogravüre. [XI u. 202 S.] gr. 8. geh. n. Mk. 7.—

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

OSTASIENFAHRT.

ERLEBNISSE UND BEOBACHTUNGEN EINES NATURFORSCHERS IN CHINA, JAPAN UND CEYLON.

Von Dr. **FRANZ DOFLEIN,**

PRIVATDOZENT
DER ZOOLOGIE AN DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN UND II. KONSERVATOR DER K. BAYER. ZOOLOGISCHEN STAATSSAMMLUNG.

Mit zahlreichen Abbildungen im Text und auf 8 Tafeln, sowie mit 4 Karten.

[XIII u. 512 S.] gr. 8. 1906. In Leinwand geb. ℳ 13.—

Dies Buch ist kein Reisewerk im gewöhnlichen Sinne. Es gibt nicht in feuilletonistischer Weise flüchtige Eindrücke wieder, sondern es ist das Ergebnis eingehender Forschung. Verfasser verbindet mit dem scharf beobachtenden Blick des Naturforschers die allgemeinen Interessen des Kulturhistorikers. In selten anschaulicher Sprache entwirft er ein glänzendes Bild von dem farbenfrohen Leben des fernen Ostens, dessen Menschen, Tiere und Pflanzen er in die verschiedenen Äußerungen ihres Seins verfolgt.

Nirgends bietet er Doktrinäres, stets sind seine Schilderungen durchwebt von persönlich Erlebtem. Von großem Interesse sind seine Beiträge zur Psyche des japanischen Volkes, das er in sonst von Europäern fast gar nicht besuchten Gebieten zu beobachten Gelegenheit hatte. Diese Darstellungen sind verknüpft mit der Schilderung der Tiefseeforschungen des Verfassers und mit seinen sehr eigenartigen Studien über das Leben von tropischen Ameisen und Termiten in Ceylon. Eine große Zahl prächtiger Abbildungen belebt den Text. Sie sind bald dem Volksleben, bald der Tier- und Pflanzenwelt jener Gebiete entnommen. Mehrere Karten erleichtern die Orientierung. So wird in diesem Werk der Naturforscher in gleicher Weise wie der Ethnograph seine Rechnung finden, und der Laie wird der eleganten, geistvollen Darstellung mit größter Spannung folgen.

„. . . Das ist allein schon Stoff genug zur Füllung eines gediegenen Reisewerkes, ganz abgesehen von den hochinteressanten wissenschaftlichen Ergebnissen, die uns hier geboten werden. Mitteilungen über das Vorkommen der verschiedensten Tiefseetiere an der japanischen Küste in einem Gebiet, wo polare und mediterrane Tierformen, kalte und warme Strömungen aufeinander stoßen, wo ein starkes Gefälle des Meeresbodens einer großen Arten- und Individuenzahl günstig ist. Hieran kommen Beobachtungen über Vögel und Säugetiere in den Dschungeln Indiens, sowie über Ameisen und gesellschaftlich lebende Termiten auf Ceylon. Aber der Forschungsreisende hat den interessantesten Gegenstand, Menschenart und Menschenleben, nicht vergessen, er läßt uns tiefere Blicke in die alten Kulturwelten des Ostens tun, als mancher andere Reisende, der, besonders in Japan, nur mit modernisierten Menschen verkehrt, sich nur in Europäerviertel oder auf das den Europäern angewiesene Japanerviertel angehalten hat. . . . Dem Lesenden wie die Schönheit und den Reichtum des Bilderschmuckes, der keine Ladenhüter enthält, wie denn auch im Text Sachen, die man überall nachlesen kann, nur kurz behandelt werden. Soweit die Bilder auf ostasiatische Quellen zurückgehen, es gilt das z. B. auch von dem sparten Vorsatzpapier, sind diese in den Anmerkungen sorgfältig angegeben. Sehr hübsch ist auch die Einbanddecke mit einer von Frauenhand leicht stilisierten Kirschenblüte. Das schöne Reisewerk ist für alle gebildeten und urteilsfähigen Leser zu empfehlen."

(Literarische Beilage Nr. 31 der Kölnischen Volkszeitung 1906.)

„. . . Das prächtig ausgestattete Werk enthält außer einer größeren Reihe naturwissenschaftlicher Beobachtungen und Landschaftschilderungen auch eine eingehende Wiedergabe der Eindrücke, die der Verfasser vom Volksleben der von ihm bereisten Gebiete erhalten hat. Besonders Interessantes werden wir über Japan und die Japaner behandelt, über deren Fortschritte und Schwächen er sich sehr umfassend äußert. Die alle, die es studie zum Ausdruck gebrachten Betrachtungen können allen denen, die sich mit dem Werden und zukünftigen Können der neuen Großmacht im fernen Osten befassen, als wertvolle Lektüre nur empfohlen werden." (Koloniale Zeitschrift. 1906. Nr. 17.)

Über die Verteilung der Primideale in den Idealklassen eines algebraischen Zahlkörpers.

Von

Edmund Landau in Berlin.

Vorwort.

In einer Reihe von Arbeiten*) habe ich die wichtigsten bekannten Gesetze über die Verteilung der Primzahlen und speziell der Primzahlen einer arithmetischen Progression mit vereinfachten Hilfsmitteln bewiesen und zum Teil verschärft. Die von mir angewandten Methoden benutzen nur die Elemente der Funktionentheorie, in erster Linie den Cauchyschen Integralsatz; ich habe keinen Gebrauch von den neueren Untersuchungen der Herren Hadamard, v. Mangoldt und de la Vallée Poussin über die Dichtigkeit der Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion und einiger verwandter Funktionen gemacht. Dies war darum von Bedeutung, weil es für die von Herrn Dedekind eingeführte Zetafunktion, welche einem beliebigen algebraischen Zahlkörper entspricht, unbekannt ist, ob sie in der ganzen Ebene existiert und ob sie Nullstellen besitzt. Meine neuen analytischen Kunstgriffe waren imstande, zum ersten Mal**) den *„Primidealsatz"* zu beweisen:

*) „Neuer Beweis des Primzahlsatzes und Beweis des Primidealsatzes", Mathematische Annalen, Bd. 56, 1903, S 645—670; „Über die Primzahlen einer arithmetischen Progression", Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien, mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse, Bd. 112, Abt. 2a, 1903, S. 493—535; „Über die zahlentheoretische Funktion $\mu(k)$", ebenda, S. 537—570; „Bemerkungen zu der Abhandlung von Herrn Kluyver: Reeksen afgeleid uit de reeks $\sum \frac{\mu(m)}{m}$", Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam, Verslagen, Bd. 13, 1904, S. 71—83. Ich habe hier nur diejenigen Arbeiten erwähnt, an welche die vorliegende Abhandlung anknüpft. Übrigens setze ich aus ihnen nichts als bekannt voraus.

**) S. die in Anm. 1 zuerst genannte Arbeit; der dort gegebene Beweis des Primidealsatzes benutzt einige Ergebnisse meiner Abhandlung: „Über die zu einem algebraischen Zahlkörper gehörige Zetafunktion und die Ausdehnung der Tschebyschefschen Primzahlentheorie auf das Problem der Verteilung der Primideale", Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 125, 1903, S. 64—188.

Die Anzahl der Primideale eines beliebigen algebraischen Zahlkörpers, deren Norm $\leqq x$ ist, ist asymptotisch gleich $\frac{x}{\log x}$, d. h. ihr Quotient durch $\frac{x}{\log x}$ nähert sich für $x = \infty$ der Grenze 1.

Im ersten und zweiten Teil der vorliegenden Abhandlung untersuche ich die Verteilung der Primideale eines algebraischen Zahlkörpers auf die einzelnen Klassen äquivalenter Ideale. Mein wichtigstes Resultat ist als Hauptsatz 1*) bezeichnet. Die Methode der Beweisführung ist analog zu meinen früheren Untersuchungen über die arithmetische Progression, welche in dem a. a. O. zum erstenmal bewiesenen Satze**) gipfelten:

k und l seien zwei teilerfremde Zahlen, $\varrho(x)$ die Anzahl der Primzahlen $ky + l \leqq x$, $\mathrm{Li}(x)$ der Integrallogarithmus von x, $\varphi(k)$ die Eulersche zahlentheoretische Funktion, m eine beliebige reelle Größe. Dann ist

$$\lim_{x=\infty} \frac{\log^m x}{x} \left(\varrho(x) - \frac{1}{\varphi(k)} \mathrm{Li}(x)\right) = 0.$$

Im dritten Teil der vorliegenden Abhandlung werde ich u. a. einen Satz (Hauptsatz 3)***) beweisen, der sowohl den Hauptsatz 1 (und dadurch den Primidealsatz) als auch den soeben angeführten Satz über die Primzahlen einer arithmetischen Progression als Spezialfälle enthält.

Im vierten Teil ziehe ich aus den allgemeinen Sätzen einige besonders wichtige Folgerungen.

Meine neuen Sätze besagen durchweg, daß gewisse Grenzwerte existieren oder gewisse unendliche Reihen konvergieren. Es ist leicht, heuristische Gründe anzugeben, welche die Sätze wahrscheinlich machen, und der Wortlaut der neuen Sätze wird den Kenner nicht überraschen. Jedoch hat es mich selbst aufs Höchste überrascht, daß meine Methoden kräftig genug sind, um Beweise für diese Sätze zu liefern.

Um dem Leser das Verständnis zu erleichtern, setze ich in der Theorie der Zetafunktion und der verwandten Funktionen nichts aus meinen früheren Arbeiten oder denen anderer Autoren (Riemann, Hadamard, v. Mangoldt, de la Vallée Poussin usw.) als bekannt voraus. Wohl aber muß der Leser mit der Theorie der algebraischen Zahlkörper vertraut sein.

Der erste Paragraph jedes der drei ersten Teile dient ihm als Einleitung.

---

*) s. S. 147.

**) S. die zweite der auf S. 145, Anm. 1 zitierten Arbeiten, S. 507 und 532.

***) s. S. 197.

Erster Teil.

§ 1

(Einleitung).

Das Ziel der §§ 2—10 ist der

Hauptsatz 1. *Ein algebraischer Zahlkörper x habe die Eigenschaft, daß die über alle Primideale der Hauptklasse (im engeren Sinne*)) erstreckte Summe***)*

$$\sum_{\mathfrak{p}} \frac{1}{N\mathfrak{p}}$$

divergiert. h sei die Anzahl der Idealklassen. Es sei $\varrho(x)$ die Anzahl der Primideale einer bestimmten Klasse, deren Norm $\leqq x$ ist, m eine beliebige reelle Zahl. Dann ist

$$\lim_{x=\infty} \frac{\log^m x}{x}\left(\varrho(x) - \frac{1}{h}\,\mathrm{Li}(x)\right) = 0. \tag{1}$$

Dies besagt insbesondere für $m = 1$ mit Rücksicht auf

$$\lim_{x=\infty} \frac{\mathrm{Li}(x)\log x}{x} = 1,$$

daß für jede Klasse

$$\lim_{x=\infty} \frac{\varrho(x)}{\frac{x}{\log x}} = \frac{1}{h}$$

ist, also für zwei beliebig gegebene Klassen, wenn $\varrho_1(x)$ und $\varrho_2(x)$ die zugehörigen Anzahlen bezeichnen, daß

$$\lim_{x=\infty} \frac{\varrho_1(x)}{\varrho_2(x)}$$

existiert und $= 1$ ist.

Mit anderen Worten:

In jeder Klasse eines algebraischen Zahlkörpers, für welchen die über alle Primideale der Hauptklasse erstreckte Summe

$$\sum_{\mathfrak{p}} \frac{1}{N\mathfrak{p}}$$

divergiert, gibt es asymptotisch gleich viele Primideale.

Daß unter der gemachten Voraussetzung für jede Klasse

$$\sum_{\mathfrak{p}} \frac{1}{N\mathfrak{p}^s} = \frac{1}{h}\log\frac{1}{s-1} + G(s) \qquad (s > 1) \tag{2}$$

*) D. h. zwei Ideale heißen äquivalent, wenn ihr Quotient eine (ganze oder gebrochene) Zahl des Körpers mit positiver Norm ist.

**) $N\mathfrak{n}$ bezeichnet die Norm des Ideals $\mathfrak{n}$; ich schreibe keine Klammer, auch nicht in der Folge bei $N\mathfrak{n}^s$ (s^{te} Potenz von $N\mathfrak{n}$).

ist, wo $\lim_{s=1} G(s)$ existiert, folgt ohne weiteres aus den Untersuchungen von Herrn Weber „über Zahlengruppen in algebraischen Körpern“*), also durch Anwendung der klassischen Dirichletschen Methode. Aber die Gleichung (2) berechtigt noch bei weitem nicht zu dem Schluß, daß jede Klasse des Körpers asymptotisch gleich viele Primideale enthält. Um diesen Schluß zu rechtfertigen, besteht die Hauptschwierigkeit in dem Nachweise der Existenz der Grenzwerte

$$\lim_{x=\infty} \frac{\varrho_1(x)}{\frac{x}{\log x}}, \qquad \lim_{x=\infty} \frac{\varrho_2(x)}{\frac{x}{\log x}}. \tag{3}$$

Aus

$$\begin{aligned} \sum_{\mathfrak{p}_1} \frac{1}{N\mathfrak{p}_1^{\,s}} &= \frac{1}{h} \log \frac{1}{s-1} + G_1(s), \\ \sum_{\mathfrak{p}_2} \frac{1}{N\mathfrak{p}_2^{\,s}} &= \frac{1}{h} \log \frac{1}{s-1} + G_2(s)^{**}) \end{aligned} \tag{4}$$

läßt sich unmittelbar nur folgern: wenn die Grenzwerte (3) existieren, so sind sie $= 1$.

Wie groß die zwischen (4) und der Gleichung

$$\lim_{x=\infty} \frac{\varrho_1(x)}{\varrho_2(x)} = 1 \tag{5}$$

noch vorhandene Lücke ist, ergibt sich aus folgenden historischen Daten.

In einem wichtigen analogen Fall — für zwei arithmetische Progressionen $ky + l_1$ und $ky + l_2$ mit derselben Differenz k, wo l_1 und l_2 zu k relativ prim sind — hatte Dirichlet***) im Jahre 1837 bewiesen, daß, $\varphi(k) = h$ gesetzt,

$$\begin{aligned} \sum_{p_1} \frac{1}{p_1^{\,s}} &= \frac{1}{h} \log \frac{1}{s-1} + G_1(s), \\ \sum_{p_2} \frac{1}{p_2^{\,s}} &= \frac{1}{h} \log \frac{1}{s-1} + G_2(s) \end{aligned}$$

ist, wo p_1 die Primzahlen durchläuft, welche $\equiv l_1 \pmod{k}$ sind, und p_2 die Primzahlen $\equiv l_2 \pmod{k}$. $G_1(s)$ und $G_2(s)$ sind Funktionen, welche gegen einen endlichen Grenzwert konvergieren, falls die reelle Variable s zu 1

*) Zweite Abhandlung, Mathematische Annalen, Bd. 49, 1897, S. 83—89.

**) Wo $\mathfrak{p}_1$ bezw. $\mathfrak{p}_2$ die Primideale der betreffenden Klasse durchläuft.

***) „Beweis des Satzes, daß jede unbegrenzte arithmetische Progression, deren erstes Glied und Differenz ganze Zahlen ohne gemeinschaftlichen Faktor sind, unendlich viele Primzahlen enthält“, Abhandlungen der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, S. 45—71; Werke, Bd. 1, 1889, S. 313—342.

abnimmt. Aber erst 59 Jahre später hat Herr de la Vallée Poussin*) den Nachweis geführt, daß für die Anzahlen $\varrho_1(x)$ und $\varrho_2(x)$ der Primzahlen $p_1 \leqq x$ bezw. $p_2 \leqq x$

$$\lim_{x=\infty} \frac{\varrho_1(x)}{\varrho_2(x)} = 1 \tag{5}$$

ist. Dirichlet hatte diese Gleichung (5) in der Einleitung seiner berühmten Arbeit nur vermutungsweise mit den klaren und unzweideutigen Worten ausgesprochen: „Die aufmerksame Betrachtung der natürlichen Reihe der Primzahlen läßt an derselben eine Menge von Eigenschaften wahrnehmen, deren Allgemeinheit durch fortgesetzte Induktion zu jedem beliebigen Grade von Wahrscheinlichkeit erhoben werden kann, während die Auffindung eines Beweises, der allen Anforderungen der Strenge genügen soll, mit den größten Schwierigkeiten verbunden ist. Eines der merkwürdigsten Resultate dieser Art bietet sich dar, wenn man sämtliche Glieder der Reihe durch dieselbe, übrigens ganz beliebige Zahl dividiert. Nimmt man die Primzahlen aus, die im Divisor aufgehen und mithin unter den ersten Gliedern der Reihe vorkommen, so werden alle übrigen einen Rest lassen, welcher relative Primzahl zum Divisor ist, und das Resultat, welches sich bei fortgesetzter Division herausstellt, besteht darin, daß jeder Rest der genannten Art unaufhörlich wiederkehrt, *und zwar so, daß das Verhältnis der Zahlen, welche für irgend zwei solche Reste bezeichnen, wie oft sie bis zu einem gewissen Gliede erschienen sind, bei immer weiter fortgesetzter Division die Einheit zur Grenze hat.* Abstrahiert man von der zunehmenden Gleichmäßigkeit des Vorkommens der einzelnen Reste und beschränkt das Beobachtungsresultat auf die nie aufhörende Wiederkehr eines jeden derselben, so läßt sich dasselbe in dem Satze aussprechen: daß jede unbegrenzte arithmetische Reihe, deren erstes Glied und Differenz keinen gemeinschaftlichen Faktor haben, unendlich viele Primzahlen enthält."

Dirichlet beweist die letztere Behauptung auf Grund seiner Gleichung

$$\sum_{p \equiv l} \frac{1}{p^s} = \frac{1}{h} \log \frac{1}{s-1} + G(s);$$

der hier kursiv gedruckte Satz spricht offenbar genau die zuerst von Herrn de le Vallée Poussin bewiesene Gleichung (5) aus. Übrigens habe ich dieselbe erheblich einfacher bewiesen und dahin verschärft, daß für jedes m

*) „Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers. Deuxième Partie. Les fonctions de Dirichlet et les nombres premiers de la forme linéaire $Mx + N$", Annales de la société scientifique de Bruxelles, Bd. 20, Teil 2, 1896, S. 281—362.

$$\lim_{x=\infty} \log^m x \left(\frac{\varrho_1(x)}{\varrho_2(x)} - 1\right) = 0 \tag{6}$$

ist. Dies folgt nämlich unmittelbar aus dem a. a. O.*) von mir bewiesenen Satze

$$\varrho(x) = \frac{1}{h} \operatorname{Li}(x) + O(xe^{-d\sqrt{\log x}}),$$

wo d eine passend wählbare positive Konstante ist.

Analog werde ich in §§ 2—10 für die Primideale der gegebenen Klasse beweisen, daß

$$\varrho(x) = \frac{1}{h} \operatorname{Li}(x) + O(xe^{-d\sqrt{\log x}})$$

ist; daraus folgt unmittelbar die Gleichung (1), also der Hauptsatz 1 und auch die in der Schreibweise mit (6) übereinstimmende Gleichung, in welcher $\varrho_1(x)$ und $\varrho_2(x)$ die auf S. 147 angegebene Bedeutung haben.

§ 2.

Satz I. *Es sei $f(n)$ eine zahlentheoretische Funktion**), welche den beiden Bedingungen****)*

$$\sum_{n=1}^{x} \frac{|f(n)|}{n} = O(\log x) \tag{7}$$

und

$$\sum_{n=1}^{x} f(n) = O(x^{1-\gamma}) \tag{8}$$

genügt, wo γ eine zwischen 0 (exkl.) und 1 (inkl.) gelegene Konstante ist. Dann konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} \tag{9}$$

für $\Re(s) > 1 - \gamma$ und stellt dort eine reguläre Funktion $\varphi(s)$ dar; ferner besteht, wenn $s = \sigma + ti$ gesetzt wird, für

$$t \geqq e^{\frac{2}{\gamma}}, \quad 1 - \frac{1}{\log t} \leqq \sigma \leqq 2 \tag{10}$$

die Ungleichung

*) l. c., S. 532.

**) D. h. $f(n)$ ist für jedes ganzzahlige $n \geqq 1$ definiert, braucht aber nicht ganzzahlig und auch nicht reell zu sein.

***) Unter $O(g(x))$ wird eine Funktion von x verstanden, deren Quotient durch $g(x)$ dem absoluten Betrage nach für alle x von einer gewissen Stelle an unterhalb einer endlichen Schranke gelegen ist.

$$|\varphi(s)| < c_1 \log t, \tag{11}$$

*wo c_1 eine Konstante bezeichnet.**)

Das Gebiet (10) erstreckt sich ins Unendliche.

Beweis. Zunächst ist klar, daß $\varphi(s)$ für die durch (10) bestimmten Werte von s konvergiert; denn es ist für jedes solche s

$$\Re(s) \geqq 1 - \frac{1}{\log t} \geqq 1 - \frac{1}{\frac{2}{\gamma}} = 1 - \frac{\gamma}{2} > 1 - \gamma,$$

und wegen (8) ist bekanntlich die Reihe (9) für $\Re(s) > 1-\gamma$ konvergent, und zwar gleichmäßig in einer gewissen Umgebung jeder Stelle dieser Halbebene. Der Vollständigkeit wegen will ich dies beweisen. Wenn

$$S(0) = 0$$

und für $x \geqq 1$

$$\sum_{n=1}^{x} f(n) = S(x)$$

gesetzt wird, so ist nach (8) für alle $x \geqq 1$

$$|S(x)| < A x^{1-\gamma},$$

wo A eine Konstante bezeichnet. Es ist

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{x} \frac{f(n)}{n^s} &= \sum_{n=1}^{x} \frac{S(n) - S(n-1)}{n^s} = \sum_{n=1}^{x} S(n) \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s} \right) + \frac{S(x)}{(x+1)^s} \\ &= \sum_{n=1}^{x} S(n)\, s \int_n^{n+1} \frac{du}{u^{s+1}} + \frac{S(x)}{(x+1)^s}, \end{aligned} \tag{12}$$

und für alle s des Rechtecks

$$\sigma_0 \leqq \sigma \leqq \sigma_1, \quad -t_1 \leqq t \leqq t_1, \tag{13}$$

wo $\sigma_0 > 1-\gamma$ ist,

$$\left| S(n)\, s \int_n^{n+1} \frac{du}{u^{s+1}} \right| < A n^{1-\gamma} (\sigma_1 + t_1) \frac{1}{n^{1+\sigma_0}} = \frac{A(\sigma_1 + t_1)}{n^{\sigma_0 + \gamma}},$$

$$\frac{S(x)}{(x+1)^s} < \frac{A x^{1-\gamma}}{(x+1)^{\sigma_0}} < \frac{A}{x^{\sigma_0 + \gamma - 1}}.$$

Hieraus folgt nach (12) die gleichmäßige Konvergenz der Reihe (9) im Rechteck (13), also in einer gewissen Umgebung jeder Stelle der Halbebene $\Re(s) > 1-\gamma$. Die Reihe (9) stellt also für $\Re(s) > 1-\gamma$ eine reguläre analytische Funktion $\varphi(s)$ dar.

---

*) c_1 hängt also nur von der Funktion $f(n)$ ab. Analog werden in der Folge mit $c_2, c_3, \cdots$ Konstanten bezeichnet, welche gewisse Relationen für alle s eines Gebietes erfüllen. Die Bezeichnung wird stets so gewählt sein, daß jede solche Konstante $c_2, c_3, \cdots$ durch jede größere Zahl ersetzt werden kann.

Es sei nun s eine beliebige Zahl, welche die Ungleichungen (10) erfüllt; dann zerlege ich in

$$\varphi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$$

die Summe in zwei durch $\left[t^{\frac{1}{\gamma}}\right]$ getrennte Teile*) und erhalte dadurch

$$\varphi(s) = \sum_{n=1}^{t^{\frac{1}{\gamma}}} \frac{f(n)}{n^s} + \sum_{n=t^{\frac{1}{\gamma}}+1}^{\infty} \frac{S(n) - S(n-1)}{n^s}. \tag{14}$$

Hierbei und im folgenden verstehe ich der bequemeren Schreibweise wegen unter einer Summe mit einer nicht ganzzahligen oberen oder unteren Summationsgrenze y, daß der Summationsbuchstabe bis $[y]$ bezw. von $[y]$ an läuft. Aus (14) folgt weiter

$$\varphi(s) = \sum_{n=1}^{t^{\frac{1}{\gamma}}} \frac{f(n)}{n^s} + \sum_{n=t^{\frac{1}{\gamma}}+1}^{\infty} S(n)\left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s}\right) - \frac{S\left(\left[t^{\frac{1}{\gamma}}\right]\right)}{\left(\left[t^{\frac{1}{\gamma}}\right]+1\right)^s}$$

$$= \sum_{n=1}^{t^{\frac{1}{\gamma}}} \frac{f(n)}{n^s} + s\sum_{n=t^{\frac{1}{\gamma}}+1}^{\infty} S(n)\int_n^{n+1} \frac{du}{u^{s+1}} - \frac{S\left(\left[t^{\frac{1}{\gamma}}\right]\right)}{\left(\left[t^{\frac{1}{\gamma}}\right]+1\right)^s},$$

$$\varphi(s) < \sum_{n=1}^{t^{\frac{1}{\gamma}}} \frac{|f(n)|}{n^{1-\frac{1}{\log t}}} + (2+t)\sum_{n=t^{\frac{1}{\gamma}}+1}^{\infty} An^{1-\gamma}\int_n^{n+1} \frac{du}{u^{2-\frac{1}{\log t}}} + \frac{A\left(\left[t^{\frac{1}{\gamma}}\right]\right)^{1-\gamma}}{\left(\left[t^{\frac{1}{\gamma}}\right]+1\right)^{1-\frac{1}{\log t}}}$$

$$< \sum_{n=1}^{t^{\frac{1}{\gamma}}} \frac{|f(n)|}{n} n^{\frac{1}{\log t}} + (2+t)A\sum_{n=t^{\frac{1}{\gamma}}+1}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{u^{1-\gamma}\,du}{u^{2-\frac{1}{\log t}}} + \frac{At^{\frac{1}{\gamma}(1-\gamma)}}{t^{\frac{1}{\gamma}\left(1-\frac{1}{\log t}\right)}}$$

$$\leqq t^{\frac{1}{\gamma}\frac{1}{\log t}} \sum_{n=1}^{t^{\frac{1}{\gamma}}} \frac{|f(n)|}{n} + (2+t)A\int_{\left[t^{\frac{1}{\gamma}}\right]+1}^{\infty} \frac{du}{u^{1+\gamma-\frac{1}{\log t}}} + \frac{At^{\frac{1}{\gamma}\cdot\frac{1}{\log t}}}{t},$$

*) $[y]$ bezeichnet für reelle y die größte ganze Zahl $\leqq y$.

also wegen

$$t^{\frac{1}{\gamma}\frac{1}{\log t}} = e^{\frac{1}{\gamma}}, \quad 2 + t < 2t$$

$$(15) \qquad |\varphi(s)| < e^{\frac{1}{\gamma}} \sum_{n=1}^{t^{\frac{1}{\gamma}}} \frac{|f(n)|}{n} + 2tA \int_{t^{\frac{1}{\gamma}}}^{\infty} \frac{du}{u^{1+\gamma-\frac{1}{\log t}}} + \frac{Ae^{\frac{1}{\gamma}}}{t}.$$

Nach der Voraussetzung (7) ist für alle ganzzahligen $x \geqq 2$

$$\sum_{n=1}^{x} \frac{|f(n)|}{n} < B \log x,$$

wo B eine Konstante bezeichnet, also

$$(16) \qquad \sum_{n=1}^{t^{\frac{1}{\gamma}}} \frac{|f(n)|}{n} < B \log \left[t^{\frac{1}{\gamma}}\right] \leqq \frac{B}{\gamma} \log t;$$

ferner ist

$$(17) \qquad \int_{t^{\frac{1}{\gamma}}}^{\infty} \frac{du}{u^{1+\gamma-\frac{1}{\log t}}} = \frac{1}{\gamma - \frac{1}{\log t}} \cdot \frac{1}{t^{\frac{1}{\gamma}\left(\gamma-\frac{1}{\log t}\right)}} \leqq \frac{1}{\gamma - \frac{\gamma}{2}} \cdot \frac{e^{\frac{1}{\gamma}}}{t} = \frac{2}{\gamma} e^{\frac{1}{\gamma}} \frac{1}{t}$$

aus (15), (16) und (17) ergibt sich

$$|\varphi(s) < e^{\frac{1}{\gamma}} \frac{B}{\gamma} \log t + 2tA \frac{2}{\gamma} e^{\frac{1}{\gamma}} \frac{1}{t} + \frac{Ae^{\frac{1}{\gamma}}}{t},$$

also wegen

$$1 < \log t, \quad \frac{1}{t} < \log t$$

$$|\varphi(s)| < e^{\frac{1}{\gamma}} \frac{B}{\gamma} \log t + e^{\frac{1}{\gamma}} \frac{4A}{\gamma} \log t + e^{\frac{1}{\gamma}} A \log t = c_1 \log t,$$

womit der Satz I bewiesen ist.

Satz II. *Die für* $\Re(s) > 1$ *durch die Reihe*

$$(18) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

definierte Funktion $\zeta(s)$ *hat im Punkte* $s = 1$ *einen Pol erster Ordnung mit* ***dem Residuum*** **1,** ***ist im übrigen für*** $\Re(s) > 0$ *regulär und genügt für*

(19) $$t \geqq 3, \quad 1 - \frac{1}{\log t} \leqq \sigma \leqq 2$$

der Ungleichung

(20) $$|\zeta(s)| < c_2 \log t,$$

wo c_2 eine Konstante bezeichnet.

Beweis. Wenn $\varepsilon > 0$ ist, ist die Reihe (18) für $\Re(s) \geqq 1 + \varepsilon$ wegen

$$\left|\frac{1}{n^s}\right| \leqq \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$$

gleichmäßig konvergent; (18) definiert also für $\Re(s) > 1$ eine reguläre Funktion $\zeta(s)$. Ferner ist für $\Re(s) > 1$

$$\zeta(s) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^s}$$

$$= 1 + \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s-1} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(n+1)^{s-1}} - \frac{1}{n^{s-1}} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^s}$$

(21) $$= 1 + \frac{1}{s-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{s-1} \left(\frac{1}{(n+1)^{s-1}} - \frac{1}{n^{s-1}} \right) + \frac{1}{(n+1)^s} \right\},$$

also wegen

(22) $$\frac{1}{s-1} \left(\frac{1}{(n+1)^{s-1}} - \frac{1}{n^{s-1}} \right) + \frac{1}{(n+1)^s} = -s \int_0^1 \frac{u\,du}{(n+u)^{s+1}}$$

(23) $$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{s-1} - s \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{u\,du}{(n+u)^{s+1}}.$$

Die in (23) auftretende unendliche Reihe ist wegen

$$\left| \int_0^1 \frac{u\,du}{(n+u)^{s+1}} \right| \leqq \int_0^1 \frac{du}{n^{1+\sigma}} = \frac{1}{n^{1+\sigma}}$$

für $\Re(s) \geqq \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ gleichmäßig konvergent und stellt daher für $\Re(s) > 0$ eine reguläre Funktion dar; folglich ist

$$\zeta(s) - \frac{1}{s-1}$$

für $\Re(s) > 0$ regulär.*)

*) Der vorangehende Beweis der bekannten Eigenschaft von $\zeta(s)$ rührt von Herrn de la Vallée Poussin her und steht zuerst in seiner „Démonstration simplifiée du théorème de Dirichlet sur la progression arithmétique", Mémoires couronnés et autres mémoires publiés par l'Académie Royale de Belgique, Bd. 53, 1896, S. 6—8.

Es sei nun s ein Wert, der die Ungleichungen (19) erfüllt. Nach (21) und (22) ist

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{s-1} + \sum_{n=1}^{t} \left\{ \frac{1}{s-1} \left(\frac{1}{(n+1)^{s-1}} - \frac{1}{n^{s-1}} \right) + \frac{1}{(n+1)^s} \right\} - s \sum_{n=t+1}^{\infty} \int_0^1 \frac{u\,du}{(n+u)^{s+1}}$$

$$= \frac{1}{s-1} \frac{1}{([t]+1)^{s-1}} + \sum_{n=1}^{t+1} \frac{1}{n^s} - s \sum_{n=t+1}^{\infty} \int_0^1 \frac{u\,du}{(n+u)^{s+1}},$$

$$|\zeta(s)| < \frac{1}{t-1} \frac{1}{([t]+1)^{-\frac{1}{\log t}}} + \sum_{n=1}^{t+1} \frac{1}{n^{1-\frac{1}{\log t}}} + (2+t) \sum_{n=t+1}^{\infty} \int_0^1 \frac{du}{(n+u)^{2-\frac{1}{\log t}}}$$

$$< \frac{1}{t-1} (t+1)^{\frac{1}{\log t}} + (t+1)^{\frac{1}{\log t}} \sum_{n=1}^{t+1} \frac{1}{n} + 2t \sum_{n=t+1}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{du}{u^{2-\frac{1}{\log t}}}$$

$$< \frac{1}{\frac{t}{2}} (2t)^{\frac{1}{\log t}} + (2t)^{\frac{1}{\log t}} \left(1 + \int_1^t \frac{du}{u} + \frac{1}{t+1} \right) + 2t \int_{[t]+1}^{\infty} \frac{du}{u^{2-\frac{1}{\log t}}}$$

$$< \frac{2}{t} \cdot 2^{\frac{1}{\log t}} \cdot e + 2^{\frac{1}{\log t}} \cdot e(\log t + 2) + 2t \int_t^{\infty} \frac{du}{u^{2-\frac{1}{\log t}}}$$

$$< 1 \cdot 2 \cdot e + 2 \cdot e(\log t + 2) + 2t \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{\log t}} \cdot \frac{1}{t^{1-\frac{1}{\log t}}}$$

$$\leqq 2e + 2e \log t + 4e + 2 \frac{1}{1-\frac{1}{\log 3}} \cdot e$$

$$< c_2 \log t,$$

womit der Satz II bewiesen ist.

Es sei nun $\varkappa$ ein beliebiger algebraischer Zahlkörper, k sein Grad; $\zeta_\varkappa(s)$ sei die von Herrn Dedekind*) (für reelle s) eingeführte Funktion, welche durch die unendliche Reihe definiert ist:

$$\zeta_\varkappa(s) = \sum_{\mathfrak{n}} \frac{1}{N\mathfrak{n}^s}, \tag{24}$$

*) Vergl. z. B. die von ihm herausgegebenen Vorlesungen Dirichlets über Zahlentheorie, 3. Aufl., 1879, S. 578; 4. Aufl., 1894, S. 610.

wo $\mathfrak{n}$ alle Ideale des Körpers durchläuft.*) Herr Dedekind hat bewiesen, daß die Reihe in (24) für $s > 1$ konvergiert, und daß bei Annäherung von rechts der Grenzwert

$$\lim_{s=1}(s-1)\zeta_\varkappa(s)$$

existiert und gleich einer positiven Konstanten

$$gh$$

ist, wo h die Anzahl der Idealklassen des Körpers und g eine andere durch den Körper wohlbestimmte positive Konstante ist.

Aus der von Herrn Dedekind bewiesenen Konvergenz für $s > 1$ folgt für $\Re(s) > 1$ wegen

$$\left|\frac{1}{N\mathfrak{n}^s}\right| = \frac{1}{N\mathfrak{n}^\sigma}$$

die Konvergenz, für $\Re(s) \geqq 1 + \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ die gleichmäßige Konvergenz der Reihe in (24); dieselbe definiert also eine für $\Re(s) > 1$ reguläre analytische Funktion $\zeta_\varkappa(s)$, welche wegen

$$\lim_{s=1}(s-1)\zeta_\varkappa(s) = gh + 0$$

in $s = 1$ nicht regulär ist; falls sie dort einen Pol besitzt, ist derselbe von der ersten Ordnung.

Mehr folgt aus Herrn Dedekinds Entwickelungen nicht über den analytischen Charakter dieser Funktion. Für $\Re(s) > 1$ läßt sich die Gleichung (24) auch so schreiben:

$$\zeta_\varkappa(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(n)}{n^s}, \tag{25}$$

wo $F(n)$ die Anzahl der Ideale des Körpers bezeichnet, deren Norm gleich der ganzen rationalen Zahl n ist.

Herr Weber**) hat folgende Sätze 1., 2., 3. bewiesen, von denen 2. leicht aus 1. folgt, 3. unmittelbar aus 2.:

1. Die Anzahl $T(x)$ aller Ideale der Hauptklasse, welche durch ein

---

*) u^s bezeichnet für positive u die ganze transzendente Funktion $e^{s \log u}$ von s, wo $\log u$ der reelle Wert des Logarithmus ist.

**) „Über einen in der Zahlentheorie angewandten Satz der Integralrechnung", Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse, 1896, S. 275—281; vergl. ferner seine auf S. 148, Anm. 1 zitierte Arbeit, S. 89—94 und außerdem sein Lehrbuch der Algebra, Bd. 2, 2. Aufl., 1899, S. 672—678 und 712.

gegebenes Ideal $\mathfrak{a}$ teilbar sind und deren Norm $\leqq x$ ist, ist in der Gestalt darstellbar:

$$T(x) = \frac{g}{N\mathfrak{a}}\, x + O\left(x^{1-\frac{1}{k}}\right). \tag{26}$$

2. Die Anzahl $A(x)$ aller Ideale einer Klasse, deren Norm $\leqq x$ ist, hat die Form

$$A(x) = gx + O\left(x^{1-\frac{1}{k}}\right). \tag{27}$$

3. Die Anzahl $H(x)$ aller Ideale, deren Norm $\leqq x$ ist, ist

$$H(x) = ghx + O\left(x^{1-\frac{1}{k}}\right).^{*}) \tag{28}$$

Mit Hilfe dieser Weberschen Gleichung (28) und der Sätze I und II beweise ich nun den

Satz III. *Die Funktion $\zeta_x(s)$ ist über die Gerade $\Re(s) = 1$ fortsetzbar, hat im Punkte $s = 1$ einen Pol erster Ordnung mit dem Residuum gh, ist sonst regulär für $\Re(s) > 1 - \frac{1}{k}$ und genügt für*

$$t \geqq e^{3k}, \quad 1 - \frac{1}{\log t} \leqq \sigma \leqq 2 \tag{29}$$

der Ungleichung

$$|\zeta_x(s)| < c_3 \log t, \tag{30}$$

wo c_3 eine (nur vom Körper abhängige) Konstante bezeichnet.

Beweis. Ich betrachte die Funktion

$$\varphi(s) = \zeta_x(s) - gh\zeta(s);$$

sie ist nach (25) für $\Re(s) > 1$ durch die Dirichletsche Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} \tag{31}$$

definiert wo

$$f(n) = F(n) - gh$$

ist. Wegen

---

*) Schon Herr Dedekind hatte bewiesen, daß

$$\lim_{x=\infty} \frac{T(x)}{x} = \frac{g}{N\mathfrak{a}}, \quad \lim_{x=\infty} \frac{A(x)}{x} = g, \quad \lim_{x=\infty} \frac{H(x)}{x} = gh$$

ist.

$$S(x) = \sum_{n=1}^{x} f(n) = \sum_{n=1}^{x} (F(n) - gh) = H(x) - ghx$$

ist nach (28)

$$S(x) = O\left(x^{1-\frac{1}{k}}\right),$$

so daß die zweite Voraussetzung (8) des Satzes I erfüllt ist, falls

$$\gamma = \frac{1}{k}$$

gesetzt wird. Wegen

$$\sum_{n=1}^{x} \frac{|f(n)|}{n} \leqq \sum_{n=1}^{x} \frac{F(n) + gh}{n} = \sum_{n=1}^{x} \frac{F(n)}{n} + gh \sum_{n=1}^{x} \frac{1}{n}$$

$$= \sum_{n=1}^{x} \frac{H(n) - H(n-1)}{n} + O(\log x)$$

$$= \sum_{n=1}^{x} H(n) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{H(x)}{x+1} + O(\log x)$$

$$= O \sum_{n=1}^{x} n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + O(1) + O(\log x) = O \sum_{n=1}^{x} \frac{1}{n+1} + O(\log x)$$

$$= O(\log x)$$

ist auch die erste Voraussetzung (7) jenes Satzes erfüllt. Aus Satz I folgt also, daß die Reihe (31) für $\Re(s) > 1 - \frac{1}{k}$ konvergiert, daß $\varphi(s)$ für $\Re(s) > 1 - \frac{1}{k}$ regulär ist und für jedes den Bedingungen (29) genügende s die Ungleichung

$$|\varphi(s)| < c_1 \log t \tag{11}$$

erfüllt.

Nach Satz II ist

$$\zeta(s) - \frac{1}{s-1}$$

für $\Re(s) > 0$, also a fortiori für $\Re(s) > 1 - \frac{1}{k}$ regulär, und $\zeta(s)$ genügt für die s des Gebietes (19), also a fortiori für diejenigen des Gebietes (29) der Ungleichung

$$|\zeta(s)| < c_2 \log t. \tag{20}$$

Folglich ist

$$\zeta_x(s) = \varphi(s) + gh\zeta(s)$$

für $\Re(s) > 1 - \frac{1}{k}$ regulär bis auf den Pol erster Ordung $s = 1$ mit dem Residuum gh und genügt für die s des Gebietes (29) der Ungleichung

$$|\zeta_x(s)| < c_1 \log t + ghc_2 \log t = c_3 \log t,$$

womit (30), also der Satz III bewiesen ist.

§ 3.

Satz IV. *Es erfülle die zahlentheoretische Funktion $f(n)$ die Voraussetzungen des Satzes I, d. h. es sei für $x \geqq 2$*

$$\sum_{n=1}^{x} \frac{|f(n)|}{n} < B \log x$$

und

$$|S(x)| = \left| \sum_{n=1}^{x} f(n) \right| < A x^{1-\gamma},$$

wo $0 < \gamma \leqq 1$ ist. Es sei $\varphi(s)$ die für $\Re(s) > 1 - \gamma$ durch die Dirichletsche Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} \tag{9}$$

definierte Funktion. Dann ist für

$$t \geqq e^{\frac{2}{\gamma}}, \quad 1 - \frac{1}{\log t} \leqq \sigma \leqq 2 \tag{10}$$

$$|\varphi'(s)| < c_4 \log^2 t. \tag{32}$$

Beweis. Es werde die für alle m gültige Gleichung*)

$$\varphi(s) = \sum_{n=1}^{m} \frac{f(n)}{n^s} + s \sum_{n=m+1}^{\infty} S(n) \int_n^{n+1} \frac{du}{u^{s+1}} - \frac{S(m)}{(m+1)^s}$$

nach s differentiiert:

$$\varphi'(s) = -\sum_{n=1}^{m} \frac{f(n) \log n}{n^s} + \sum_{n=m+1}^{\infty} S(n) \int_n^{n+1} \frac{du}{u^{s+1}} - s \sum_{n=m+1}^{\infty} S(n) \int_n^{n+1} \frac{\log u \, du}{u^{s+1}} + \frac{S(m) \log (m+1)}{(m+1)^s}.$$

Wenn s dem Gebiete (10) angehört, setze ich $m = \left[t^{\gamma}\right]$ und erhalte:

*) s. S. 152.

$$|\varphi'(s)| < \sum_{n=1}^{t^{\frac{1}{\gamma}}} \frac{|f(n)| \log n}{n^{1-\frac{1}{\log t}}} + \sum_{n=t^{\frac{1}{\gamma}}+1}^{\infty} An^{1-\gamma} \int_n^{n+1} \frac{du}{u^{2-\frac{1}{\log t}}}$$

$$+ (2+t) \sum_{n=t^{\frac{1}{\gamma}}+1}^{\infty} An^{1-\gamma} \int_n^{n+1} \frac{\log u \, du}{u^{2-\frac{1}{\log t}}} + \frac{At^{\frac{1}{\gamma}(1-\gamma)} \log\left(t^{\frac{1}{\gamma}}+1\right)}{t^{\frac{1}{\gamma}\left(1-\frac{1}{\log t}\right)}}$$

$$< \log\left(t^{\frac{1}{\gamma}}\right) t^{\frac{1}{\gamma}\cdot\frac{1}{\log t}} \sum_{n-1}^{t^{\frac{1}{\gamma}}} \frac{|f(n)|}{n} + A \sum_{n=t^{\frac{1}{\gamma}}+1}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{u^{1-\gamma} du}{u^{2-\frac{1}{\log t}}}$$

$$+ 2tA \sum_{n=t^{\frac{1}{\gamma}}+1}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{u^{1-\gamma} \log u \, du}{u^{2-\frac{1}{\log t}}} + \frac{A}{t} t^{\frac{1}{\gamma}\cdot\frac{1}{\log t}} \log\left(t^{\frac{1}{\gamma}} + t^{\frac{1}{\gamma}}\right)$$

$$< \frac{1}{\gamma} \log t \cdot e^{\frac{1}{\gamma}} \cdot B \log\left(t^{\frac{1}{\gamma}}\right) + A \int_{t^{\frac{1}{\gamma}}}^{\infty} \frac{du}{u^{1+\gamma-\frac{1}{\log t}}} + 2tA \int_{t^{\frac{1}{\gamma}}}^{\infty} \frac{\log u \, du}{u^{1+\gamma-\frac{1}{\log t}}}$$

$$+ \frac{Ae^{\frac{1}{\gamma}}}{t} \left(\log 2 + \frac{1}{\gamma} \log t\right)$$

$$= \frac{1}{\gamma^2} e^{\frac{1}{\gamma}} B \log^2 t + \frac{A}{\gamma - \frac{1}{\log t}} \frac{1}{t^{\frac{1}{\gamma}\left(\gamma-\frac{1}{\log t}\right)}}$$

$$+ 2tA \left(\frac{1}{\gamma - \frac{1}{\log t}} \frac{\log\left(t^{\frac{1}{\gamma}}\right)}{t^{\frac{1}{\gamma}\left(\gamma-\frac{1}{\log t}\right)}} + \frac{1}{\left(\gamma - \frac{1}{\log t}\right)^2} \frac{1}{t^{\frac{1}{\gamma}\left(\gamma-\frac{1}{\log t}\right)}} \right)$$

$$+ \frac{Ae^{\frac{1}{\gamma}}}{t} \left(\log 2 + \frac{1}{\gamma} \log t\right)$$

$$\leqq \frac{1}{\gamma^2} e^{\frac{1}{\gamma}} B \log^2 t + \frac{A}{\gamma - \frac{\gamma}{2}} \frac{e^{\frac{1}{\gamma}}}{t} + 2tA \left(\frac{1}{\gamma - \frac{\gamma}{2}} \frac{\frac{1}{\gamma} e^{\frac{1}{\gamma}} \log t}{t} + \frac{1}{\left(\gamma - \frac{\gamma}{2}\right)^2} \frac{e^{\frac{1}{\gamma}}}{t} \right)$$

$$+ \frac{Ae^{\frac{1}{\gamma}} \log 2}{t} + \frac{Ae^{\frac{1}{\gamma}}}{t} \frac{1}{\gamma} \log t$$

$$= c_5 \log^2 t + \frac{c_6}{t} + c_7 \log t + c_8 + \frac{c_9}{t} + c_{10} \frac{\log t}{t},$$

$$|\varphi'(s)| < c_4 \log^2 t, \tag{32}$$

womit der Satz IV bewiesen ist.

Satz V. *Es ist für*

$$t \geqq 3, \quad 1 - \frac{1}{\log t} \leqq \sigma \leqq 2 \tag{19}$$

$$|\zeta'(s)| < c_{11} \log^2 t. \tag{33}$$

Beweis. Es ist für $\Re(s) > 0$ (exkl. $s = 1$) und jedes ganzzahlige $m \geqq 1$ nach S. 154—155

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} \frac{1}{(m+1)^{s-1}} + \sum_{n=1}^{m+1} \frac{1}{n^s} - s \sum_{n=m+1}^{\infty} \int_0^1 \frac{u\,du}{(n+u)^{s+1}},$$

also

$$\zeta'(s) = -\frac{1}{(s-1)^2} \frac{1}{(m+1)^{s-1}} - \frac{1}{s-1} \frac{\log(m+1)}{(m+1)^{s-1}} - \sum_{n=1}^{m+1} \frac{\log n}{n^s}$$
$$- \sum_{n=m+1}^{\infty} \int_0^1 \frac{u\,du}{(n+u)^{s+1}} + s \sum_{n=m+1}^{\infty} \int_0^1 \frac{u \log(n+u)}{(n+u)^{s+1}}\,du.$$

Wenn nun s im Gebiet (19) liegt und $m = [t]$ gesetzt wird, so ergibt sich

$$|\zeta'(s)| < \frac{1}{(t-1)^2} \frac{1}{([t]+1)^{-\frac{1}{\log t}}} + \frac{1}{t-1} \frac{\log([t]+1)}{([t]+1)^{-\frac{1}{\log t}}} + \sum_{n=1}^{t+1} \frac{\log n}{n^{1-\frac{1}{\log t}}}$$
$$+ \sum_{n=t+1}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{du}{u^{2-\frac{1}{\log t}}} + (2+t) \sum_{n=t+1}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{\log u\,du}{u^{2-\frac{1}{\log t}}}$$
$$< c_{12} \frac{1}{t^2} + c_{13} \frac{\log t}{t} + (t+1)^{\frac{1}{\log t}} \sum_{n=1}^{t+1} \frac{\log n}{n} + \int_t^{\infty} \frac{du}{u^{2-\frac{1}{\log t}}}$$
$$+ 2t \int_t^{\infty} \frac{\log u\,du}{u^{2-\frac{1}{\log t}}}$$
$$< c_{12} + c_{13} + (2t)^{\frac{1}{\log t}} \sum_{n=1}^{t+1} \frac{\log n}{n} + \frac{1}{1-\frac{1}{\log t}} \frac{1}{t^{1-\frac{1}{\log t}}}$$
$$+ 2t \left(\frac{1}{1-\frac{1}{\log t}} \frac{\log t}{t^{1-\frac{1}{\log t}}} + \frac{1}{\left(1-\frac{1}{\log t}\right)^2} \frac{1}{t^{1-\frac{1}{\log t}}} \right)$$

$$< c_{12} + c_{13} + c_{14}\log^2 t + \frac{1}{1-\frac{1}{\log 3}}\,\frac{e}{t} + 2t\left(\frac{1}{1-\frac{1}{\log 3}}\,\frac{e\log t}{t} + \frac{1}{\left(1-\frac{1}{\log 3}\right)^2}\,\frac{e}{t}\right)$$

$$= c_{12} + c_{13} + c_{14}\log^2 t + \frac{c_{15}}{t} + c_{16}\log t + c_{17}$$

$$< c_{11}\log^2 t,$$

was im Satz V behauptet wurde.

Satz VI. *Es ist für*

$$t \geqq e^{2k}, \quad 1 - \frac{1}{\log t} \leqq \sigma \leqq 2 \tag{29}$$

$$|\zeta_x'(s)| < c_{18}\log^2 t. \tag{34}$$

Beweis. Wird

$$\varphi(s) = \zeta_x(s) - gh\,\zeta(s)$$

gesetzt, so erfüllt $\varphi(s)$ nach S. 157—158 die Voraussetzungen des Satzes I. Nach Satz IV ist also für das Gebiet (29)

$$|\varphi'(s)| < c_4\log^2 t;$$

nach Satz V ist dort

$$|\zeta'(s)| < c_{11}\log^2 t, \tag{33}$$

also

$$|\zeta_x'(s)| \leqq |\varphi'(s)| + gh\,|\zeta'(s)| < c_4\log^2 t + ghc_{11}\log^2 t = c_{18}\log^2 t,$$

womit (34) bewiesen ist.

§ 4.

Es seien

$$\chi_1(\mathfrak{n}),\ \chi_2(\mathfrak{n}),\ \cdots,\ \chi_h(\mathfrak{n})$$

die h Charaktere der (Abelschen) Gruppe der Idealklassen des gegebenen Körpers. Jede dieser h „idealtheoretischen" Funktionen ist für jedes Ideal des Körpers definiert und genügt den drei Bedingungen:

$$\chi(\mathfrak{a}) = \chi(\mathfrak{b}), \tag{35}$$

falls $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ derselben Idealklasse angehören;

$$\chi(\mathfrak{a}) \neq 0 \tag{36}$$

für alle Ideale;

$$\chi(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = \chi(\mathfrak{a})\chi(\mathfrak{b}) \tag{37}$$

für zwei beliebige Ideale.

Bekanntlich gibt es h verschiedene (d. h. nicht für alle Ideale übereinstimmende) Funktionen, die den Bedingungen (35), (36), (37) genügen, und zwar ist $\chi(\mathfrak{n})$ stets eine Einheitswurzel, also speziell

$$\chi(\mathfrak{n}) = 1. \tag{38}$$

Die Bezeichnung der h Charaktere sei so gewählt, daß $\chi_1(\mathfrak{n})$ der Hauptcharakter ist, d. h. diejenige Funktion, welche für alle $\mathfrak{n}$ gleich 1 ist. Für die Ideale der Hauptklasse ist jeder Charakter $= 1$. Es gelten bekanntlich folgende Sätze:

„Wenn $\mathfrak{n}$ alle h Ideale eines vollständigen Repräsentantensystems der Klassen durchläuft, so ist

$$\sum \chi_1(\mathfrak{n}) = h,$$

dagegen für $\nu = 2, 3, \cdots, h$

$$\sum \chi_\nu(\mathfrak{n}) = 0.\text{“} \tag{39}$$

„Wenn $\mathfrak{n}$ ein beliebiges Ideal ist, so ist

$$\sum_{\nu=1}^{h} \chi_\nu(\mathfrak{n}) = h, \tag{40}$$

falls $\mathfrak{n}$ der Hauptklasse angehört, dagegen

$$\sum_{\nu=1}^{h} \chi_\nu(\mathfrak{n}) = 0, \tag{41}$$

falls $\mathfrak{n}$ irgend einer anderen Klasse angehört.“

Aus (37) folgt für jeden Charakter und $s > 1$ die fundamentale Dedekindsche*) Identität

$$\sum_{\mathfrak{n}} \frac{\chi(\mathfrak{n})}{N\mathfrak{n}^s} = \prod_{\mathfrak{p}} \frac{1}{1 - \frac{\chi(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^s}}, \tag{42}$$

wo $\mathfrak{n}$ alle Ideale, $\mathfrak{p}$ alle Primideale des Körpers durchläuft (wegen der absoluten Konvergenz in beliebiger Reihenfolge). Offenbar gilt (42) für $\Re(s) > 1$. (42) lehrt, daß keine der h für $\Re(s) > 1$ durch die Dirichletschen Reihen

$$L_\nu(s) = \sum_{\mathfrak{n}} \frac{\chi_\nu(\mathfrak{n})}{N\mathfrak{n}^s} \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, h)$$

definierten analytischen Funktionen in dieser Halbebene eine Nullstelle besitzt.

Offenbar ist

$$L_1(s) = \sum_{\mathfrak{n}} \frac{1}{N\mathfrak{n}^s} = \zeta_\kappa(s). \tag{43}$$

*) l. c., S. 581 bezw. 612.

Satz VII. *Wenn $\chi(\mathfrak{n})$ ein vom Hauptcharakter verschiedener Charakter ist, so konvergiert die Reihe*

$$\sum_{\mathfrak{n}} \frac{\chi(\mathfrak{n})}{N\mathfrak{n}^s}$$

für $\Re(s) > 1 - \frac{1}{k}$ und stellt dort eine reguläre Funktion von s dar, falls die Ideale nach wachsenden Normen geordnet sind. Hierbei ist die Reihenfolge der Ideale gleicher Norm unerheblich.

Beweis. Es ist, wenn die Ideale auf die (durch $\mathfrak{n}_1, \cdots, \mathfrak{n}_h$ repräsentierten) h Klassen verteilt werden, nach (35)

$$\sum_{N\mathfrak{n} \leq x} \chi(\mathfrak{n}) = \chi(\mathfrak{n}_1) A_1(x) + \cdots + \chi(\mathfrak{n}_h) A_h(x), \tag{44}$$

wo $A_1(x), \cdots, A_h(x)$ für die einzelnen Klassen die Anzahlen der Ideale bezeichnen, deren Norm $\leqq x$ ist. Nun ist nach (27) für jedes $\nu = 1, 2, \cdots, h$

$$A_\nu(x) = gx + O\left(x^{1-\frac{1}{k}}\right),$$

wo die Konstante g von ν unabhängig ist, also nach (44) und (39)

$$\sum_{N\mathfrak{n} \leq x} \chi(\mathfrak{n}) = \sum_{\nu=1}^{h} \chi(\mathfrak{n}_\nu)\left(gx + O\left(x^{1-\frac{1}{k}}\right)\right) = gx \sum_{\nu=1}^{h} \chi(\mathfrak{n}_\nu) + O\left(x^{1-\frac{1}{k}}\right)$$

$$= O\left(x^{1-\frac{1}{k}}\right); \tag{45}$$

ferner ist nach S. 158 und Gleichung (38)

$$\sum_{N\mathfrak{n} \leq x} \frac{|\chi(\mathfrak{n})|}{N\mathfrak{n}} = \sum_{N\mathfrak{n} \leq x} \frac{1}{N\mathfrak{n}} = \sum_{n=1}^{x} \frac{F(n)}{n} = O(\log x). \tag{46}$$

Wird also für jedes ganzzahlige positive n

$$f(n) = \sum_{\mathfrak{n}} \chi(\mathfrak{n})$$

gesetzt, wo $\mathfrak{n}$ alle Ideale mit der Norm n durchläuft, so ist nach (46)

$$\sum_{n=1}^{x} \frac{|f(n)|}{n} \leqq \sum_{N\mathfrak{n} \leq x} \frac{|\chi(\mathfrak{n})|}{N\mathfrak{n}} = O(\log x)$$

und nach (45)

$$\sum_{n=1}^{x} f(n) = O\left(x^{1-\frac{1}{k}}\right),$$

so daß,

$$\gamma = \frac{1}{k}$$

gesetzt, die Voraussetzungen der Sätze I und IV erfüllt sind.

Es ergibt sich also zunächst, daß

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$$

für $\Re(s) > 1 - \frac{1}{k}$ konvergiert, d. h. daß für diese s

$$\lim_{x=\infty} \sum_{N\mathfrak{n} \leq x} \frac{\chi(\mathfrak{n})}{N\mathfrak{n}^s}$$

existiert.

Hieraus folgt leicht, daß bei Anordnung der Ideale nach wachsender Norm die Reihe

$$\sum_{\mathfrak{n}} \frac{\chi(\mathfrak{n})}{N\mathfrak{n}^s}$$

für $\Re(s) > 1 - \frac{1}{k}$ gegen einen von der Reihenfolge der Ideale mit gleicher Norm unabhängigen Grenzwert konvergiert. Denn die Summe der absoluten Beträge aller Glieder mit der Norm x (deren Anzahl nach (28)

$$-H(x)-H(x-1)=gh\,x+O\left(x^{1-\frac{1}{k}}\right)-gh(x-1)+O\left(x^{1-\frac{1}{k}}\right)=gh+O\left(x^{1-\frac{1}{k}}\right)$$

$$=O\left(x^{1-\frac{1}{k}}\right)$$

ist) ist

$$\leqq \sum_{N\mathfrak{n}=x} \frac{1}{N\mathfrak{n}^\sigma} = \sum_{N\mathfrak{n}=x} \frac{1}{x^\sigma} = O\left(\frac{x^{1-\frac{1}{k}}}{x^\sigma}\right) = O\left(\frac{1}{x^{\sigma-1+\frac{1}{k}}}\right),$$

hat also für $x = \infty$ den Grenzwert 0.

$L_2(s), \cdots, L_h(s)$ sind also, da die Voraussetzungen des Satzes I erfüllt sind, für $\Re(s) > 1 - \frac{1}{k}$ regulär und durch die Reihen

$$\sum_{\mathfrak{n}} \frac{\chi_\nu(\mathfrak{n})}{N\mathfrak{n}^s} \qquad (\nu = 2, \cdots, h)$$

darstellbar, womit Satz VII bewiesen ist.

Zugleich ergeben sich aus Satz I für

$$t \geqq e^{2k}, \quad 1 - \frac{1}{\log t} \leqq \sigma \leqq 2 \tag{29}$$

die Ungleichungen

$$\begin{aligned} |L_2(s)| &< c_{19} \log t, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ |L_h(s)| &< c_{19} \log t. \end{aligned} \tag{47}$$

Die Konstante c_{19} kann ja für diese $h-1$ Ungleichungen gleichmäßig gewählt werden.

Wegen (43) ist nach Satz III für das Gebiet (29)

$$L_1(s) = \zeta_K(s) < c_3 \log t. \tag{48}$$

Ebenso folgt, da Satz IV auf $L_2(s), \cdots, L_h(s)$ anwendbar ist, für (29)

$$\begin{aligned} L_2'(s) &< c_{20} \log^2 t, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ L_h'(s) &< c_{20} \log^2 t \end{aligned} \tag{49}$$

und nach Satz VI

$$L_1'(s) = \zeta_K'(s) < c_{18} \log^2 t. \tag{50}$$

Wird die größte der vier Zahlen c_3, c_{18}, c_{19}, c_{20} gleich c_{21} gesetzt, so ergibt die Zusammenfassung von (47), (48), (49) und (50) den

Satz VIII. *Es gibt eine Konstante c_{21}*), so daß für*

$$t \geqq e^{2k}, \quad 1 - \frac{1}{\log t} \leqq \sigma \leqq 2 \tag{29}$$

und alle $\nu = 1, 2, \cdots, h$ die Ungleichungen

$$L_\nu(s) < c_{21} \log t, \tag{51}$$

$$L_\nu'(s) < c_{21} \log^2 t \tag{52}$$

bestehen.

§ 5.

Es bezeichne nun $L(s)$ die analytische Funktion, welche durch die Gleichung

$$L(s) = \prod_{\nu=1}^{h} L_\nu(s) = L_1(s)\, L_2(s) \cdots L_h(s)$$

definiert ist.

Da nach den Sätzen III und VII

$$(s-1)L_1(s),\ L_2(s), \cdots, L_h(s)$$

für $\Re(s) > 1 - \frac{1}{k}$ regulär sind, ist $(s-1)L(s)$ für $\Re(s) > 1 - \frac{1}{k}$ regulär. Ferner ist für $\Re(s) > 1$ wegen (42)

$$\begin{aligned} L_\nu(s) &= \prod_{\mathfrak{p}} \frac{1}{1 - \frac{\chi_\nu(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^s}} = e^{-\sum_{\mathfrak{p}} \log\left(1 - \frac{\chi_\nu(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^s}\right)} \\ &= e^{\sum_{\mathfrak{p}} \frac{\chi_\nu(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^s} + \frac{1}{2}\sum_{\mathfrak{p}} \frac{\chi_\nu(\mathfrak{p}^2)}{N\mathfrak{p}^{2s}} + \cdots + \frac{1}{m}\sum_{\mathfrak{p}} \frac{\chi_\nu(\mathfrak{p}^m)}{N\mathfrak{p}^{ms}} + \cdots} \\ &= e^{\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sum_{\mathfrak{p}} \frac{\chi_\nu(\mathfrak{p}^m)}{N\mathfrak{p}^{ms}}}, \end{aligned}$$

also

*) die also nur von dem gegebenen Körper abhängt.

$$L(s) = e^{\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sum_{\mathfrak{p}} \frac{1}{N\mathfrak{p}^{ms}} \sum_{\nu=1}^{h} \chi_\nu(\mathfrak{p}^m)} . \tag{53}$$

Nach (40) und (41) ist

$$\sum_{\nu=1}^{h} \chi_\nu(\mathfrak{p}^m)$$

dann und nur dann von Null verschieden, und zwar $= h$, wenn $\mathfrak{p}^m$ der Hauptklasse angehört. Ich will durch die Bezeichnung $\mathfrak{a} \sim \mathfrak{b}$ in der Folge andeuten, daß die Ideale $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ äquivalent sind, also die Ideale der Hauptklasse einfach durch $\mathfrak{a} \sim \mathfrak{o}$ bezeichnen, wo $\mathfrak{o}$ das Einheitsideal ist. Aus (53) folgt alsdann für $\Re(s) > 1$

$$L(s) = e^{h \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sum_{\mathfrak{p}^m \sim \mathfrak{o}} \frac{1}{N\mathfrak{p}^{ms}}} . \tag{54}$$

Nach der am Anfang des § 1 über den Körper gemachten Voraussetzung divergiert

$$\sum_{\mathfrak{p} \sim \mathfrak{o}} \frac{1}{N\mathfrak{p}};$$

folglich wächst bei Abnahme der reellen Größe s zu 1 die Summe

$$\sum_{\mathfrak{p} \sim \mathfrak{o}} \frac{1}{N\mathfrak{p}^s}$$

über alle Grenzen. Dies gilt a fortiori von dem Exponenten der rechten Seite von (54). Also existiert

$$\lim_{s=1} L(s)$$

nicht; folglich ist $s = 1$ keine reguläre Stelle von $L(s)$. Da $(s-1)L(s)$ für $s = 1$ regulär ist, hat $L(s)$ in $s = 1$ einen Pol erster Ordnung. Da

$$L(s) = L_1(s)\, L_2(s) \cdots L_h(s)$$

ist und $L_1(s)$ auch einen Pol erster Ordnung in $s = 1$ hat, sind die Funktionen $L_2(s), \cdots, L_h(s)$ für $s = 1$ von Null verschieden, d. h. es bestehen die Ungleichungen

$$\sum_{\mathfrak{n}} \frac{\chi_\nu(\mathfrak{n})}{N\mathfrak{n}} \neq 0 \qquad (\nu = 2, 3, \cdots, h). \tag{55}$$

§ 6.

Aus (54) folgt weiter für $\varepsilon > 0$, $t \gtrless 0$

$$|L(1+\varepsilon+ti)| = e^{\Re\left(h \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sum_{\mathfrak{p}^m \sim \mathfrak{o}} \frac{1}{N\mathfrak{p}^{m(1+\varepsilon+ti)}}\right)}$$

$$= e^{h \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sum_{\mathfrak{p}^m \sim \mathfrak{o}} \frac{\cos(mt \log N\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^{m(1+\varepsilon)}}} \tag{56}$$

und

$$L(1+\varepsilon) = e^{h\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\sum_{\mathfrak{p}^m\sim\mathfrak{o}}\frac{1}{N\mathfrak{p}^{m(1+\varepsilon)}}}, \tag{57}$$

also

$$L(1+\varepsilon+ti)\ L(1+\varepsilon) = e^{h\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\sum_{\mathfrak{p}^m\sim\mathfrak{o}}\frac{1+\cos(mt\log N\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^{m(1+\varepsilon)}}}.$$

Nun ist für jedes reelle α

$$4(1+\cos\alpha) \geqq 2(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha) = 2-2\cos^2\alpha = 1-\cos 2\alpha,$$

also

$$|L(1+\varepsilon+ti)|\,L(1+\varepsilon) \geqq e^{\frac{h}{4}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\sum_{\mathfrak{p}^m\sim\mathfrak{o}}\frac{1-\cos(2mt\log N\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^{m(1+\varepsilon)}}}$$

$$= e^{\frac{h}{4}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\sum_{\mathfrak{p}^m\sim\mathfrak{o}}\frac{1}{N\mathfrak{p}^{m(1+\varepsilon)}}} \cdot e^{-\frac{h}{4}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\sum_{\mathfrak{p}^m\sim\mathfrak{o}}\frac{\cos(2mt\log N\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^{m(1+\varepsilon)}}};$$

aus (56) (wenn statt t darin $2t$ geschrieben wird) und (57) ergibt sich also

$$|L(1+\varepsilon+ti)\ \ L(1+\varepsilon) \geqq (L(1+\varepsilon))^{\frac{1}{4}}\,|L(1+\varepsilon+2ti)|^{-\frac{1}{4}},$$

$$|L(1+\varepsilon+ti)\ \geqq \frac{1}{(L(1+\varepsilon))^{\frac{3}{4}}\,|L(1+\varepsilon+2ti)|^{\frac{1}{4}}}.$$

Da $s=1$ ein Pol erster Ordnung von $L(s)$ ist, ist für $0<\varepsilon\leqq 1$

$$L(1+\varepsilon) < \frac{c_{22}}{\varepsilon},$$

also für $0<\varepsilon\leqq 1$, $t\gtrless 0$

$$|L(1+\varepsilon+ti)| > \frac{\varepsilon^{\frac{3}{4}}}{c_{23}\ L(1+\varepsilon+2ti)^{\frac{1}{4}}}. \tag{58}$$

Satz IX. *Jede der Funktionen $L_1(s)$, $L_2(s)$, $\cdots$, $L_h(s)$ ist in allen Punkten der Geraden $\Re(s)=1$ von Null verschieden.*

Beweis. Der Punkt $s=1$ ist für $L_1(s)$ ein Pol, für $L_2(s),\cdots,L_h(s)$ keine Nullstelle, wie auf S. 167 konstatiert wurde. Es sei $s=1+ti\,(t\gtrless 0)$ Nullstelle einer jener Funktionen. Dann wäre bei positivem zu Null abnehmendem ε der Grenzwert

$$\lim_{\varepsilon=0}\frac{L(1+\varepsilon+ti)}{\varepsilon} = L'(1+ti)$$

vorhanden. Dies steht im Widerspruch damit, daß nach (58)

$$\left|\frac{L(1+\varepsilon+ti)}{\varepsilon}\right| > \frac{1}{c_{23}\varepsilon^{\frac{1}{4}}\ L(1+\varepsilon+2ti)^{\frac{1}{4}}} \tag{59}$$

ist; denn der Nenner der rechten Seite in (59) konvergiert gegen Null, mag $L(1+2ti)$ verschwinden oder nicht; die linke Seite wächst also über alle Grenzen. Damit ist Satz IX bewiesen.

Aus Satz VIII folgt durch Multiplikation der h Ungleichungen (51) für

$$t \geqq e^{2k}, \quad 1 - \frac{1}{\log t} \leqq \sigma \leqq 2 \tag{29}$$

$$|L(s)| = |L(\sigma+ti)| < c_{21}^h \log^h t < \log^{c_{24}} t,$$

also für

$$t \geqq \tfrac{1}{2} e^{2k}, \quad -\frac{1}{\log(2t)} \leqq \varepsilon \leqq 1,$$

$$|L(1+\varepsilon+2ti)| < \log^{c_{24}}(2t) < \log^{c_{25}} t$$

und speziell für

$$t \geqq e^{2k}, \quad 0 < \varepsilon \leqq 1 \tag{60}$$

$$|L(1+\varepsilon+2ti)| < \log^{c_{25}} t. \tag{61}$$

Für (60) ist also nach (58) und (61)

$$|L(1+\varepsilon+ti)| > \frac{\varepsilon^{\frac{3}{4}}}{c_{23} \log^4 t}{}^{c_{25}} > \frac{\varepsilon^{\frac{3}{4}}}{\log^{c_{26}} t}. \tag{62}$$

Ferner ergibt sich aus (51) und (52) für das Gebiet (29)

$$|L'(s)| = |L_1'(s)L_2(s)\cdots L_h(s) + \cdots + L_1(s)L_2(s)\cdots L_h'(s)|$$
$$< h c_{21}^h \log^{h+1} t < \log^{c_{27}} t,$$

also für

$$t \geqq e^{2k}, \quad -\frac{1}{\log t} \leqq \varepsilon \leqq 1 \tag{63}$$

$$|L(1+\varepsilon+ti) - L(1+ti)| = \left|\int_1^{1+\varepsilon} L'(\sigma+ti)\,d\sigma\right| \leqq |\varepsilon| \log^{c_{27}} t. \tag{64}$$

Satz X. *Für*

$$t \geqq e^{2k}$$

ist

$$|L(1+ti)| > \frac{1}{\log^{c_{28}} t}. \tag{65}$$

Beweis. Aus (62) und (64) folgt für das in (63) enthaltene Gebiet

$$t \geqq e^{2k}, \quad 0 < \varepsilon \leqq 1, \tag{60}$$

$$|L(1+ti)| = |L(1+\varepsilon+ti) - (L(1+\varepsilon+ti) - L(1+ti))|$$
$$\geqq |L(1+\varepsilon+ti)| - |L(1+\varepsilon+ti) - L(1+ti)| > \frac{\varepsilon^{\frac{3}{4}}}{\log^{c_{26}} t} - \varepsilon \log^{c_{27}} t$$
$$= \frac{\varepsilon^{\frac{3}{4}}}{\log^{c_{26}} t}\left(1 - \varepsilon^{\frac{1}{4}} \log^{c_{26}+c_{27}} t\right).$$

Wird hierin

$$\varepsilon = 2^{-4} \log^{-4c_{26}-4c_{27}} t$$

gesetzt (was für $t \geqq e^{2k}$ zwischen 0 und 1 liegt), so ergibt sich

$$|L(1+ti)| > \frac{2^{-3} \log^{-3c_{26}-3c_{27}} t}{\log^{c_{26}} t} \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16 \log^{4c_{26}+3c_{27}} t} > \frac{1}{\log^{c_{28}} t},$$

womit der Satz X bewiesen ist.

Satz XI. *Es gibt eine Konstante c_{29}, so daß für*

$$t \geqq e^{2k}, \quad 1 - \frac{1}{\log^{c_{29}} t} \leqq \sigma \leqq 2 \tag{66}$$

$L(s)$ von Null verschieden ist und der Ungleichung

$$|L(s)| > \frac{1}{\log^{c_{29}} t}$$

genügt.

Beweis. Einerseits ist für

$$t \geqq e^{2k}, \quad 1 - \frac{1}{\log^{1+c_{27}+c_{28}} t} \leqq \sigma \leqq 1 + \frac{1}{\log^{1+c_{27}+c_{28}} t}$$

nach (64) und (65)

$$\begin{aligned} |L(\sigma+ti)| &\geqq |L(1+ti)| - |L(\sigma+ti) - L(1+ti)| \\ &> \frac{1}{\log^{c_{28}} t} - |\sigma - 1| \log^{c_{27}} t \geqq \frac{1}{\log^{c_{28}} t} - \frac{1}{\log^{1+c_{28}} t} = \frac{\log t - 1}{\log^{1+c_{28}} t} \\ &\geqq \frac{2k-1}{\log^{1+c_{28}} t} > \frac{1}{\log^{c_{30}} t}. \end{aligned} \tag{67}$$

Andererseits ist für

$$t \geqq e^{2k}, \quad 1 + \frac{1}{\log^{1+c_{27}+c_{28}} t} \leqq \sigma \leqq 2$$

nach (62)

$$|L(\sigma+ti)| > \frac{(\sigma-1)^{\frac{3}{4}}}{\log^{c_{26}} t} \geqq \frac{1}{\log^{c_{26}+\frac{3}{4}(1+c_{27}+c_{28})} t} = \frac{1}{\log^{c_{31}} t}. \tag{68}$$

Wird die größere der beiden Zahlen c_{30} und c_{31} gleich c_{32} gesetzt, so ist also nach (67) und (68) für

$$t \geqq e^{2k}, \quad 1 - \frac{1}{\log^{1+c_{27}+c_{28}} t} \leqq \sigma \leqq 2$$

$$|L(s)| > \frac{1}{\log^{c_{32}} t}.$$

Wird endlich die größere der beiden Zahlen $1 + c_{27} + c_{28}$ und c_{32} mit c_{29} bezeichnet, so ist damit der Satz XI bewiesen.

In dem Gebiete (66) ist $L(s)$, also jede einzelne der Funktionen

$$L_1(s), L_2(s), \cdots, L_k(s)$$

von Null verschieden.

Satz XII. *Es ist für*

$$t \geqq e^{2k}, \quad 1 - \frac{1}{\log^{c_{32}} t} \leqq \sigma \leqq 2 \tag{66}$$

und alle $\nu = 1, 2, \cdots, h$

$$|L_\nu(s)| > \frac{1}{\log^{c_{33}} t}. \tag{69}$$

Beweis. Für das Gebiet (66) ist nach Satz XI

$$|L(s)| = |L_1(s)|\,|L_2(s)| \cdots |L_h(s)| > \frac{1}{\log^{c_{30}} t},$$

ferner nach Satz VIII

$$|L_1(s)| < c_{21} \log t, \cdots, |L_h(s)| < c_{21} \log t;$$

also genügt jede der Funktionen $L_\nu(s)$ für (66) der Ungleichung

$$|L_\nu(s)| > \frac{1}{\log^{c_{30}} t} \cdot \frac{1}{c_{21}^{h-1} \log^{h-1} t} > \frac{1}{\log^{c_{33}} t}.$$

Satz XIII. *Es gibt eine Konstante* c_{34}, *so daß für*

$$t \geqq e^{2k}, \quad 1 - \frac{1}{\log^{c_{34}} t} \leqq \sigma \leqq 2 \tag{70}$$

und alle $\nu = 1, 2, \cdots, h$

$$\left|\frac{L_\nu'(s)}{L_\nu(s)}\right| < \log^{c_{34}} t$$

ist.

Beweis. Für das Gebiet (66) ist nach Satz VIII

$$|L_\nu'(s)| < c_{21} \log^2 t, \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, h)$$

nach Satz XII

$$|L_\nu(s)| > \frac{1}{\log^{c_{33}} t}, \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, h)$$

also

$$\left|\frac{L_\nu'(s)}{L_\nu(s)}\right| < c_{21} \log^{2+c_{33}} t < \log^{c_{34}} t;$$

wird die größere der beiden Zahlen c_{29} und c_{35} gleich c_{34} gesetzt, so ist damit der Satz XIII bewiesen.

§ 7.

Es sei nun eine durch das Ideal $\mathfrak{l}$ repräsentierte Idealklasse gegeben und für sie der Hauptsatz 1 zu beweisen. $\mathfrak{k}$ sei ein beliebiges Ideal der zu ihr inversen Klasse, so daß also

$$\mathfrak{k}\mathfrak{l} \sim \mathfrak{o}$$

ist, und es werde die Funktion

$$\Phi(s) = \sum_{\nu=1}^{h} \chi_\nu(\mathfrak{k}) \frac{L_\nu'(s)}{L_\nu(s)} \tag{71}$$

betrachtet. Nach einer auf S. 170 gemachten Bemerkung verschwindet für

$$t \geqq e^{2k}, \quad 1 - \frac{1}{\log^{c_{25}} t} \leqq \sigma \leqq 2 \tag{66}$$

keine der Funktionen $L_\nu(s)$; $\Phi(s)$ ist also in diesem Gebiete regulär und genügt nach dem Satz XIII für

$$t \geqq e^{2k}, \quad 1 - \frac{1}{\log^{c_{34}} t} \leqq \sigma \leqq 2 \tag{70}$$

der Ungleichung

$$|\Phi(s)| \leqq \sum_{\nu=1}^{h} \left| \frac{L_\nu'(s)}{L_\nu(s)} \right| < h \log^{c_{34}} t < \log^{c_{35}} t. \tag{72}$$

Ferner ist nach Satz IX $\Phi(s)$ für $\Re(s) = 1$ (exkl. $s = 1$) regulär. In $s = 1$ hat $\Phi(s)$ einen Pol erster Ordnung mit dem Residuum -1, da

$$\chi_1(\mathfrak{k}) \frac{L_1'(s)}{L_1(s)} = \frac{L_1'(s)}{L_1(s)}$$

einen solchen hat, während sich die Funktionen

$$\chi_2(\mathfrak{k}) \frac{L_2'(s)}{L_2(s)}, \cdots, \chi_h(\mathfrak{k}) \frac{L_h'(s)}{L_h(s)}$$

im Punkte $s = 1$ regulär verhalten.

Nun ist für $\Re(s) > 1$ und jedes ν nach (42)

$$\begin{aligned} \frac{L_\nu'(s)}{L_\nu(s)} = \frac{d}{ds} \log L_\nu(s) &= -\frac{d}{ds} \sum_{\mathfrak{p}} \log \left(1 - \frac{\chi_\nu(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^s}\right) \\ &= -\sum_{\mathfrak{p}} \frac{\frac{\chi_\nu(\mathfrak{p}) \log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^s}}{1 - \frac{\chi_\nu(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^s}} = -\sum_{\mathfrak{p}} \frac{\chi_\nu(\mathfrak{p}) \log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^s - \chi_\nu(\mathfrak{p})} \\ &= -\sum_{\mathfrak{p}} \frac{\chi_\nu(\mathfrak{p}) \log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^s} \left(1 + \frac{\chi_\nu(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^s - \chi_\nu(\mathfrak{p})}\right) \\ &= -\sum_{\mathfrak{p}} \frac{\chi_\nu(\mathfrak{p}) \log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^s} - \sum_{\mathfrak{p}} \frac{\chi_\nu(\mathfrak{p}^2) \log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^s (N\mathfrak{p}^s - \chi_\nu(\mathfrak{p}))}. \end{aligned} \tag{73}$$

Hierin ist die letzte Summe wegen

$$\left| \frac{\chi_\nu(\mathfrak{p}^2) \log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^s (N\mathfrak{p}^s - \chi_\nu(\mathfrak{p}))} \right| \leqq \frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^\sigma (N\mathfrak{p}^\sigma - 1)}$$

für $\Re(s) > \frac{1}{2}$ konvergent und zwar in einer Umgebung jeder Stelle dieser Halbebene gleichmäßig; jene Summe stellt also eine für $\Re(s) > \frac{1}{2}$ reguläre analytische Funktion dar, welche offenbar für $\Re(s) > \frac{3}{4}$ dem absoluten Betrage nach unterhalb einer endlichen Schranke gelegen ist. Daher ist nach (71) und (73) für $\Re(s) > 1$

$$(74) \qquad \Phi(s) = -\sum_{\nu=1}^{h} \chi_\nu(\mathfrak{k}) \frac{L_\nu'(s)}{L_\nu(s)} = -\sum_{\nu=1}^{h} \chi_\nu(\mathfrak{k}) \sum_{\mathfrak{p}} \frac{\chi_\nu(\mathfrak{p}) \log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^s} + G(s),$$

wo $G(s)$ für $\Re(s) > \frac{3}{4}$ regulär ist und dort der Ungleichung

$$(75) \qquad |G(s)| < c_{37}$$

genügt.

Nun ist für $\Re(s) > 1$

$$\sum_{\nu=1}^{h} \chi_\nu(\mathfrak{k}) \sum_{\mathfrak{p}} \frac{\chi_\nu(\mathfrak{p}) \log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^s} = \sum_{\mathfrak{p}} \frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^s} \sum_{\nu=1}^{h} \chi_\nu(\mathfrak{k}\mathfrak{p});$$

nach (40) und (41) ist

$$\sum_{\nu=1}^{h} \chi_\nu(\mathfrak{k}\mathfrak{p})$$

dann und nur dann von Null verschieden und zwar $= h$, wenn $\mathfrak{k}\mathfrak{p}$ der Hauptklasse angehört, also $\mathfrak{p}$ der zu $\mathfrak{k}$ inversen Klasse, d. h. der gegebenen Klasse. Daher ist nach (74)

$$\Phi(s) = -h \sum_{\mathfrak{p} \sim \mathfrak{l}} \frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^s} + G(s).$$

Die durch die für $\Re(s) > 1$ konvergente Dirichletsche Reihe

$$\sum_{\mathfrak{p} \sim \mathfrak{l}} \frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^s}$$

definierte analytische Funktion $K(s)$ ist also im Gebiete (70) regulär und genügt ebenda nach (72) und (75) der Ungleichung

$$|K(s)| < \frac{1}{h} (\log^{c_{36}} t + c_{37}) < \log^{c_{36}} t.$$

Da $K(s)$ für konjugiert komplexe s konjugiert komplexe Werte annimmt, ist also für

$$t \leqq -e^{2k}, \quad 1 - \frac{1}{\log^{c_{36}}(-t)} \leqq \sigma \leqq 2$$

$K(s)$ regulär und genügt dort der Ungleichung

$$|K(s)| < \log^{c_{36}}(-t).$$

Ferner hat $K(s)$ im Punkte $s = 1$ einen Pol erster Ordnung mit dem Residuum $\frac{1}{h}$ und ist sonst für $\Re(s) = 1$ regulär. Es gibt also eine Konstante c_{39}, so daß $K(s)$ für

$$-e^{2k} \leqq t \leqq e^{2k}, \quad 1 - \frac{1}{(2k)^{c_{39}}} \leqq \sigma \leqq 1$$

mit Ausschluß des Punktes $s = 1$ regulär ist.

Wenn a eine oberhalb der drei Zahlen c_{34}, c_{38}, c_{39} gelegene ganze Zahl bezeichnet, so ergibt sich also der (im folgenden für den Beweis des Hauptsatzes 1 allein anzuwendende)

Satz XIV. *$K(s)$ bezeichne die für $\Re(s)>1$ durch die Dirichletsche Reihe*

$$\sum_{\mathfrak{p}\sim\mathfrak{l}} \frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^s}$$

definierte analytische Funktion; dann gibt es eine positive ganze Zahl a mit folgenden Eigenschaften: $K(s)$ ist bis auf den Pol $s=1$ (mit dem Residuum $\frac{1}{h}$) in demjenigen Teile der Ebene regulär, welcher rechts von der stetigen Kurve

$$\begin{cases} \sigma = 1 - \dfrac{1}{\log^a t} & \text{für } t \geqq e^{2k}, \\ \sigma = 1 - \dfrac{1}{(2k)^a} & \text{für } -e^{2k} \leqq t \leqq e^{2k}, \\ \sigma = 1 - \dfrac{1}{\log^a(-t)} & \text{für } t \leqq -e^{2k} \end{cases}$$

gelegen ist, inklusive der Kurve selbst, und $K(s)$ genügt für

$$t \geqq e^{2k}, \quad 1 - \frac{1}{\log^a t} \leqq \sigma \leqq 2$$

der Ungleichung

$$|K(\sigma+ti)| = |K(\sigma-ti)| < \log^a t. \tag{76}$$

§ 8.

Satz XV. *Es ist*

$$\sum_{\substack{\mathfrak{p}\sim\mathfrak{l} \\ N\mathfrak{p}<x}} \log N\mathfrak{p} \log \frac{x}{N\mathfrak{p}} = \frac{1}{2\pi i}\int_{2-x^2 i}^{2+x^2 i} \frac{x^s}{s^2} K(s)\,ds + O(1), \tag{77}$$

wo das Integral auf gerader Bahn zu erstrecken ist; d. h.*) die Differenz $\sum - \frac{1}{2\pi i}\int$ liegt für alle $x \geqq 1$ dem absoluten Betrage nach unterhalb einer von x unabhängigen Schranke.

Beweis. Bekanntlich ist das geradlinig erstreckte Integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{2-\infty i}^{2+\infty i} \frac{y^s}{s^2}\,ds \begin{cases} = \log y & \text{für } y \geqq 1, \\ = 0 & \text{für } 0 < y \leqq 1. \end{cases}$$

*) Vergl. die Definition des Zeichens $O(g(x))$ auf S. 150, Anm. 3.

Wenn x eine positive Größe ist, so ist

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{2-\infty i}^{2-x^2 i}\frac{y^s}{s^2}\,ds\right| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{2+x^2 i}^{2+\infty i}\frac{y^s}{s^2}\,ds\right| < \frac{1}{2\pi}\int_{x^2}^{\infty}\frac{y^2}{t^2}\,dt = \frac{y^2}{2\pi x^2} < \frac{y^2}{2x^2},$$

also

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{2-x^2 i}^{2+x^2 i}\frac{y^s}{s^2}\,ds \begin{cases} = \log y + \Theta\frac{y^2}{x^2} & \text{für} \quad y \geqq 1, \\ = \Theta\frac{y^2}{x^2} & \text{für} \quad 0 < y \leqq 1, \end{cases} \tag{78}$$

wo die von x und y abhängige Größe

$$\Theta = \Theta(x, y)$$

dem absoluten Betrage nach < 1 ist.

Für $\Re(s) = 2$ ist die unendliche Reihe

$$\sum_{\mathfrak{p}\sim 1}\frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^s},$$

welche für $\Re(s) > 1$ die Funktion $K(s)$ definiert, gleichmäßig konvergent, da dort

$$\left|\frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^s}\right| \leqq \frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^2}$$

ist. Das Produkt der Reihe mit $\frac{x^s}{s^2}$ darf also von $2 - x^2 i$ bis $2 + x^2 i$ auf gerader Bahn gliedweise integriert werden, und es ergibt sich unter Anwendung von (78)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{2-x^2 i}^{2+x^2 i}\frac{x^s}{s^2}K(s)\,ds = \frac{1}{2\pi i}\int_{2-x^2 i}^{2+x^2 i}\sum_{\mathfrak{p}\sim 1}\frac{x^s}{s^2}\frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^s}\,ds$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\sum_{\mathfrak{p}\sim 1}\log N\mathfrak{p}\int_{2-x^2 i}^{2+x^2 i}\left(\frac{x}{N\mathfrak{p}}\right)^s\frac{ds}{s^2}$$

$$-\sum_{\substack{\mathfrak{p}\sim 1\\ N\mathfrak{p}\leq x}}\left(\log N\mathfrak{p}\log\frac{x}{N\mathfrak{p}} + \log N\mathfrak{p}\cdot\Theta\cdot\frac{x^2}{N\mathfrak{p}^2\cdot x^2}\right) + \sum_{\substack{\mathfrak{p}\sim 1\\ N\mathfrak{p}>x}}\log N\mathfrak{p}\cdot\Theta\cdot\frac{x^2}{N\mathfrak{p}^2\cdot x^2}$$

$$-\sum_{\substack{\mathfrak{p}\sim 1\\ N\mathfrak{p}\leq x}}\log N\mathfrak{p}\log\frac{x}{N\mathfrak{p}} + \sum_{\mathfrak{p}\sim 1}\frac{\log N\mathfrak{p}\cdot\Theta}{N\mathfrak{p}^2}.$$

Hierin ist der absolute Wert der letzten Summe wegen

$$|\Theta| = \left|\Theta\left(x, \frac{x}{N\mathfrak{p}}\right)\right| < 1$$

unterhalb der von x unabhängigen Zahl

$$\sum_{\mathfrak{p}\sim\mathfrak{l}} \frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^2}$$

gelegen; jene Summe kann also mit $O(1)$ bezeichnet werden, und aus

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{2-x^2 i}^{2+x^2 i} \frac{x^s}{s^2} K(s)\,ds = \sum_{\substack{\mathfrak{p}\sim\mathfrak{l} \\ N\mathfrak{p}\leq x}} \log N\mathfrak{p} \log \frac{x}{N\mathfrak{p}} + O(1)$$

folgt die Richtigkeit des zu beweisenden Satzes XV.

Satz XVI. *Es ist*

$$\sum_{\substack{\mathfrak{p}\sim\mathfrak{l} \\ N\mathfrak{p}<x}} \log N\mathfrak{p} \log \frac{x}{N\mathfrak{p}} = \frac{x}{h} + O(xe^{-b\sqrt{\log x}}), \tag{79}$$

wo b eine Konstante bezeichnet.

Beweis. Ich wende, indem ich $x > e^k$ annehme, den Cauchyschen Satz auf den Integranden $\frac{x^s}{s^2} K(s)$ und folgenden Integrationsweg $ABCDEFA$ an. Es ist

$$A = 2 - x^2 i, \quad B = 2 + x^2 i, \quad C = 1 - \frac{1}{\log^a (x^2)} + x^2 i,$$

$$D = 1 - \frac{1}{(2k)^a} + e^{2k} i, \quad E = 1 - \frac{1}{(2k)^a} - e^{2k} i, \quad F = 1 - \frac{1}{\log^a (x^2)} - x^2 i$$

die Strecken AB, BC, DE, FA sind geradlinig, CD bezeichnet das Kurvenstück

$$s = 1 - \frac{1}{\log^a t} + ti \qquad (x^2 \geqq t \geqq e^{2k})$$

und EF das Kurvenstück

$$s = 1 - \frac{1}{\log^a (-t)} + ti \qquad (-e^{2k} \geqq t \geqq -x^2).$$

Nach Satz XIV besitzt die Funktion $K(s)$ in diesem ganzen geschlossenen Gebiete (mit Einschluß des Randes) als einzige Singularität den Pol erster Ordnung $s = 1$ mit dem Residuum $\frac{1}{h}$; also besitzt der Integrand $\frac{x^s}{s^2} K(s)$ in jenem Gebiet (mit Einschluß des Randes) als einzige Singularität den Pol erster Ordnung $s = 1$ mit dem Residuum $\frac{x}{h}$, und

die Anwendung des Cauchyschen Satzes ergibt für das in (77) auftretende geradlinige Integral

$$(80)\qquad \int_{\frac{1}{2}-x^2 i}^{\frac{1}{2}+x^2 i} \frac{x^s}{s^2} K(s)\,ds = \int_{AB} = \frac{2\pi i x}{h} + \int_{AF} + \int_{FE} + \int_{ED} + \int_{DC} + \int_{CB}.$$

Hierin ist zunächst, da auf dem Wege ED

$$\frac{1}{s^2} K(s)$$

unterhalb einer von x unabhängigen Schranke liegt,

$$(81)\qquad \left|\int_{ED}\right| = O\int_{-e^{2k}}^{e^{2k}} \left| x^{1-\frac{1}{(2k)^a}+ti}\right| dt = O\left(x^{1-\frac{1}{(2k)^a}}\right)\cdot 2e^{2k} = O\left(x^{1-\frac{1}{(2k)^a}}\right).$$

Zweitens ist nach (76)

$$\left|\int_{CB}\right| - \left|\int_{AF}\right| = \int_{1-\frac{1}{\log^a(x^2)}}^{2} \frac{x^{\sigma+x^2 i}}{(\sigma+x^2 i)^2} K(\sigma+x^2 i)\,d\sigma$$

$$(82)\qquad < \int_{1-\frac{1}{\log^a(x^2)}}^{2} \frac{x^2}{x^4} \log^a(x^2)\,d\sigma < \frac{2\log^a(x^2)}{x^2} = O\left(\frac{\log^a x}{x^2}\right).$$

Drittens ist nach (76)

$$\left|\int_{DC}\right| - \left|\int_{FE}\right| = \int_{e^{2k}}^{x^2} \frac{x^{1-\frac{1}{\log^a t}+ti}}{\left(1-\frac{1}{\log^a t}+ti\right)^2} K\left(1-\frac{1}{\log^a t}+ti\right) d\left(1-\frac{1}{\log^a t}+ti\right)$$

$$< \int_{e^{2k}}^{x^2} \frac{x^{1-\frac{1}{\log^a t}}}{t^2} \log^a t \left|\frac{a}{t\log^{a+1} t}+i\right| dt$$

$$< \left(\frac{a}{e^{2k}(2k)^{a+1}}+1\right) \int_{e^{2k}}^{x^2} x^{1-\frac{1}{\log^a t}} \frac{\log^a t}{t^2}\,dt$$

$$= c_{40} x \int_{e^{2k}}^{x^2} x^{-\frac{1}{\log^a t}} \frac{\log^a t}{t^2}\,dt.$$

Dies Integral werde in zwei durch $e^{2^{\sqrt[a]{\log x}}}$ geschiedene Teile zerlegt; (für alle hinreichend großen x ist

$$e^{2k} < e^{2^{\sqrt[a]{\log x}}} < x^2);$$

dadurch ergibt sich

$$\left|\int_{BC}\right| = \left|\int_{FE}\right| < c_{40}x\int_{e^{2k}}^{e^{2^{\sqrt[a]{\log x}}}} x^{-\frac{1}{\log^a t}}\frac{\log^a t}{t^2}\,dt + c_{40}x\int_{e^{2^{\sqrt[a]{\log x}}}}^{x^2} x^{-\frac{1}{\log^a t}}\frac{\log^a t}{t^2}\,dt$$

$$< c_{40}x\cdot x^{-\frac{1}{\log^a\left(e^{2^{\sqrt[a]{\log x}}}\right)}}\int_{e^{2k}}^{e^{2^{\sqrt[a]{\log x}}}}\frac{\log^a t}{t^2}\,dt + c_{40}x\int_{e^{2^{\sqrt[a]{\log x}}}}^{x^2}\frac{\log^a t}{t^2}\,dt$$

$$< c_{40}x\cdot x^{-\frac{1}{\sqrt{\log x}}}\int_{e^{2k}}^{\infty}\frac{\log^a t}{t^2}\,dt + c_{40}x\log^a(x^2)\int_{e^{2^{\sqrt[a]{\log x}}}}^{x^2}\frac{dt}{t^2}$$

$$< c_{41}xe^{-\frac{\log x}{\sqrt{\log x}}} + c_{40}2^a x\log^a x\int_{e^{2^{\sqrt[a]{\log x}}}}^{\infty}\frac{dt}{t^2}$$

$$= c_{41}xe^{-\sqrt{\log x}} + c_{40}2^a x\,\frac{\log^a x}{e^{2^{\sqrt[a]{\log x}}}} = O\left(xe^{-\sqrt{\log x}}\right) + O\left(xe^{-3^{\sqrt[a]{\log x}}}\right)$$

$$= O\left(xe^{-b\sqrt{\log x}}\right), \tag{83}$$

wo b eine ganzzahlige positive Konstante bezeichnet.

Setzt man (81), (82) und (83) in (80) ein, so ergibt sich

$$\int_{2-x^2 i}^{2+x^2 i}\frac{x^s}{s^2}K(s)\,ds = \frac{2\pi i x}{h} + O\left(x^{1-\frac{1}{(2k)^a}}\right) + O\left(\frac{\log^a x}{x^2}\right) + O\left(xe^{-b\sqrt{\log x}}\right)$$

$$= \frac{2\pi i x}{h} + O\left(xe^{-b\sqrt{\log x}}\right),$$

also nach (77) (Satz XV)

$$\sum_{\substack{\mathfrak{p}\sim 1\\ N\mathfrak{p}\leq x}}\log N\mathfrak{p}\log\frac{x}{N\mathfrak{p}} = \frac{x}{h} + O\left(xe^{-b\sqrt{\log x}}\right), \tag{79}$$

womit der Satz XVI bewiesen ist.

§ 9.

Satz XVII. *Es ist*

$$\sum_{\substack{\mathfrak{p}\sim 1\\ N\mathfrak{p}\leq x}} \log N\mathfrak{p} = \frac{x}{h} + O\left(xe^{-\sqrt[h]{\log x}}\right), \tag{84}$$

wo c eine Konstante bezeichnet.

Hierin liegt speziell das wichtige Ergebnis enthalten, daß

$$\lim_{x=\infty} \frac{1}{x} \sum_{\substack{\mathfrak{p}\sim 1\\ N\mathfrak{p}<x}} \log N\mathfrak{p} = \frac{1}{h}$$

ist.

Beweis. Es werde zur Abkürzung die für $x = \infty$ zu Null abnehmende Funktion

$$e^{-2\sqrt[h]{\log x}} = \delta$$

gesetzt; wenn in (79) $(1+\delta)x$ statt x geschrieben wird, so folgt, weil offenbar

$$(1+\delta)\, x e^{-\sqrt[h]{\log((1+\delta)x)}} = O\left(xe^{-\sqrt[h]{\log x}}\right)$$

ist,

$$\sum_{\substack{\mathfrak{p}\sim 1\\ N\mathfrak{p}\leq (1+\delta)x}} \log N\mathfrak{p} \log \frac{(1+\delta)x}{N\mathfrak{p}} = \frac{(1+\delta)x}{h} + O\left(xe^{-\sqrt[h]{\log x}}\right), \tag{85}$$

folglich, wenn (79) von (85) subtrahiert wird,

$$\log(1+\delta) \sum_{\substack{\mathfrak{p}\sim 1\\ N\mathfrak{p}\leq x}} \log N\mathfrak{p} + \sum_{\substack{\mathfrak{p}\sim 1\\ x<N\mathfrak{p}\leq (1+\delta)x}} \log N\mathfrak{p} \log \frac{(1+\delta)x}{N\mathfrak{p}} = \frac{\delta x}{h} + O\left(xe^{-\sqrt[h]{\log x}}\right). \tag{86}$$

Hierin ist die zweite Summe

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{\mathfrak{p}\sim 1\\ x<N\mathfrak{p}\leq (1+\delta)x}} \log N\mathfrak{p} \log \frac{(1+\delta)x}{N\mathfrak{p}} \leqq \log(1+\delta) \sum_{\substack{\mathfrak{p}\sim 1\\ x<N\mathfrak{p}\leq (1+\delta)x}} \log N\mathfrak{p} \\
&\leqq \delta \sum_{x<N\mathfrak{n}\leq (1+\delta)x} \log N\mathfrak{n} \leqq \delta \log((1+\delta)x) \sum_{x<N\mathfrak{n}\leq (1+\delta)x} 1 \\
&= \delta \log((1+\delta)x)\,(H((1+\delta)x) - H(x)) \\
&\leqq \delta \log(2x)\,(H((1+\delta)x) - H(x)) \\
&= \delta \log(2x) \left(gh(1+\delta)x + O\left(x^{1-\frac{1}{k}}\right) - ghx - O\left(x^{1-\frac{1}{k}}\right)\right) \\
&= gh\delta^2 x \log(2x) + O\left(x^{1-\frac{1}{k}}\delta \log x\right) \\
&= O\left(x \log x e^{-2\sqrt[h]{\log x}}\right) + O\left(x^{1-\frac{1}{k}} \log x e^{-2\sqrt[h]{\log x}}\right) \\
&= O\left(x \log x e^{-2\sqrt[h]{\log x}}\right).
\end{aligned} \tag{87}$$

Aus (86) und (87) folgt, wenn

$$\sum_{\substack{\mathfrak{p}\sim\mathfrak{l}\\ N\mathfrak{p}\leq x}} \log N\mathfrak{p} = \tau(x)$$

gesetzt wird,

$$\log(1+\delta)\tau(x) = \frac{\delta x}{h} + O\left(x\log x e^{-2\sqrt[3]{\log x}}\right);$$

wegen

$$\lim_{\delta=0}\frac{\delta}{\log(1+\delta)} = 1$$

ist

$$\frac{1}{\log(1+\delta)} = O\left(e^{2\sqrt[3]{\log x}}\right),$$

also

$$\tau(x) = \frac{\delta}{\log(1+\delta)}\frac{x}{h} + O\left(x\log x e^{-2\sqrt[3]{\log x}}\right). \tag{88}$$

Nun ist

$$\lim_{\delta=0}\left(\frac{\delta}{\log(1+\delta)} - 1\right)\frac{1}{\delta} = \frac{1}{2},$$

also

$$\frac{\delta}{\log(1+\delta)} = 1 + O\left(e^{-\sqrt[3]{\log x}}\right);$$

dies gibt, in (88) eingesetzt,

$$\begin{aligned}\tau(x) &= \frac{x}{h} + O\left(xe^{-\sqrt[3]{\log x}}\right) + O\left(x\log x e^{-2\sqrt[3]{\log x}}\right)\\ &= \frac{x}{h} + O\left(xe^{-\sqrt[3]{\log x}}\right),\end{aligned}$$

falls c irgend eine ganze Zahl $> 2b$ bezeichnet. Damit ist (84), also der Satz XVII bewiesen.

§ 10.

Satz XVIII. *Wenn $\varrho(x)$ die Anzahl der Primideale bezeichnet, welche der gegebenen Idealklasse angehören und deren Norm $\leqq x$ ist, so ist*

$$\varrho(x) = \frac{1}{h}\operatorname{Li}(x) + O\left(xe^{-\sqrt[d]{\log x}}\right), \tag{89}$$

wo d eine Konstante bezeichnet.

Beweis. Es sei $G(n)$ die Anzahl der Primideale $\mathfrak{p}\sim\mathfrak{l}$, deren Norm $= n$ ist. Dann ist

$$\varrho(x) = \sum_{\substack{\mathfrak{p}\sim\mathfrak{l}\\ N\mathfrak{p}\leq x}} 1 = \sum_{n=1}^{x} G(n)$$

und

$$\tau(x) = \sum_{n=1}^{x} G(n)\log n,$$

also

$$\varrho(x) = \sum_{n=2}^{x} \frac{\tau(n) - \tau(n-1)}{\log n} = \sum_{n=2}^{x} \tau(n) \left(\frac{1}{\log n} - \frac{1}{\log (n+1)}\right) + \frac{\tau(x)}{\log ([x]+1)}$$

und nach (84)

$$\varrho(x) = \sum_{n=2}^{x} \frac{n}{h} \left(\frac{1}{\log n} - \frac{1}{\log (n+1)}\right) + \frac{[x]}{h \log ([x]+1)}$$

$$+ O \sum_{n=2}^{x} n e^{-\sqrt[6]{\log n}} \left(\frac{1}{\log n} - \frac{1}{\log (n+1)}\right) + O\left(\frac{x e^{-\sqrt[6]{\log x}}}{\log ([x]+1)}\right)$$

$$= \frac{1}{h} \sum_{n=2}^{x} \frac{1}{\log n} (n - (n-1)) + O \sum_{n=2}^{x} n e^{-\sqrt[6]{\log n}} \frac{\log \left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\log^2 n} + O\left(x e^{-\sqrt[6]{\log x}}\right)$$

$$= \frac{1}{h} \sum_{n=2}^{x} \frac{1}{\log n} + O \sum_{n=2}^{x} n e^{-\sqrt[6]{\log n}} \frac{\frac{1}{n}}{1} + O\left(x e^{-\sqrt[6]{\log x}}\right)$$

$$= \frac{1}{h} \int_2^x \frac{du}{\log u} + O \int_1^x e^{-\sqrt[6]{\log u}}\, du + O\left(x e^{-\sqrt[6]{\log x}}\right)$$

$$= \frac{1}{h} \operatorname{Li}(x) + O \int_1^{\sqrt{x}} e^{-\sqrt[6]{\log u}}\, du + O \int_{\sqrt{x}}^{x} e^{-\sqrt[6]{\log u}}\, du + O\left(x e^{-\sqrt[6]{\log x}}\right)$$

$$= \frac{1}{h} \operatorname{Li}(x) + O \int_1^{\sqrt{x}} du + O\left(e^{-\sqrt[6]{\log (\sqrt{x})}} \int_{\sqrt{x}}^{x} du\right) + O\left(x e^{-\sqrt[6]{\log x}}\right)$$

$$= \frac{1}{h} \operatorname{Li}(x) + O(\sqrt{x}) + O\left(e^{-\frac{1}{\sqrt[6]{2}} \sqrt[6]{\log x}} \cdot x\right) + O\left(x e^{-\sqrt[6]{\log x}}\right)$$

$$(89) \quad = \frac{1}{h} \operatorname{Li}(x) + O\left(x e^{-\sqrt[6]{\log x}}\right),$$

womit der Satz XVIII bewiesen ist.

Für jedes reelle m ist

$$\lim_{x=\infty} \log^m x e^{-\sqrt[6]{\log x}} = 0;$$

daher folgt aus (89) (Satz XVIII)

$$\lim_{x=\infty} \frac{\log^m x}{x} \left(\varrho(x) - \frac{1}{h} \operatorname{Li}(x)\right) = 0 . \tag{1}$$

Damit habe ich den in § 1 ausgesprochenen Hauptsatz 1 bewiesen, also auch die ebenda angegebenen Folgerungen.

Zweiter Teil.

§ 11

(Einleitung).

Das Ziel der §§ 12—16 ist der

Hauptsatz 2. *Ein algebraischer Zahlkörper habe die Eigenschaft, daß*

$$\sum_{\mathfrak{p} \sim \mathfrak{o}} \frac{1}{N\mathfrak{p}}$$

divergiert. Man teile alle quadratfreien Ideale einer Klasse in zwei Abteilungen, je nachdem sie aus einer geraden oder ungeraden Anzahl von Primidealen zusammengesetzt sind. Es sei $R(x)$ bezw. $S(x)$ die Anzahl der Ideale der ersten bezw. zweiten Abteilung, deren Norm $\leqq x$ ist. Dann existiert

$$\lim_{x=\infty} \frac{R(x)}{S(x)}$$

und ist $= 1$.

Dasselbe gilt, wenn man alle Ideale einer Klasse in zwei Abteilungen teilt, je nachdem die Anzahl der Primidealfaktoren, aus denen sie bestehen (mehrfache mehrfach gerechnet), gerade oder ungerade ist.

Kurz ausgedrückt: In jeder Idealklasse ist asymptotisch ebenso oft $\mu(\mathfrak{f}) = +1$ als $\mu(\mathfrak{f}) = -1$; in jeder Idealklasse ist asymptotisch ebenso oft $\lambda(\mathfrak{f}) = +1$ als $\lambda(\mathfrak{f}) = -1$. Hierbei bedeuten $\mu(\mathfrak{f})$ und $\lambda(\mathfrak{f})$ die idealtheoretischen Funktionen, welche folgendermaßen definiert sind:

1. Für das Einheitsideal $\mathfrak{o}$ ist

$$\mu(\mathfrak{o}) = 1.$$

2. Wenn $\mathfrak{n}$ durch das Quadrat eines von $\mathfrak{o}$ verschiedenen Ideals teilbar ist, ist

$$\mu(\mathfrak{n}) = 0.$$

3. Wenn $\mathfrak{n}$ quadratfrei und das Produkt von ϱ verschiedenen Primidealen ist, ist

$$\mu(\mathfrak{n}) = (-1)^{\varrho}.$$

1. Für das Einheitsideal $\mathfrak{o}$ ist

$$\lambda(\mathfrak{o}) = 1.$$

2. Für das Ideal

$$\mathfrak{n} = \mathfrak{p}_1^{\alpha_1} \cdots \mathfrak{p}_r^{\alpha_r}$$

ist

$$\lambda(\mathfrak{n}) = (-1)^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_r}.$$

Nachdem in §§ 12—16 der Hauptsatz 2 bewiesen ist, folgt in § 17 die (ganz unmittelbare) Ausdehnung der Hauptsätze 1 und 2 auf den weiteren Klassenbegriff und in § 18 die Diskussion der jenen beiden Sätzen zugrunde liegenden Voraussetzung, daß die Reihe

$$\sum_{\mathfrak{p}-\mathfrak{o}} \frac{1}{N\mathfrak{p}}$$

divergiert.

§ 12.

Es ist nach (42) für $\Re(s) > 1$

$$\frac{1}{L_\nu(s)} = \prod_{\mathfrak{p}} \left(1 - \frac{\chi_\nu(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^s}\right) = \sum_{\mathfrak{n}} \frac{\chi_\nu(\mathfrak{n})\,\mu(\mathfrak{n})}{N\mathfrak{n}^s}.$$

Wenn $\mathfrak{l}$ die gegebene Idealklasse, $\mathfrak{l}^{-1}$ die inverse Klasse repräsentiert, ist für $\Re(s) > 1$

$$\sum_{\nu=1}^{h} \frac{\chi_\nu(\mathfrak{l}^{-1})}{L_\nu(s)} = \sum_{\nu=1}^{h} \chi_\nu(\mathfrak{l}^{-1}) \sum_{\mathfrak{n}} \frac{\chi_\nu(\mathfrak{n})\,\mu(\mathfrak{n})}{N\mathfrak{n}^s} = \sum_{\mathfrak{n}} \frac{\mu(\mathfrak{n})}{N\mathfrak{n}^s} \sum_{\nu=1}^{h} \chi_\nu(\mathfrak{l}^{-1}\mathfrak{n})$$
$$= h \sum_{\mathfrak{n} \sim \mathfrak{l}} \frac{\mu(\mathfrak{n})}{N\mathfrak{n}^s}.$$

Wenn nun $\Psi(s)$ die für $\Re(s) > 1$ durch die Dirichletsche Reihe

$$\sum_{\mathfrak{n} \sim \mathfrak{l}} \frac{\mu(\mathfrak{n})}{N\mathfrak{n}^s}$$

definierte analytische Funktion bezeichnet, gilt der

Satz XIX. *$\Psi(s)$ ist auf der Geraden $\Re(s) = 1$ regulär, und es gibt eine Zahl c_{23}, so daß für*

$$t \geqq e^{3k}, \quad 1 - \frac{1}{\log^{c_{23}} t} \leqq \sigma \leqq 2$$

$\Psi(s)$ regulär ist und der Ungleichung

$$|\Psi(s)| < \log^{c_{23}} t$$

genügt.

Beweis. Nach Satz IX sind $L_1(s), \cdots, L_h(s)$ auf der Geraden $\Re(s) = 1$ von Null verschieden, also $\Psi(s)$ dort regulär. Nach Satz XII sind diese Funktionen für

(66) $$t \geqq e^{3k}, \quad 1 - \frac{1}{\log^{c_{23}} t} \leqq \sigma \leqq 2$$

regulär, von Null verschieden und genügen dort der Ungleichung

(69) $$|L_\nu(s)| > \frac{1}{\log^{c_{23}} t}.$$

Für das Gebiet (66) ist also $\Psi(s)$ regulär und

$$|\Psi(s)| \leqq \frac{1}{h} \sum_{\nu=1}^{h} \frac{1}{|L_\nu(s)|} < \frac{1}{h}\, h \log^{c_{32}} t = \log^{c_{32}} t;$$

setzt man die größere der Zahlen c_{29} und c_{33} gleich c_{42}, so ersieht man die Richtigkeit des Satzes XIX.

Es werde nun eine ganze Zahl $a > c_{42}$ so gewählt, daß $\frac{1}{(2k)^a}$ kleiner ist als der Abstand der Geraden $\sigma = 1$ von allen etwa vorhandenen singulären Stellen von $\Psi(s)$, deren imaginärer Teil zwischen $-e^{2k}i$ und $e^{2k}i$ liegt. Wenn dann noch die Gleichung

$$|\Psi(\sigma + ti)| = |\Psi(\sigma - ti)|$$

berücksichtigt wird, so ergibt sich der

Satz XX. *Die Funktion $\Psi(s)$ ist regulär in dem Teile der Ebene, welcher rechts von der stetigen Kurve*

$$\begin{cases} \sigma = 1 - \dfrac{1}{\log^a t} & \text{für} \quad t \geqq e^{2k}, \\ \sigma = 1 - \dfrac{1}{(2k)^a} & \text{für} \quad -e^{2k} \leqq t \leqq e^{2k}, \\ \sigma = 1 - \dfrac{1}{\log^a(-t)} & \text{für} \quad t \leqq -e^{2k} \end{cases}$$

liegt, inklusive der Kurve selbst, und $\Psi(s)$ genügt für

$$t \geqq e^{2k}, \quad 1 - \frac{1}{\log^a t} \leqq \sigma \leqq 2$$

der Ungleichung

$$|\Psi(\sigma + ti)| = |\Psi(\sigma - ti)| < \log^a t.$$

§ 13.

Wie in § 8 ergibt sich zunächst durch Vertauschung von Summation und Integration und Anwendung der Integralformel (78) bei geradlinigem Integrationsweg

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{2-x^2 i}^{2+x^2 i} \frac{x^s}{s^2} \Psi(s)\, ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{2-x^2 i}^{2+x^2 i} \frac{x^s}{s^2} \sum_{n=1} \frac{\mu(n)}{Nn^s}\, ds$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=1} \mu(n) \int_{2-x^2 i}^{2+x^2 i} \frac{\left(\frac{x}{Nn}\right)^s}{s^2}\, ds = \sum_{\substack{n=1 \\ Nn<x}} \mu(n) \log \frac{x}{Nn} + \sum_{n=1} \frac{\mu(n)\,\Theta}{Nn}$$

$$= \sum_{\substack{n=1 \\ Nn<x}} \mu(n) \log \frac{x}{Nn} + O(1). \tag{90}$$

Die Anwendung des Cauchyschen Satzes auf den Integranden $\frac{x^s}{s^2}\Psi(s)$ und den auf S. 176 angegebenen Integrationsweg ergibt nach Satz XX

$$(91)\qquad \int_{2-x^2 i}^{2+x^2 i} \frac{x^s}{s^2}\Psi(s)\,ds = \int_{AB} = \int_{AF} + \int_{FE} + \int_{ED} + \int_{DC} + \int_{CB}$$

Da $\Psi(s)$ nach Satz XX genau dieselbe Ungleichung erfüllt wie $K(s)$ nach Satz XIV, so folgt wörtlich wie in § 8

$$(92)\qquad \int_{AF} + \int_{FE} + \int_{ED} + \int_{DC} + \int_{CB} = O\left(xe^{-\sqrt[5]{\log x}}\right).$$

Aus (90), (91) und (92) ergibt sich

$$(93)\qquad \sum_{\substack{\mathfrak{n}\sim 1\\ N\mathfrak{n}\leq x}} \mu(\mathfrak{n}) \log \frac{x}{N\mathfrak{n}} = O\left(xe^{-\sqrt[5]{\log x}}\right).$$

Wird statt x hierin $(1+\delta)x$ geschrieben, wo

$$\delta = e^{-\frac{2}{3}\sqrt[5]{\log x}}$$

ist, und (93) von der so entstehenden Gleichung subtrahiert, so findet man

$$\log(1+\delta)\sum_{\substack{\mathfrak{n}\sim 1\\ N\mathfrak{n}\leq x}} \mu(\mathfrak{n}) + \sum_{\substack{\mathfrak{n}\sim 1\\ x< N\mathfrak{n}\leq (1+\delta)x}} \mu(\mathfrak{n}) \log \frac{(1+\delta)x}{N\mathfrak{n}} = O\left(xe^{-\sqrt[5]{\log x}}\right).$$

Hierin ist die zweite Summe dem absoluten Betrage nach

$$\leqq \log(1+\delta)\sum_{\substack{\mathfrak{n}\sim 1\\ x< N\mathfrak{n}\leq (1+\delta)x}} 1 \leqq \delta(H(1+\delta)x - H(x)) = O\left(xe^{-\frac{2}{3}\sqrt[5]{\log x}}\right)^{*});$$

also ist, wenn

$$\sum_{\substack{\mathfrak{n}\sim 1\\ N\mathfrak{n}< x}} \mu(\mathfrak{n}) = M(x)$$

gesetzt wird,

$$\log(1+\delta)\,M(x) = O\left(xe^{-\frac{2}{3}\sqrt[5]{\log x}}\right),$$

$$M(x) = \frac{1}{\log(1+\delta)}\,O\left(xe^{-\frac{2}{3}\sqrt[5]{\log x}}\right) = O\left(xe^{-\frac{2}{3}\sqrt[5]{\log x}}\right),$$

$$(94)\qquad M(x) = O\left(xe^{-\sqrt[6]{\log x}}\right).$$

Damit erhalte ich den

Satz XXI. *Für jedes reelle m ist*

$$\lim_{x=\infty} \frac{\log^m x}{x} \sum_{\substack{\mathfrak{n}\sim 1\\ N\mathfrak{n}< x}} \mu(\mathfrak{n}) = 0.$$

*) Vergl. S. 179.

§ 14.

Satz XXII. *Es sei $Q(x)$ die Anzahl der quadratfreien Ideale einer Klasse, deren Norm $\leqq x$ ist.*) Dann ist der Grenzwert*

$$\lim_{x=\infty} \frac{Q(x)}{x}$$

vorhanden und von Null verschieden, nämlich $= \frac{g}{\zeta_k(2)}$.

Dieser Wert ist von der Klasse unabhängig.

Beweis. Es ist bekanntlich, wenn $\mathfrak{m}$ alle Teiler des Ideals $\mathfrak{k}$ durchläuft,

$$\sum_{\mathfrak{m}|\mathfrak{k}} \mu(\mathfrak{m}) \begin{cases} = 1 & \text{für } \mathfrak{k} = \mathfrak{o}, \\ = 0 & \text{für } \mathfrak{k} \neq \mathfrak{o}. \end{cases}$$

Also ist

$$Q(x) = \sum_{\substack{\mathfrak{n}\sim\mathfrak{l} \\ N\mathfrak{n} \leqq x}} \sum_{\mathfrak{m}} \mu(\mathfrak{m}),$$

wo $\mathfrak{m}$ alle Ideale durchläuft, deren Quadrat in $\mathfrak{n}$ aufgeht. Daraus folgt

$$Q(x) = \sum_{N\mathfrak{m} \leqq \sqrt{x}} \mu(\mathfrak{m}) A(x, \mathfrak{m}), \tag{95}$$

wo $A(x, \mathfrak{m})$ die Anzahl aller Ideale der gegebenen Klasse ist, welche durch $\mathfrak{m}^2$ teilbar sind, und deren Norm $\leqq x$ ist. $A(x, \mathfrak{m})$ ist die Anzahl der Ideale einer — bei gegebenem $\mathfrak{m}$ festen**) — Klasse, deren Norm $\leqq \frac{x}{N\mathfrak{m}^2}$ ist. Nach Herrn Webers Relation (27) gibt es eine Konstante B, so daß für alle $x \geqq 1$ die Anzahl $A(x)$ der Ideale jeder Klasse, deren Norm $\leqq x$ ist, der Ungleichung

$$|A(x) - gx| < Bx^{1-\frac{1}{k}}$$

genügt. Daher ist für alle $x \geqq 1$ und alle $\mathfrak{m}$, deren Norm $\leqq \sqrt{x}$ ist,

$$A(x, \mathfrak{m}) - g\frac{x}{N\mathfrak{m}^2} < B\left(\frac{x}{N\mathfrak{m}^2}\right)^{1-\frac{1}{k}}. \tag{96}$$

Aus (95) und (96) folgt

$$\begin{aligned} Q(x) &= \sum_{N\mathfrak{m} \leqq \sqrt{x}} \mu(\mathfrak{m}) g \frac{x}{N\mathfrak{m}^2} + O\sum_{N\mathfrak{m} \leqq \sqrt{x}} \left(\frac{x}{N\mathfrak{m}^2}\right)^{1-\frac{1}{k}} \\ &= gx \sum_{N\mathfrak{m} \leqq \sqrt{x}} \frac{\mu(\mathfrak{m})}{N\mathfrak{m}^2} + O\left(x^{1-\frac{1}{k}} \sum_{N\mathfrak{m} \leqq \sqrt{x}} \frac{1}{N\mathfrak{m}^{2-\frac{2}{k}}}\right). \end{aligned} \tag{97}$$

*) Übrigens ist $Q(x) = \sum_{\substack{\mathfrak{n}\sim\mathfrak{l} \\ N\mathfrak{n} \leqq x}} \mu^2(\mathfrak{n})$.

**) Es ist die Klasse der Ideale $\mathfrak{h}$, für die $\mathfrak{m}^2\mathfrak{h} \sim \mathfrak{l}$ ist.

Hierin ist

$$\sum_{N\mathfrak{m}\leq\sqrt{x}}\frac{\mu(\mathfrak{m})}{N\mathfrak{m}^2}=\sum_{\mathfrak{m}}\frac{\mu(\mathfrak{m})}{N\mathfrak{m}^2}-\sum_{N\mathfrak{m}>\sqrt{x}}\frac{\mu(\mathfrak{m})}{N\mathfrak{m}^2}=\frac{1}{\zeta_x(2)}+O\sum_{N\mathfrak{m}>\sqrt{x}}\frac{1}{N\mathfrak{m}^2}$$

$$=\frac{1}{\zeta_x(2)}+O\sum_{n=\sqrt{x}+1}^{\infty}\frac{H(n)-H(n-1)}{n^2}$$

$$=\frac{1}{\zeta_x(2)}+O\sum_{n=\sqrt{x}}^{\infty}H(n)\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)+O\left(\frac{H(\sqrt{x})}{([\sqrt{x}]+1)^2}\right)$$

$$=\frac{1}{\zeta_x(2)}+O\sum_{n=\sqrt{x}}^{\infty}n\cdot\frac{1}{n^3}+O\left(\frac{\sqrt{x}}{x}\right)$$

$$=\frac{1}{\zeta_x(2)}+O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \tag{98}$$

und

$$\sum_{N\mathfrak{m}\leq\sqrt{x}}\frac{1}{N\mathfrak{m}^{2-\frac{2}{k}}}\begin{cases}=O(\sqrt{x}) & \text{für } k=1,\\ =O(\log x) & \text{für } k=2,\\ =O(1) & \text{für } k>2.\end{cases} \tag{99}$$

Aus (97), (98) und (99) folgt für jedes k

$$Q(x)=\frac{g}{\zeta_x(2)}x+O(\sqrt{x})+O\left(x^{1-\frac{1}{k}}\log x\right),$$

also

$$\lim_{x=\infty}\frac{Q(x)}{x}=\frac{g}{\zeta_x(2)},$$

wie im Satz XXII behauptet wurde.

Satz XXIII (erste Hälfte des Hauptsatzes 2). *Es ist*

$$\lim_{x=\infty}\frac{R(x)}{S(x)}=1,$$

wo $R(x)$ und $S(x)$ die auf S. 182 angegebene Bedeutung haben.

Beweis. Es ist

$$R(x)-S(x)=\sum_{\substack{\mathfrak{n}\sim\mathfrak{l}\\ N\mathfrak{n}\leq x}}\mu(\mathfrak{n})=M(x),$$

$$R(x)+S(x)=\sum_{\substack{\mathfrak{n}\sim\mathfrak{l}\\ N\mathfrak{n}<x}}\mu^2(\mathfrak{n})=Q(x),$$

$$R(x)=\frac{1}{2}(Q(x)+M(x)),$$

$$S(x)=\frac{1}{2}(Q(x)-M(x)),$$

$$\frac{R(x)}{S(x)} = \frac{Q(x) + M(x)}{Q(x) - M(x)} = \frac{\frac{Q(x)}{x} + \frac{M(x)}{x}}{\frac{Q(x)}{x} - \frac{M(x)}{x}}. \tag{100}$$

Nach Satz XXI ist (wenn dort $m = 0$ angenommen wird)

$$\lim_{x=\infty} \frac{M(x)}{x} = 0,$$

nach Satz XXII

$$\lim_{x=\infty} \frac{Q(x)}{x} \neq 0;$$

aus (100) folgt daher

$$\lim_{x=\infty} \frac{R(x)}{S(x)} = 1,$$

wie im Satz XXIII behauptet wurde.

Man sieht zugleich, daß die Anzahl der Ideale jeder Klasse, deren Norm $\leqq x$ ist und für welche $\mu(\mathfrak{n}) = 1$ (bezw. $\mu(\mathfrak{n}) = -1$) ist, asymptotisch gleich $\frac{g}{2\zeta_K(2)} x$ ist.

§ 15.

Es sei noch eine wichtige Folgerung aus dem Satz XXI angegeben.

Satz XXIV. *Wenn m und t zwei beliebige reelle Zahlen sind, ist die nach wachsendem $N\mathfrak{n}$ geordnete Reihe*

$$\sum' \frac{\mu(\mathfrak{n}) \log^m N\mathfrak{n}}{N\mathfrak{n}^{1+ti}}$$

konvergent.

Hierin liegt insbesondere (für $m = 0$, $t = 0$) enthalten, daß die Reihe

$$\sum' \frac{\mu(\mathfrak{n})}{N\mathfrak{n}}$$

konvergiert.

Beweis. Da die Summe der absoluten Beträge aller Glieder mit gleicher Norm x

$$\leqq \frac{\log^m x}{x} (H(x) - H(x-1)) = \frac{\log^m x}{x} \left(gh x + O\left(x^{1-\frac{1}{k}}\right) - gh(x-1) - O\left(x^{1-\frac{1}{k}}\right) \right)$$

$$= O\left(\frac{\log^m x}{x^{\frac{1}{k}}}\right)$$

ist, also für $x = \infty$ den Grenzwert 0 hat, braucht zum Nachweise des Satzes XXIV nur gezeigt zu werden, daß

$$\lim_{x=\infty} \sum_{\substack{\mathfrak{n} \\ N\mathfrak{n} < x}}' \frac{\mu(\mathfrak{n}) \log^m N\mathfrak{n}}{N\mathfrak{n}^{1+ti}} \tag{101}$$

existiert. Nun ist

$$\sum_{\substack{\mathfrak{n}-\mathfrak{l}\\ N\mathfrak{n}\leq x}}\frac{\mu(\mathfrak{n})\log^m N\mathfrak{n}}{N\mathfrak{n}^{1+ti}}=\sum_{n=1}^{x}\frac{\log^m n}{n^{1+ti}}\sum_{\substack{\mathfrak{n}-\mathfrak{l}\\ N\mathfrak{n}=n}}\mu(\mathfrak{n})=\sum_{n=1}^{x}\frac{\log^m n}{n^{1+ti}}\left(M(n)-M(n-1)\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{x}M(n)\left(\frac{\log^m n}{n^{1+ti}}-\frac{\log^m(n+1)}{(n+1)^{1+ti}}\right)+\frac{M(x)\log^m([x]+1)}{([x]+1)^{1+ti}}. \tag{102}$$

Nach Satz XXI ist für alle hinreichend großen n

$$|M(n)|<\frac{n}{\log^{m+2}n}; \tag{103}$$

daraus folgt zunächst

$$\lim_{x=\infty}\frac{M(x)\log^m([x]+1)}{([x]+1)^{1+ti}}=0. \tag{104}$$

Ferner ist wegen

$$\left|\frac{\log^m n}{n^{1+ti}}-\frac{\log^m(n+1)}{(n+1)^{1+ti}}\right|=\left|\int_n^{n+1}\frac{m\log^{m-1}u-(1+ti)\log^m u}{u^{2+ti}}\,du\right|$$

$$\leqq\int_n^{n+1}\frac{|m|\log^{m-1}u+(1+|t|)\log^m u}{u^2}\,du$$

für alle hinreichend großen n

$$\left|\frac{\log^m n}{n^{1+ti}}-\frac{\log^m(n+1)}{(n+1)^{1+ti}}\right|<(2+|t|)\frac{\log^m n}{n^2};$$

hieraus folgt in Verbindung mit (103) wegen der Konvergenz von

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{\log^{m+2}n}\frac{\log^m n}{n^2}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\log^2 n},$$

daß die unendliche Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}M(n)\left(\frac{\log^m n}{n^{1+ti}}-\frac{\log^m(n+1)}{(n+1)^{1+ti}}\right)$$

konvergiert, und dies ergibt mit Rücksicht auf (102) und (104) die Existenz des Grenzwertes (101), womit der Satz XXIV bewiesen ist.

§ 16.

Die entsprechenden Sätze über die Funktion $\lambda(\mathfrak{n})$ könnte man direkt auf analogem Wege beweisen, von den erzeugenden Funktionen

$$\frac{1}{L_\nu(s)}\prod_{\mathfrak{p}}\frac{1}{1-\frac{\chi_\nu(\mathfrak{p}^2)}{N\mathfrak{p}^{2s}}}=\prod_{\mathfrak{p}}\frac{1-\frac{\chi_\nu(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^s}}{1-\frac{\chi_\nu(\mathfrak{p}^2)}{N\mathfrak{p}^{2s}}}=\prod_{\mathfrak{p}}\frac{1}{1+\frac{\chi_\nu(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^s}}$$

$$=\prod_{\mathfrak{p}}\left(1-\frac{\chi_\nu(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^s}+\frac{\chi_\nu(\mathfrak{p}^2)}{N\mathfrak{p}^{2s}}-\cdots\right)=\sum_{\mathfrak{n}}\frac{\chi_\nu(\mathfrak{n})\lambda(\mathfrak{n})}{N\mathfrak{n}^s}$$

ausgehend. Jedoch lassen sie sich auch aus den analogen Sätzen über $\mu(\mathfrak{n})$ herleiten, was im Folgenden der Kürze wegen geschehen soll.

Satz XXV. *Es ist für jedes reelle* m

$$\lim_{x=\infty}\frac{\log^m x}{x}\sum_{\substack{\mathfrak{n}-\mathfrak{l}\\ N\mathfrak{n}\leq x}}\lambda(\mathfrak{n})=0.$$

Beweis. Für alle Ideale $\mathfrak{n}$, die sich von demselben quadratfreien Ideal $\mathfrak{k}$ um einen quadratischen Faktor unterscheiden ($\mathfrak{n}=\mathfrak{k}\mathfrak{m}^2$), ist

$$\lambda(\mathfrak{n})=\mu(\mathfrak{k}).$$

Daraus ergibt sich, wenn

$$\sum_{\substack{\mathfrak{n}-\mathfrak{l}\\ N\mathfrak{n}\leq x}}\lambda(\mathfrak{n})=L(x)$$

gesetzt wird, und $\mathfrak{h}$ die (von $\mathfrak{m}$ abhängige) Klasse repräsentiert, für welche $\mathfrak{h}\mathfrak{m}^2\sim\mathfrak{l}$ ist,

$$L(x)=\sum_{N\mathfrak{m}<\sqrt{x}}\sum_{\substack{\mathfrak{k}-\mathfrak{h}\\ N\mathfrak{k}\leq\frac{x}{N\mathfrak{m}^2}}}\mu(\mathfrak{k}).$$

Hierin ist die innere Summe die auf die Klasse von $\mathfrak{h}$ bezügliche Funktion M mit dem Argument $\frac{x}{N\mathfrak{m}^2}$. Nach (94) gibt es zwei Konstanten A, c, so daß für jede dieser h Funktionen (die den h Klassen entsprechen) und alle $x>1$

$$|M(x)|<Axe^{-c\sqrt{\log x}}$$

ist, also für $x>1$ und $N\mathfrak{m}\leqq\sqrt{x}$

$$\left|M\left(\frac{x}{N\mathfrak{m}^2}\right)\right|<A\frac{x}{N\mathfrak{m}^2}e^{-c\sqrt{\log\frac{x}{N\mathfrak{m}^2}}}.$$

Daher ist

$$|L(x) < Ax \sum_{Nm \leq \sqrt{x}} \frac{1}{Nm^2} e^{-\sqrt[6]{\log \frac{x}{Nm^2}}}$$

$$- O\left(x \sum_{Nm \leq e^{\sqrt[6]{\log x}}} \frac{1}{Nm^2} e^{-\sqrt[6]{\log x - 2\log Nm}}\right) + O\left(x \sum_{e^{\sqrt[6]{\log x}} < Nm \leq \sqrt{x}} \frac{1}{Nm^2} e^{-\sqrt[6]{\log \frac{x}{Nm^2}}}\right)$$

$$= O\left(x e^{-\sqrt[6]{\log x - 2\sqrt[6]{\log x}}} \sum_{Nm \leq e^{\sqrt[6]{\log x}}} \frac{1}{Nm^2}\right) + O\left(x \sum_{e^{\sqrt[6]{\log x}} < Nm \leq \sqrt{x}} \frac{1}{Nm^2} \cdot 1\right)$$

$$= O\left(x e^{-\sqrt[6]{\log x}} \sum_{m} \frac{1}{Nm^2}\right) + O\left(x \sum_{Nm > e^{\sqrt[6]{\log x}}} \frac{1}{Nm^2}\right)$$

$$= O\left(x e^{-\sqrt[6]{\log x}}\right) + O\left(\frac{x}{e^{\sqrt[6]{\log x}}}\right)$$

$$= O\left(x e^{-\sqrt[6]{\log x}}\right),$$

woraus der Satz XXV unmittelbar folgt.

Da nun für die Anzahl $A(x)$ aller Ideale einer Klasse, deren Norm $\leqq x$ ist,

$$\lim_{x=\infty} \frac{A(x)}{x} = g$$

existiert und > 0 ist, so folgt analog zur obigen Begründung des Satzes XXIII aus Satz XXV der

Satz XXVI (zweite Hälfte des Hauptsatzes 2). *Wenn $R_1(x)$ bezw. $S_1(x)$ die Anzahl der Ideale einer Klasse bezeichnet, welche das Produkt einer geraden bezw. ungeraden Anzahl von Primidealen sind, so ist*

$$\lim_{x=\infty} \frac{R_1(x)}{S_1(x)} = 1.$$

Endlich ergibt die Beweismethode des Satzes XXIV durch wörtliche Übertragung den

Satz XXVII. *Die unendliche, nach wachsenden Normen geordnete Reihe*

$$\sum_{n-1} \frac{\lambda(n) \log^m Nn}{Nn^{1+ti}}$$

konvergiert für jedes reelle Wertepaar m, t.

§ 17.

Im Vorangehenden war durchweg für die Klasseneinteilung der Ideale der engere Äquivalenzbegriff zugrunde gelegt: Zwei Ideale $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ heißen äquivalent, wenn es im Körper zwei ganze Zahlen α und β gibt, *deren Normen dasselbe Vorzeichen besitzen* und welche die Gleichung

$$\alpha\mathfrak{a} = \beta\mathfrak{b}$$

erfüllen. Kurz gesagt: Es ist $\mathfrak{a} \sim \mathfrak{b}$, wenn der Quotient $\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}$ eine (ganze oder gebrochene) Zahl des Körpers *mit positiver Norm* ist.

Es ist leicht, aus dem Vorigen die entsprechenden Sätze für den weiteren Äquivalenzbegriff herzuleiten, nach welchem $\mathfrak{a} \sim \mathfrak{b}$ ist, falls der Quotient $\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}$ überhaupt eine Zahl des Körpers (mit positiver oder negativer Norm) ist.

Bekanntlich besteht zwischen den Klassen beider Einteilungen folgender Zusammenhang.

1) Wenn der Körper Zahlen mit negativer Norm, aber keine Einheit mit negativer Norm enthält, zerfällt jede Klasse im weiteren Sinn in zwei Klassen im engeren Sinn.

2) Andernfalls stimmen die Klassen beider Einteilungen völlig überein.

Wenn also h' die Klassenzahl im weiteren Sinn bezeichnet, ist $h = 2h'$ bezw. $h = h'$. Der Hauptsatz 1 ergibt also, daß die Anzahl der Primideale, deren Norm $\leq x$ ist, in jeder Klasse (im weiteren Sinn) die Gleichung

$$\lim_{x=\infty} \frac{\log^m x}{x} \left(\varrho(x) - \frac{1}{h'} \operatorname{Li}(x)\right) = 0$$

erfüllt. Auch der Hauptsatz 2 bleibt wörtlich bestehen.

§ 18.

Beim Beweise beider Hauptsätze war nun über den Körper $\varkappa$ die (einzige) Voraussetzung gemacht worden, daß die über alle Primideale der Hauptklasse (im engeren Sinne) erstreckte Summe

$$\sum_{\mathfrak{p} \sim 0} \frac{1}{N\mathfrak{p}} \tag{105}$$

divergiert. *Was bedeutet diese Voraussetzung und für welche Körper ist sie erfüllt?*

Ich beginne damit, einige Fälle anzugeben, in welchen mit einfachsten Mitteln nachgewiesen werden kann, daß die Reihe (105) divergiert, also meine beiden Hauptsätze gelten.

1) $\varkappa$ habe die Klassenzahl 1; dann divergiert die Reihe (105), da $\mathfrak{p}$ in ihr alle Primideale zu durchlaufen hätte und bekanntlich die Summe der reziproken Normen aller Primideale eines algebraischen Zahlkörpers divergiert (weil sonst die Funktion

$$\zeta_\varkappa(s) = \prod_{\mathfrak{p}} \frac{1}{1 - \frac{1}{N\mathfrak{p}^s}}$$

bei Abnahme von s zu 1 nicht über alle Grenzen wachsen könnte). Doch ist hier der Hauptsatz 1 nicht neu, sondern ist in dem von mir im Jahre 1903 bewiesenen Primidealsatz*) enthalten. Ebenso ist der Hauptsatz 2 für $h = 1$ ein schon früher**) von mir bewiesenes Gesetz.

2) $\varkappa$ habe eine ungerade Klassenzahl > 1. Dann zeigt folgende Betrachtung die Divergenz der Reihe (105). Würde die Reihe konvergieren, so würde bei Annäherung von rechts

$$\lim_{s=1} \sum_{\mathfrak{p}} \frac{1}{N\mathfrak{p}^s}$$

existieren (und ihrem Summenwerte gleich sein); also würde auch

$$\lim_{s=1} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sum_{\mathfrak{p}^m} \frac{1}{N\mathfrak{p}^{ms}}$$

existieren, da die hinzugefügte Reihe

$$\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m} \sum_{\mathfrak{p}^m} \frac{1}{N\mathfrak{p}^{ms}}$$

sich für $s = 1$ dem endlichen Grenzwert

$$\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m} \sum_{\mathfrak{p}^m} \frac{1}{N\mathfrak{p}^m}$$

nähert. Aus der für $\Re(s) > 1$ gültigen Gleichung

$$L(s) = e^{h \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sum_{\mathfrak{p}^m} \frac{1}{N\mathfrak{p}^{ms}}} \tag{54}$$

würde also folgen, daß die Funktion

$$L(s) = L_1(s) \cdot L_2(s) \cdots L_h(s)$$

für $s = 1$ regulär ist. Da $L_1(s)$ in $s = 1$ einen Pol erster Ordnung hat, würde also genau eine der Funktionen

$$L_2(s),\ L_3(s),\ \cdots,\ L_h(s)$$

*) S. die erste der auf S. 145, Anm. 1 zitierten Arbeiten, S. 670.

**) S. die dritte jener Arbeiten, S. 563 und 568.

für $s = 1$ verschwinden, also genau eine der Zahlen

$$\sum_{n} \frac{\chi_\nu(n)}{N\mathfrak{n}} \quad (\nu = 2, 3, \cdots, h)$$

gleich Null sein.*) Wenn nun h ungerade ist, so gibt es außer dem Hauptcharakter ($\nu = 1$) keinen reellen Charakter; der zu $\chi_\nu(n)$ konjugierte Charakter $\chi_{\nu'}(n)$ ist also von $\chi_\nu(n)$ verschieden. Aus dem Verschwinden eines $L_\nu(1)$ würde also das Verschwinden eines anderen $L_{\nu'}(1)$ folgen, im Widerspruch mit dem Obigen.

3) $\varkappa$ sei ein beliebiger quadratischer Körper $\mathsf{P}(\sqrt{D})$, wo die ganze Zahl D positiv-nichtquadratisch oder negativ ist. Bekanntlich divergiert alsdann die Reihe (105); denn jede durch die Form $u^2 - Dv^2$ darstellbare Primzahl ist Norm eines oder zweier Hauptprimideale des Körpers, da sie in $(u + v\sqrt{D})(u - v\sqrt{D})$ zerlegbar ist, und Herr Weber**) hat — eine Lücke bei Dirichlet ausfüllend — bewiesen, daß die Form $u^2 - Dv^2$ unendlich viele Primzahlen darstellt und, was noch mehr besagt, daß die Summe der reziproken Werte der darstellbaren Primzahlen divergiert. Für jeden quadratischen Körper habe ich also die Hauptsätze 1 und 2 bewiesen.

4) Aus dem von Herrn Furtwängler***) gelieferten Nachweis der Existenz des Klassenkörpers eines beliebigen algebraischen Zahlkörpers $\varkappa$ ergibt sich allgemein die Divergenz der Reihe (105), wie mir Herr Furtwängler freundlichst mitgeteilt hat. Derselbe wird jenen Beweis demnächst veröffentlichen†); alsdann werden also meine beiden Hauptsätze 1 und 2 für jeden algebraischen Zahlkörper gelten.

Ich habe mit Absicht diese Mitteilung bis hierher verschoben, um meine analytischen Untersuchungen von der modernen Hilbert-Furtwänglerschen Theorie des Klassenkörpers deutlich zu trennen. Meine vorliegende Arbeit liefert bereits für quadratische Körper — wo die Heranziehung des Klassenkörpers unnötig ist — eine Verschärfung der weitestgehenden bisher bekannten Sätze über die Primzahlen in binären quadratischen Formen (positiver und negativer Diskriminante), wie später††) näher ausgeführt werden wird.

*) Bisher galt alles auch für gerades h; aus den Ungleichungen (55) folgt allgemein die Divergenz der Reihe (105) und umgekehrt.

**) „Beweis des Satzes, daß jede eigentlich primitive quadratische Form unendlich viele Primzahlen darzustellen fähig ist", Mathematische Annalen, Bd. 20, 1882, S. 301--329.

***) „Die Konstruktion des Klassenkörpers für beliebige algebraische Zahlkörper", Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse, 1904, S. 173—195.

†) Dies ist auf S. 37 seiner inzwischen in diesem Bande erschienenen Arbeit „Allgemeiner Existenzbeweis für den Klassenkörper eines beliebigen algebraischen Zahlkörpers" geschehen.

††) s. S. 202—203.

Dritter Teil.

§ 19

(Einleitung).

Die Tragweite der in den beiden ersten Teilen angewandten Methode ist noch größer, als bisher festgestellt wurde. Um nicht durch allzu große Allgemeinheit der Begriffe den Leser abzuschrecken, habe ich bisher nur von der Verteilung der Primideale auf die verschiedenen Idealklassen gesprochen. Nunmehr werde ich meiner Untersuchung diejenige allgemeinere Verteilung der Primideale in „Klassen" zugrunde legen, welche das Fundament der Weberschen, auf S. 148, Anm. 1 zitierten Abhandlung bildet. Ich werde zeigen, daß unter den von Herrn Weber gemachten Voraussetzungen nicht nur in jeder Klasse unendlich viele Primideale liegen — dies hat Herr Weber bereits festgestellt — sondern auch, daß die Anzahl $\varrho(x)$ der Primideale einer solchen Klasse asymptotisch gleich $\frac{1}{h}\,\mathrm{Li}(x)$ ist, wo h die Klassenzahl bezeichnet, und sogar, daß für jedes reelle m

$$\lim_{x=\infty} \frac{\log^m x}{x} \left(\varrho(x) - \frac{1}{h}\,\mathrm{Li}(x)\right) = 0$$

ist.

Es sei also ein beliebiger algebraischer Zahlkörper $\varkappa$ zugrunde gelegt; der Grad von $\varkappa$ heiße k.

In dem Körper $\varkappa$ werde eine Idealgruppe*) $\bar{O}$ und eine Zahlengruppe O' angenommen, welche folgende vier Voraussetzungen erfüllen:

1) *Die Gruppe $\bar{O}$ soll alle Primideale des Körpers $\varkappa$ enthalten mit etwaiger Ausnahme einer endlichen Anzahl, und sie soll jedes Primideal enthalten, welches Teiler eines in ihr vorkommenden ganzen Ideals ist.***)

Mit anderen Worten, die ganzen Ideale von $\bar{O}$ sind entweder alle ganzen Ideale des Körpers oder alle zu einer gegebenen endlichen Anzahl von Primidealen relativ primen ganzen Ideale des Körpers.

Es sei nun $\bar{E}$ die Gruppe der (funktionalen) Einheiten des Körpers $\varkappa$.

Es sei O' eine Zahlengruppe von der Art, daß $\bar{E}\,O'$ eine in $\bar{O}$ enthaltene Gruppe von Hauptidealen ist. Es werde angenommen:

---

*) Ich schließe mich jetzt möglichst an Herrn Webers Bezeichnungen an, verstehe also unter einer Idealgruppe ein System von (ganzen und gebrochenen) Idealen, welche sich durch Multiplikation und Division reproduzieren. In den beiden ersten Teilen dieser Arbeit habe ich durchweg — im Anschluß an Herrn Dedekinds Bezeichnungsweise — „Ideal" statt „ganzes Ideal" gesagt.

**) Den zweiten Teil dieser Voraussetzung spricht Herr Weber nicht aus, macht ihn jedoch stillschweigend, wie aus seinem Schluß auf S. 86, Z. 14—16 hervorgeht.

2) *Die Anzahl der Nebengruppen*) oder die Klassenzahl*

$$(\bar{O},\ \bar{E}\,O') = h$$

ist endlich (von Null verschieden).

Die nächste Voraussetzung lautet:

3) *Es sei* $\mathfrak{m}$ *ein ganzes Ideal in* $\bar{O}$ *und* T *oder* $T(x)$ *die Anzahl der in* $\bar{E}\,O'$ *enthaltenen, durch* $\mathfrak{m}$ *teilbaren ganzen Hauptideale, deren Norm nicht größer als die positive Zahl* x *ist. Dann soll*

$$T = \frac{gx}{N\mathfrak{m}} + Mx^{1-\frac{1}{k}} \tag{106}$$

sein, worin g *eine endliche, von Null verschiedene, positive Größe ist, die nur von der Natur der Gruppen* $\bar{O}$, O' *abhängt, aber von* x *und von dem besonderen Ideal* $\mathfrak{m}$ *unabhängig ist, während* M *eine Funktion von* x *ist, von der nur vorausgesetzt wird, daß sie mit unendlich wachsendem* x *nicht unendlich wird.*

Mit anderen Worten, es soll

$$T(x) = \frac{g}{N\mathfrak{m}}\,x + O\left(x^{1-\frac{1}{k}}\right)$$

sein, also speziell

$$\lim_{x=\infty} \frac{T(x)}{x} = \frac{g}{N\mathfrak{m}}.$$

4) *Die über alle Primideale von* $\bar{E}\,O'$ *erstreckte Summe*

$$\sum \frac{1}{N\mathfrak{p}} \tag{107}$$

divergiert.

Die Voraussetzungen 1), 2), 3) stimmen genau mit den Weberschen überein. Meine Voraussetzung 4) verlangt weniger als die Webersche**); die folgenden Entwicklungen gelten also a fortiori, wenn Herrn Webers Voraussetzungen vollständig erfüllt sind. Es ist ein glücklicher Umstand, daß meine Voraussetzung 4) ausreicht; denn bereits für den Fall, daß $\bar{O}$ gleich der Gruppe aller Ideale, O' gleich der Gruppe aller total positiven Zahlen des Körpers ist, ist durch Herrn Furtwängler zwar bewiesen, daß der Klassenkörper existiert und daß die Reihe (107) divergiert, aber noch nicht, daß der Klassenkörper die von Herrn Weber unter 4) geforderte Eigenschaft besitzt: Jedes Primideal ersten Grades der Hauptklasse von $\varkappa$ (mit etwaiger Ausnahme einer endlichen Anzahl) zerfällt

---

*) Diese „Nebengruppen" sind bekanntlich — bis auf eine — keine Gruppen, sondern Komplexe, welche ihrerseits als Elemente einer Abelschen Gruppe aufzufassen sind.

**) Herr Weber folgert die Divergenz von (107) aus seiner Voraussetzung 4).

in lauter Primideale ersten Grades; alle anderen Primideale von x enthalten im Klassenkörper höchstens eine endliche Anzahl von Primidealen ersten Grades.

Unter den obigen Voraussetzungen 1), 2), 3), 4) besteht nun, wie ich im § 20 zeigen will, der

Hauptsatz 3. *Die Anzahl $\varrho(x)$ der Primideale in jeder Klasse von $\bar{O}$ nach $\bar{E}O'$ ist*

$$= \frac{1}{h}\,\mathrm{Li}\,(x) + O\left(xe^{-\sqrt{\log x}}\right).$$

Speziell ist also

$$\lim_{x=\infty} \frac{\varrho(x)\log x}{x} = \frac{1}{h}$$

und für zwei beliebige Klassen

$$\lim_{x=\infty} \frac{\varrho_1(x)}{\varrho_2(x)} = 1.$$

Ebenso beweise ich in § 21 unter den Voraussetzungen 1) bis 4) den

Hauptsatz 4. *In jeder Klasse von $\bar{O}$ nach $\bar{E}O'$ gibt es asymptotisch ebensoviele quadratfreie ganze Ideale, die aus einer geraden Anzahl von Primidealen bestehen, als solche, die aus einer ungeraden Anzahl von Primidealen zusammengesetzt sind. Dasselbe gilt, wenn das Wort „quadratfreie" weggelassen wird.*

Die Hauptsätze 1 und 2 sind hierin als Spezialfälle enthalten, wenn man $\bar{O}$ gleich dem System aller Ideale, O' gleich dem System aller Zahlen des Körpers mit positiver Norm setzt. Denn dann ist 1) von selbst erfüllt, 2) nach dem Dedekindschen Satze von der Endlichkeit der Klassenzahl, 3) nach dem Weberschen Satze (26), und die Voraussetzung 4) hatte ich ausdrücklich im Wortlaut der Hauptsätze 1 und 2 gemacht.

Andererseits ist der Beweis der Hauptsätze 3 und 4 dem der Hauptsätze 1 und 2 ganz analog, so daß ich ihn sehr kurz darstellen kann, indem ich nur die zu modifizierenden Überlegungen genau angebe.

§ 20.

Es seien $\chi_1(\mathfrak{n}), \cdots, \chi_h(\mathfrak{n})$ die h Charaktere der Gruppe der h Klassen („Nebengruppen") von $\bar{O}$ nach $\bar{E}O'$; $\chi_1(\mathfrak{n})$ der Hauptcharakter. Für diejenigen ganzen Ideale, welche nicht in $\bar{O}$ vorkommen, setze ich

$$\chi_1(\mathfrak{n}) = 0,\ \chi_2(\mathfrak{n}) = 0, \cdots, \chi_h(\mathfrak{n}) = 0.$$

Dann gilt für zwei beliebige ganze Ideale des Körpers die Gleichung

$$\chi(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = \chi(\mathfrak{a})\chi(\mathfrak{b});$$

denn nach Voraussetzung 1) kommt $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ d[illegible] dann in $\bar{O}$ vor, wenn $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ in $\bar{O}$ vorkommen.

gilt also für $\Re(s)>1$ und $\nu=1,2,\dots,h$ die — auch von Herrn für $s>1$ angewandte — Identität

$$\sum_{\mathfrak{n}}\frac{\chi_\nu(\mathfrak{n})}{N\mathfrak{n}^s}=\prod_{\mathfrak{p}}\frac{1}{1-\frac{\chi_\nu(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^s}}.$$

links $\mathfrak{n}$ alle ganzen Ideale, rechts $\mathfrak{p}$ alle Primideale des Körpers $\bar{O}$ ist hläuft.

Wenn $\mathfrak{n}_1,\dots,\mathfrak{n}_h$ ein Repräsentantensystem der h Klassen von $\bar{O}$ ist ist für einen vom Hauptcharakter verschiedenen Charakter*)

$$\sum_{N\mathfrak{n}\le x}\chi(\mathfrak{n})=\chi(\mathfrak{n}_1)A_1(x)+\dots+\chi(\mathfrak{n}_h)A_h(x),$$

09) wo $A_1(x),\dots,A_h(x)$ für die einzelnen Klassen von $\bar{O}$ die Anzahlen ganzen Ideale bezeichnen, deren Norm $\le x$ ist. Wird eine Klasse trachtet, so ist, wenn das ganze Ideal $\mathfrak{a}$ ihr angehört und $\mathfrak{m}$ ein ganzes Ideal der inversen Klasse bezeichnet, $\mathfrak{m}\mathfrak{a}=\mathfrak{t}$ ein ganzes Haup der Gruppe $\bar{E}O'$, und umgekehrt liefert jedes ganze durch $\mathfrak{m}$ t Hauptideal $\mathfrak{m}\mathfrak{a}=\mathfrak{t}$ in $\bar{E}O'$ ein ganzes Ideal $\mathfrak{a}$ der gegebenen Daher ist für $\nu=1,2,\dots,h$

$$A_\nu(x)=T(N\mathfrak{m}\cdot x),$$

d. h. nach (106)

$$A_\nu(x)=gx+O\left(x^{1-\frac{1}{k}}\right);$$

also erhält man in Verbindung mit (109) und (39)

$$\sum_{N\mathfrak{n}\le x}\chi(\mathfrak{n})=O\left(x^{1-\frac{1}{k}}\right),$$

ferner

$$\sum_{N\mathfrak{n}\le x}\frac{|\chi(\mathfrak{n})|}{N\mathfrak{n}}\le\sum_{N\mathfrak{n}\le x}\frac{1}{N\mathfrak{n}}=O(\log x).$$

Daher gilt der Satz VII, und die für $\Re(s)>1-\frac{1}{k}$ durc

$$L_\nu(s)=\sum_{\mathfrak{n}}\frac{\chi_\nu(\mathfrak{n})}{N\mathfrak{n}^s}$$

(110)

definierten analytischen Funktionen erfüllen die Relatio

Was die für $\Re(s)>1$ durch (110) definierte Funk

so ist nach (108)

$$L_1(s)=\prod_{\mathfrak{p}}'\frac{1}{1-\frac{1}{N\mathfrak{p}^s}},$$

... (44) gleichlautend.

wo $\mathfrak{p}$ alle Primideale mit Ausnahme der etwa in $\bar{O}$ nicht vorkommenden durchläuft. Also ist, falls $\bar{O}$ gleich der Gruppe aller Ideale ist,

$$L_1(s) = \zeta_\varkappa(s),$$

falls dagegen $\bar{O}$ die Primideale $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \cdots, \mathfrak{p}_\varrho$ nicht enthält,

$$L_1(s) = \zeta_\varkappa(s) \prod_{\alpha=1}^{\varrho} \left(1 - \frac{1}{N\mathfrak{p}_\alpha^s}\right). \tag{111}$$

Die ganze transzendente Funktion

$$\prod_{\alpha=1}^{\varrho} \left(1 - \frac{1}{N\mathfrak{p}_\alpha^s}\right)$$

ist offenbar für $\Re(s) \geqq \frac{1}{2}$, also für $\Re(s) \geqq 1 - \frac{1}{2k}$ dem absoluten Betrage nach nicht oberhalb der endlichen Schranke

$$\prod_{\alpha=1}^{\varrho} \left(1 + \frac{1}{N\mathfrak{p}_\alpha^{\frac{1}{2}}}\right)$$

gelegen; ferner ist ihre Ableitung

$$\prod_{\alpha=1}^{\varrho} \left(1 - \frac{1}{N\mathfrak{p}_\alpha^s}\right) \cdot \sum_{\alpha=1}^{\varrho} \frac{\frac{\log N\mathfrak{p}_\alpha}{N\mathfrak{p}_\alpha^s}}{1 - \frac{1}{N\mathfrak{p}_\alpha^s}}$$

für $\Re(s) \geqq \frac{1}{2}$, also für $\Re(s) \geqq 1 - \frac{1}{2k}$ dem absoluten Betrage nach

$$\leqq \prod_{\alpha=1}^{\varrho} \left(1 + \frac{1}{N\mathfrak{p}_\alpha^{\frac{1}{2}}}\right) \cdot \sum_{\alpha=1}^{\varrho} \frac{\log N\mathfrak{p}_\alpha}{N\mathfrak{p}_\alpha^{\frac{1}{2}} - 1}.$$

Die Funktion $L_1(s)$ erfüllt also auch die Ungleichungen (51) und (52), so daß der Satz VIII wörtlich gilt.

Wird nun, wie in § 5, die analytische Funktion $L(s)$ durch die Gleichung

$$L(s) = \prod_{\nu=1}^{h} L_\nu(s)$$

definiert, so ist für $\Re(s) > 1$

$$L(s) = e^{\sum_{m=1}^{h} \frac{1}{m} \sum \frac{1}{N\mathfrak{p}^{ms}}},$$

wo in der inneren Summe $\mathfrak{p}$ die Primideale durchläuft, deren m^{te} Potenz der Hauptklasse von $\bar{O}$ von $\bar{E}O'$, d. h. der Gruppe $\bar{E}O'$ angehört. Wegen der Voraussetzung 4) wächst $L(s)$ bei Abnahme von s zu 1 über alle Grenzen, so daß die Ungleichungen (55) bestehen.

§ 6 bleibt ganz ungeändert, ebenso § 7; in § 7 hat hier $\mathfrak{k}$ ein Ideal zu bedeuten, welches die zur gegebenen Klasse von $\bar{O}$ nach $\bar{E}\,\bar{O}'$ inverse repräsentiert. Auch die §§ 8—10 bleiben vollkommen ungeändert, womit der Hauptsatz 3 bewiesen ist.

Ich will von demselben eine allgemeine Anwendung machen. $\chi(\mathfrak{n})$ bezeichne einen vom Hauptcharakter verschiedenen Charakter; es werde die Relation

$$\varrho(x) = \frac{1}{h}\,\mathrm{Li}\,(x) + O\left(xe^{-\sqrt[4]{\log x}}\right)$$

für alle h Klassen angesetzt, mit $\chi(\mathfrak{n}_\nu)$ multipliziert, und es werde alsdann die Summe jener h Relationen gebildet. Dies gibt

$$(112)\qquad \sum_{N\mathfrak{p}\leq x}\chi(\mathfrak{p}) = \frac{1}{h}\,\mathrm{Li}\,(x)\sum_{\nu=1}^{h}\chi(\mathfrak{n}_\nu) + O\left(xe^{-\sqrt[4]{\log x}}\right) = O\left(xe^{-\sqrt[4]{\log x}}\right).$$

Genau so, wie in § 15 aus (94) der Satz XXIV erschlossen wurde, ergibt sich aus (112) die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{\mathfrak{p}}\frac{\chi(\mathfrak{p})\log^m N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^{1+ti}}$$

für jedes reelle Wertepaar m, t. Hieraus folgt speziell für $m = 0$ die Konvergenz der unendlichen Reihe

$$\sum_{\mathfrak{p}}\frac{\chi(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^{1+ti}},$$

also des unendlichen Produktes

$$\prod_{\mathfrak{p}}\frac{1}{1-\dfrac{\chi(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^{1+ti}}}$$

und das Bestehen der bisher nur für $\Re(s) > 1$ bekannten Relation (108) auch für die Gerade $\Re(s) = 1$, falls ν einen der Werte $2, 3, \cdots, h$ hat.

Für den Hauptcharakter ist übrigens analog auf der Geraden $\Re(s) = 1$ (exkl. $s = 1$)

$$(113)\qquad L_1(s) = \prod_{\mathfrak{p}}\frac{1}{1-\dfrac{\chi_1(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^s}};$$

denn ich habe a. a. O.*) die Gleichung

$$(114)\qquad \zeta_\varkappa(1+ti) = \prod_{\mathfrak{p}}\frac{1}{1-\dfrac{1}{N\mathfrak{p}^{1+ti}}} \qquad (t\gtrless 0)$$

bewiesen, und aus (111), (114) folgt (113).

*) S. die auf S. 145, Anm. 2 zitierte Arbeit, S. 127.

§ 21.

Ebenso zeigt die wörtliche Wiederholung der Entwicklungen aus den §§ 12—13 die Richtigkeit des Satzes XXI in der vorliegenden allgemeineren Bedeutung. Der Satz XXII besagt hier auch, daß

$$\lim_{x=\infty} \frac{Q(x)}{x} > 0$$

ist; nur ist der Wert des Grenzwertes hier

$$\frac{g}{\zeta_x(2)} \cdot \frac{1}{\prod_{\alpha=1}^{\varrho}\left(1-\frac{1}{N\mathfrak{p}_\alpha^2}\right)}.$$

In der Tat gilt die beim Beweise auftretende Ungleichung (96) nur für solche $\mathfrak{m}$, die in $\bar{O}$ vorkommen; für die anderen $\mathfrak{m}$ ist

$$A(x, \mathfrak{m}) = 0.$$

An Stelle von (97) ergibt sich also hier

$$Q(x) = gx \sum_{N\mathfrak{m} \le \sqrt{x}}{}' \frac{\mu(\mathfrak{m})}{N\mathfrak{m}^2} + O\left(x^{1-\frac{1}{k}} \sum_{N\mathfrak{m} \le \sqrt{x}}{}' \frac{1}{N\mathfrak{m}^{2-\frac{2}{k}}}\right),$$

wo $\mathfrak{m}$ die ganzen Ideale von $\bar{O}$ durchläuft, also

$$Q(x) = gx \sum_{\mathfrak{m}}{}' \frac{\mu(\mathfrak{m})}{N\mathfrak{m}^2} + O(\sqrt{x}) + O\left(x^{1-\frac{1}{k}} \log x\right),$$

was wegen

$$\sum_{\mathfrak{m}}{}' \frac{\mu(\mathfrak{m})}{N\mathfrak{m}^2} = \prod_{\mathfrak{p}}{}'\left(1-\frac{1}{N\mathfrak{p}^2}\right) = \frac{1}{\zeta_x(2)} \cdot \frac{1}{\prod_{\alpha=1}^{\varrho}\left(1-\frac{1}{N\mathfrak{p}_\alpha^2}\right)}$$

den obigen Satz liefert.

Aus ihm folgt analog wie in § 14 die erste Hälfte des Hauptsatzes 4; § 15 bleibt ganz unverändert, und die Schlüsse des § 16 ergeben, wenn man sie auf die Identität

$$L(x) = \sum_{N\mathfrak{m} < \sqrt{x}}{}' \sum_{\mathfrak{l} \sim \mathfrak{h}} \mu(\mathfrak{l})$$
$$N\mathfrak{l} \le \frac{x}{N\mathfrak{m}^2}$$

anwendet, die zweite Hälfte des Hauptsatzes 4.

Vierter Teil.

§ 22.

Von dem Hauptsatz 3 will ich zum Schluß durch Spezialisierung auf quadratische Körper einige Anwendungen machen; dieselben knüpfen an

drei klassische Untersuchungen der analytischen Zahlentheorie an, in welchen Dirichlet den ersten Schritt getan hat.

a) Es sei eine eigentlich primitive binäre quadratische Form

$$au^2 + 2buv + cv^2$$

mit positiv-nichtquadratischer oder negativer Diskriminante $D = b^2 - ac$ gegeben; im Falle $D < 0$ sei die Form positiv. Herr Weber*) hat gezeigt, daß sich im Körper $\mathsf{P}(\sqrt{D})$ eine Idealgruppe $\bar{O}$ und eine Zahlengruppe O' angeben läßt, so daß einerseits die Voraussetzungen 1), 2), 3) erfüllt sind, und andererseits die durch die Form darstellbaren Primzahlen (von endlich vielen abgesehen) mit den Normen der Primideale ersten Grades in einer gewissen Klasse von $\bar{O}$ nach $\bar{E}O'$ übereinstimmen. Was meine Voraussetzung 4) betrifft, so folgt aus Herrn Webers auf S. 194, Anm. 2 zitierter Arbeit, daß sie erfüllt ist. Der Hauptsatz 3 gilt also und liefert: In jeder Klasse von $\bar{O}$ nach $\bar{E}O'$ ist die Anzahl der Primideale, deren Norm $\leqq x$ ist,

$$= \frac{1}{h}\operatorname{Li}(x) + O\left(xe^{-\sqrt[4]{\log x}}\right),$$

wo h gleichzeitig die Anzahl der Klassen eigentlich primitiver (positiver) Formen der Diskriminante D und die Anzahl der Klassen von $\bar{O}$ nach $\bar{E}O'$ darstellt. Also ist auch die Anzahl der Primideale ersten Grades unter ihnen

$$= \frac{1}{h}\operatorname{Li}(x) + O\left(xe^{-\sqrt[4]{\log x}}\right),$$

da die Anzahl der Primideale zweiten und höheren Grades, deren Norm $\leqq x$ ist, $= O\left(\frac{\sqrt{x}}{\log x}\right)$ ist. Je nachdem nun die betreffende Klasse von $\bar{O}$ (oder, was dasselbe bedeutet, die Klasse der zu $au^2 + 2buv + cv^2$ äquivalenten Formen) zweiseitig ist oder nicht, entsprechen jeder durch die Form darstellbaren Primzahl (mit Ausnahme endlich vieler) zwei Primideale der Klasse oder eines, deren Norm jene Primzahl ist. *Daher ist die Anzahl der durch die quadratische Form darstellbaren Primzahlen* $\leqq x$ *für eine zweiseitige Klasse*

$$= \frac{1}{2h}\operatorname{Li}(x) + O\left(xe^{-\sqrt[4]{\log x}}\right),$$

für jede andere Klasse

$$= \frac{1}{h}\operatorname{Li}(x) + O\left(xe^{-\sqrt[4]{\log x}}\right).$$

Bisher war nur bekannt, daß jene Anzahl, durch $\operatorname{Li}(x)$ dividiert, für

*) l. c., S. 94—95.

$x = \infty$ den Grenzwert $\frac{1}{2h}$ bezw. $\frac{1}{h}$ besitzt. Herr de la Vallée Poussin*) hatte dies unter Heranziehung schwieriger analytischer Hilfsmittel (welche an sich von hohem Interesse sind) bewiesen.

b) A. Meyer**) hat zuerst den von Dirichlet ohne vollständigen Beweis ausgesprochenen Satz nachgewiesen: „Jede eigentlich primitive (positive) binäre quadratische Form mit nichtquadratischer Diskriminante stellt unendlich viele Primzahlen dar, welche zugleich in einer gegebenen, mit den Charakteren des Geschlechtes jener quadratischen Form verträglichen primitiven Linearform enthalten sind." Er hat zugleich gezeigt, daß die Summe der reziproken Werte jener Primzahlen p divergiert, indem er die Gleichung bewies:

$$\sum_{p}^{\cdot} \frac{1}{p^s} = c \log \frac{1}{s-1} + G(s),$$

wo

$$\lim_{s=1} G(s)$$

existiert und c die positive Konstante bezeichnet:

$$c = \frac{2g}{eh\varphi(M)},$$

wo $e = 2$ für zweiseitige Klassen ist, sonst $e = 1$, ferner h die Klassenzahl eigentlich primitiver (positiver) Formen, g die Anzahl der Geschlechter, M die Differenz der arithmetischen Progression. Herr de la Vallée Poussin***) hat das Verdienst, die schärfere Relation

$$\lim_{x=\infty} \frac{\varrho(x)}{\mathrm{Li}(x)} = c$$

bewiesen zu haben, wo $\varrho(x)$ die Anzahl jener Primzahlen $\leqq x$ bezeichnet.

Andererseits hat Herr Weber†) gezeigt, daß jene Primzahlen (mit Ausnahme einer endlichen Anzahl) die Normen der Primideale ersten Grades einer Klasse eines $\bar{O}$ nach einem $\bar{E}O'$ sind, wo die Voraussetzungen 1), 2), 3) erfüllt sind. In Verbindung mit dem Meyerschen Satz ergibt sich die Divergenz der Reihe (107), also die Richtigkeit der Voraussetzung 4) und daher nach dem Hauptsatz 3 die Gleichung

$$\varrho(x) = c\,\mathrm{Li}(x) + O\left(xe^{-\sqrt{\log x}}\right).$$

---

*) l. c. „Troisième partie. Les nombres premiers représentables par une forme quadratique de déterminant négatif", S. 363—397; „Quatrième partie. Les nombres premiers représentables par une forme quadratique de déterminant positif", Bd. 21, Teil 2, 1897, S. 251—342.

**) „Über einen Satz von Dirichlet", Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 103, 1888, S. 98—117.

***) l. c. „Cinquième partie. Nombres premiers représentables simultanément par une forme linéaire et une forme quadratique", S. 343—368.

†) l. c., S. 95—96.

c) Dirichlet*) hat bewiesen, daß im Gaußschen Körper $\mathsf{P}(i)$ eine Linearform $\alpha\xi + \beta$ mit teilerfremden α, β unendlich viele komplexe Primzahlen, d. h. unendlich viele Primideale ersten Grades darstellt, und, was noch mehr besagt, daß die über jene komplexen Primzahlen q erstreckte Summe

$$\sum_q \frac{1}{Nq}$$

divergiert. Dirichlet hat nämlich die Relation bewiesen:

$$\sum_q \frac{1}{Nq^s} = \frac{4}{\varphi(\alpha)} \log \frac{1}{s-1} + G(s), \tag{115}$$

wo

$$\lim_{s=1} G(s)$$

existiert. Andererseits hat Herr Weber**) darauf aufmerksam gemacht, daß jene Primideale die Primideale ersten Grades einer Klasse von $\bar{O}$ nach $\bar{E}\,O'$ sind, wo $\bar{O}$ und O' gewisse Gruppen bezeichnen, welche die Voraussetzungen 1), 2), 3) erfüllen. Da nach (115) die Voraussetzung 4) auch gilt, ist der Hauptsatz 3 anwendbar und liefert:

Die Anzahl der komplexen Primzahlen $\alpha\xi + \beta$, deren Norm $\leqq x$ ist, ist

$$= \frac{4}{\varphi(\alpha)} \operatorname{Li}(x) + O\left(x e^{-\sqrt{\log x}}\right).$$

Berlin, den 5. März 1906.

*) „Untersuchungen über die Theorie der komplexen Zahlen", Abhandlungen der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1841, S. 141—161; Werke, Bd. 1, S. 509—532.

**) l. c., S. 96—97 und in seiner neueren ausführlichen Behandlung des vorliegenden Spezialfalles: „Über komplexe Primzahlen in Linearformen", Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 129, 1905, S. 35—62.

Zur Theorie allgemeiner Zetafunktionen. II.

Von

PAUL EPSTEIN in Straßburg i./E.

In einer kürzlich erschienenen Abhandlung hat Herr Herglotz*) das Problem der Inhaltsbestimmung einer von einer analytischen Kurve umschlossenen Fläche auf die Untersuchung einer Klasse von Funktionen

$$Z(s,n)=\sum_{a,b}\frac{(a+ib)^n}{(a^2+b^2)^{s+\frac{n}{2}}} \qquad (n=0,\ 4,\ 8,\ 12,\ \cdots)$$

zurückgeführt, die eine nahe Verwandtschaft mit der Riemannschen Funktion $\zeta(s)$ zeigen. Dies veranlaßt mich, in der vorliegenden Arbeit den Nachweis zu führen, daß diese Funktionen in sehr engem Zusammenhang mit denjenigen Funktionen stehen, die ich in meiner ersten Arbeit**) als *Zetafunktionen zweiter Ordnung* bezeichnet habe, so daß sämtliche von Herrn Herglotz gefundenen Eigenschaften der Funktionen $Z(s,n)$ direkt aus den Eigenschaften jener abgeleitet werden können. Es wird dabei eine Begriffsbestimmung der Funktionen $Z(s,n)$ mit Hilfe gewisser Differentialoperationen zugrunde gelegt, die sich — wie weiterhin gezeigt wird — in sehr allgemeiner Weise auf Zetafunktionen *beliebiger* Ordnung übertragen läßt.

§ 1.

Mit einer geringen Modifikation der in meiner ersten Arbeit gegebenen Definition soll unter einer *Zetafunktion p^{ter} Ordnung* mit der Charakteristik $\left|\begin{matrix} g_1 & g_2 & \cdots & g_p \\ h_1 & h_2 & \cdots & h_p \end{matrix}\right|$ zunächst die p-fache Reihe

$$(1)\qquad Z\left|\begin{matrix} g_1 & g_2 & \cdots & g_p \\ h_1 & h_2 & \cdots & h_p \end{matrix}\right|(s)_\varphi=\sum_{m_1}\cdots\sum_{m_p}\frac{e^{2\pi i\sum_\mu m_\mu h_\mu}}{\varphi((m+g))^s}$$

*) „Über die analytische Fortsetzung gewisser Dirichletscher Reihen". Math. Ann. Bd. 61, S. 551.

**) Math. Ann. Bd. 56, S. 615.

verstanden werden. Darin bedeutet

$$\varphi((x)) = \sum_{\mu=1}^{p} \sum_{\nu=1}^{p} a_{\mu\nu} x_\mu x_\nu$$

eine quadratische Form mit nicht verschwindender Determinante Δ, deren reeller Teil positiv ist; $g_1, g_2, \cdots, g_p$; $h_1, h_2, \cdots, h_p$ sind irgend welche reellen Zahlen, und die Summationsindizes durchlaufen alle ganzzahligen Werte von $-\infty$ bis $+\infty$; nur wenn alle Zahlen $g_1, \cdots, g_p$ *ganze* Zahlen sind, ist diejenige Kombination der Summationsbuchstaben wegzulassen, bei der der Nenner identisch verschwinden würde.

Die obige Reihe konvergiert, sobald der reelle Teil von s größer als 1 ist. Um die Zetafunktion für alle komplexen Werte von s zu definieren, benutzen wir die Integraldarstellung

$$\pi^{-\frac{ps}{2}} \Gamma\left(\frac{ps}{2}\right) Z \left|\begin{matrix} g \\ h \end{matrix}\right| (s)_\varphi = \int_0^\infty dz \cdot z^{\frac{ps}{2}-1} \vartheta \left|\begin{matrix} g \\ h \end{matrix}\right| (z)_\varphi,$$

worin $\vartheta \left|\begin{matrix} g \\ h \end{matrix}\right| (z)_\varphi$ die Thetareihe p^{ter} Ordnung

$$\vartheta \left|\begin{matrix} g \\ h \end{matrix}\right| (z)_\varphi = \sum_{m_1} \cdots \sum_{m_p} e^{-\pi z \varphi((g+m)) + 2\pi i \sum_\mu m_\mu h_\mu} \tag{2}$$

bedeutet. Für sie besteht die Transformationsformel*)

$$\vartheta \left|\begin{matrix} g \\ h \end{matrix}\right| (z)_\varphi = \frac{e^{-2\pi i \sum_\mu g_\mu h_\mu}}{z^{\frac{p}{2}} \sqrt{\Delta}} \vartheta \left|\begin{matrix} h \\ -g \end{matrix}\right| \left(\frac{1}{z}\right)_{\bar{\varphi}}, \tag{3}$$

wobei $\bar{\varphi}$ die zu φ *reziproke* Form ist. Mit Hilfe dieser Formel erhalten wir

$$\begin{aligned} \pi^{-\frac{ps}{2}} \Gamma\left(\frac{ps}{2}\right) Z \left|\begin{matrix} g \\ h \end{matrix}\right| (s)_\varphi &= \int_1^\infty dz \cdot z^{\frac{ps}{2}-1} \vartheta \left|\begin{matrix} g \\ h \end{matrix}\right| (z)_\varphi \\ &+ \frac{e^{-2\pi i \sum_\mu g_\mu h_\mu}}{\sqrt{\Delta}} \int_1^\infty dz \cdot z^{\frac{p(1-s)}{2}-1} \vartheta \left|\begin{matrix} h \\ -g \end{matrix}\right| (z)_{\bar{\varphi}} \end{aligned} \tag{4}$$

und dies definiert die Zetafunktion p^{ter} Ordnung für jeden Wert von s, sobald nicht gleichzeitig alle Zahlen g und h ganzzahlig sind.

Sind aber alle Zahlen g oder h ganzzahlig, so genügt es, sie alle gleich Null anzunehmen, und es bestehen dann die Formeln:

*) Wegen des Vorzeichens von $\sqrt{\Delta}$ vgl. Krazer, Lehrbuch der Thetafunktionen.

1) alle g gleich Null:

$$\pi^{-\frac{ps}{2}}\Gamma\left(\frac{ps}{2}\right)Z\left|\begin{matrix}0\\h\end{matrix}\right.(s)_\varphi = -\frac{2}{ps}+\int_1^\infty dz\cdot z^{\frac{ps}{2}-1}\left(\vartheta\left|\begin{matrix}0\\h\end{matrix}\right.(z)_\varphi - 1\right)$$
$$+\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\int_1^\infty dz\cdot z^{\frac{p(1-s)}{2}-1}\vartheta\left|\begin{matrix}h\\0\end{matrix}\right.(z)_{-\varphi};$$

2) alle h gleich Null:

$$\pi^{-\frac{ps}{2}}\Gamma\left(\frac{ps}{2}\right)Z\left|\begin{matrix}g\\0\end{matrix}\right.(s)_\varphi = \frac{2}{p\sqrt{\Delta}(s-1)}+\int_1^\infty dz\cdot z^{\frac{ps}{2}-1}\vartheta\left|\begin{matrix}g\\0\end{matrix}\right.(z)_\varphi$$
$$+\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\int_1^\infty dz\cdot z^{\frac{p(1-s)}{2}-1}\left(\vartheta\left|\begin{matrix}0\\g\end{matrix}\right.(z)_{-\varphi}-1\right);$$

3) alle Zahlen g und h gleich Null:

$$\pi^{-\frac{ps}{2}}\Gamma\left(\frac{ps}{2}\right)Z\left|\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\right.(s)_\varphi = \frac{2}{p\sqrt{\Delta}(s-1)}-\frac{2}{ps}+\int_1^\infty dz\cdot z^{\frac{ps}{2}-1}\left(\vartheta\left|\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\right.(z)_\varphi-1\right)$$
$$+\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\int_1^\infty dz\cdot z^{\frac{p(1-s)}{2}-1}\left(\vartheta\left|\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\right.(z)_{-\varphi}-1\right).$$

Aus diesen Formeln erkennt man den für alle Zetafunktionen geltenden *Fundamentalsatz:*

$$(5)\quad \pi^{-\frac{ps}{2}}\Gamma\left(\frac{ps}{2}\right)Z\left|\begin{matrix}g\\h\end{matrix}\right.(s)_\varphi = \frac{e^{-2\pi i\sum_\mu g_\mu h_\mu}}{\sqrt{\Delta}}\pi^{-\frac{p(1-s)}{2}}\Gamma\left(\frac{p(1-s)}{2}\right)Z\left|\begin{matrix}h\\-g\end{matrix}\right.(1-s)_{-\varphi}$$

Die Zetafunktionen haben folgende *allgemeinen Eigenschaften:*

1) Solange nicht alle Zahlen h ganze Zahlen sind, sind die Zetafunktionen ganze transzendente Funktionen von s.

2) Sind alle Zahlen h ganzzahlig, so wird die Zetafunktion nur für $s=1$ zur ersten Ordnung unstetig, und es ist

$$(6)\qquad Z\left|\begin{matrix}g\\h\end{matrix}\right.(s)_\varphi = \frac{2\pi^{\frac{p}{2}}}{p\sqrt{\Delta}\,\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}\frac{1}{s-1}+c_0+c_1(s-1)+\cdots.$$

3) Alle Zetafunktionen verschwinden in den Punkten

$$s=-\frac{2k}{p};\qquad (k=1,2,3,\cdots).$$

4) Für $s = 0$ verschwinden die Zetafunktionen jeder Charakteristik, außer wenn alle Zahlen g ganze Zahlen sind. In diesem Fall ist

$$Z\left|\begin{matrix} g \\ h \end{matrix}\right|(0) = -e^{-2\pi i \sum_\mu g_\mu h_\mu}.$$

Auf Grund der Bemerkung von Herrn Minkowski, die Herrn Herglotz zu seiner Arbeit veranlaßt hat, kann man schließen, daß

$$\lim_{s=1}(s-1)\, Z\left|\begin{matrix} 0 \cdots 0 \\ 0 \cdots 0 \end{matrix}\right|(s)_\varphi$$

das *Volumen des Ellipsoids* $\varphi(x) < 1$ darstellt, welches, wie bekannt, mit wichtigen Sätzen aus der Theorie der quadratischen Formen von p Variablen in engem Zusammenhang steht.*)

Es liegt nahe, nun auch Funktionen aufzusuchen, die der Riemannschen Funktion $\xi(t)$ entsprechen, jedoch ist der Fundamentalsatz (5) in der Form, wie er hier vorliegt, dazu nicht geeignet, denn zu beiden Seiten stehen zwei verschiedene Zetafunktionen. Definiert man aber neue Funktionen $\xi\left|\begin{matrix} g_1 \cdots g_p \\ h_1 \cdots h_p \end{matrix}\right|(s)_\varphi$ durch die Gleichung

$$(7)\quad \sqrt[4]{\Delta}\, e^{\pi i \sum g_\mu h_\mu} Z\left|\begin{matrix} g \\ h \end{matrix}\right|(s)_\varphi + \frac{1}{\sqrt[4]{\Delta}} e^{-\pi i \sum g_\mu h_\mu} Z\left|\begin{matrix} h \\ -g \end{matrix}\right|(s)_{\bar\varphi} = \frac{4}{p}\, \xi\left|\begin{matrix} g \\ h \end{matrix}\right|(s)_\varphi,$$

so ist zunächst

$$(8)\qquad \xi\left|\begin{matrix} g \\ h \end{matrix}\right|(s)_\varphi = \xi\left|\begin{matrix} h \\ -g \end{matrix}\right|(s)_{\bar\varphi}$$

und der Fundamentalsatz erhält eine Fassung, die ganz genau dem Satz über die Riemannsche ζ-Funktion entspricht, daß nämlich *das Produkt*

$$\pi^{-\frac{ps}{2}}\, \Gamma\left(\frac{ps}{2}\right) \zeta \begin{matrix} g \\ h \end{matrix}(s)_\varphi$$

bei der Vertauschung von s mit $1 - s$ ungeändert bleibt.

Zur Integraldarstellung dieser neuen Funktionen, die wir hier nicht im einzelnen ausführen wollen, wird man an Stelle der bisher benutzten Thetareihe ebenfalls eine modifizierte Funktion

$$(9)\quad \sqrt[4]{\Delta}\, e^{\pi i \sum g_\mu h_\mu} \vartheta \begin{matrix} g \\ h \end{matrix}(z)_\varphi + \frac{1}{\sqrt[4]{\Delta}} e^{-\pi i \sum g_\mu h_\mu} \vartheta \begin{matrix} h \\ -g \end{matrix}(z)_{\bar\varphi} = \frac{4}{p}\, \Theta\left|\begin{matrix} g \\ h \end{matrix}\right|(z)_\varphi$$

einführen; es ist dann

$$\Theta \begin{matrix} g \\ h \end{matrix}(z)_\varphi = \Theta\left|\begin{matrix} h \\ -g \end{matrix}\right|(z)_{\bar\varphi}$$

und die Transformationsformel lautet

$$\Theta \begin{matrix} g \\ h \end{matrix}(z)_\varphi = z^{-\frac{p}{2}}\, \Theta\left|\begin{matrix} g \\ h \end{matrix}\right|\left(\frac{1}{z}\right)_\varphi.$$

---

*) Vgl. Minkowski, Geometrie der Zahlen, S. 122 u. S. 198; Journal für Math. Bd. 129, S. 254 ff.

Setzen wir jetzt

$$s = \tfrac{1}{2} + ti,$$

so ist die Funktion

$$\frac{s(s-1)}{2}\pi^{-\frac{ps}{2}}\Gamma\left(\frac{ps}{2}\right)\zeta\begin{vmatrix} g \\ h \end{vmatrix}(s)_\varphi = \xi\begin{vmatrix} g \\ h \end{vmatrix}(t)_\varphi \tag{10}$$

eine *gerade* und *ganze transzendente Funktion* von t, für die man bei allgemeiner Charakteristik die Darstellung hat:

$$\xi\begin{vmatrix} g \\ h \end{vmatrix}(t)_\varphi = -\left(\tfrac{1}{4}+t^2\right)\int_1^\infty \Theta\begin{vmatrix} g \\ h \end{vmatrix}(x)_\varphi \cdot x^{\frac{p}{4}-1}\cos\left(\tfrac{pt}{2}\log x\right)dx.$$

Sind aber alle Zahlen g und h Null, so ist

$$\xi\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}(t)_\varphi = \tfrac{1}{4}\left(\sqrt[4]{\Delta}+\frac{1}{\sqrt[4]{\Delta}}\right) - \left(\tfrac{1}{4}+t^2\right)\int_1^\infty \left[\Theta\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}(x)_\varphi - \tfrac{p}{4}\left(\sqrt[4]{\Delta}+\frac{1}{\sqrt[4]{\Delta}}\right)\right]x^{\frac{p}{4}-1}\cos\left(\tfrac{pt}{2}\log x\right)dx.$$

Daneben besteht die für *jede* Charakteristik gültige Darstellung

$$\xi\begin{vmatrix} g \\ h \end{vmatrix}(t)_\varphi = \frac{4}{p^2}\int_1^\infty \frac{d}{dx}\left(x^{\frac{p}{2}+1}\Theta'\begin{vmatrix} g \\ h \end{vmatrix}(x)_\varphi\right)x^{-\frac{p}{4}}\cos\left(\tfrac{pt}{2}\log x\right)dx, \tag{11}$$

und so ist auch hier der genaueste Anschluß an die Riemannschen Entwicklungen gewonnen.

Alle ξ-Funktionen besitzen als Funktionen von t^2 die Höhe Null.

§ 2.

Der allgemeinen Zetafunktion *zweiter Ordnung* wird die quadratische Form

$$\varphi = ax^2 + 2bxy + cy^2 = a(x-\omega y)(x-\omega' y) \tag{1}$$

mit der Determinante

$$\Delta = ac - b^2$$

zugrunde gelegt. Dabei sind

$$\omega = -\frac{b}{a} + \frac{i\sqrt{\Delta}}{a}, \qquad \omega' = -\frac{b}{a} - \frac{i\sqrt{\Delta}}{a} \tag{2}$$

die Lösungen der quadratischen Gleichung $az^2 + 2bz + c = 0$.

Die Elemente der Charakteristik sehen wir als *veränderlich* an und bezeichnen sie mit $\begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ u_1 & u_2 \end{vmatrix}$, ferner schreiben wir zur Abkürzung

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = [mu]$$

und weiter

$$(m_1 + v_1) - \omega(m_2 + v_2) = [m + v] \tag{3}$$

und haben dann als allgemeine Zetafunktion zweiter Ordnung

$$Z \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ u_1 & u_2 \end{vmatrix} (s)_\varphi = \sum_{m_1} \sum_{m_2} \frac{e^{2\pi i [mu]}}{\varphi((m+v))^s}. \tag{4}$$

Eine besondere Eigenschaft dieser Funktionen, die für Zetafunktionen höherer Ordnung nicht allgemein zutrifft, besteht darin, daß sich die mit der *reziproken* Form $\bar{\varphi}$ gebildeten Funktionen auf Funktionen desselben Arguments s zur Form φ zurückführen lassen. Es ist nämlich

$$\varphi = \frac{1}{\Delta}(cx^2 - 2bxy + ay^2), \tag{5}$$

und man sieht leicht, daß

$$Z \begin{vmatrix} g_1 & g_2 \\ h_1 & h_2 \end{vmatrix} (s)_{\bar{\varphi}} = \Delta^s Z \begin{vmatrix} -g_2 & g_1 \\ -h_2 & h_1 \end{vmatrix} (s)_\varphi \tag{6}$$

ist. Aus diesem Grunde lautet der *Fundamentalsatz* für diese Funktionen:

$$\pi^{-s}\Gamma(s) Z \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ u_1 & u_2 \end{vmatrix} (s)_\varphi = \frac{e^{-2\pi i [uv]}}{\Delta^{s-\frac{1}{2}}} \pi^{-(1-s)}\Gamma(1-s) Z \begin{vmatrix} -u_2 & u_1 \\ v_2 & -v_1 \end{vmatrix} (1-s)_{\bar{\varphi}}. \tag{7}$$

Sei nun Φ irgend eine Funktion, die von der Form φ und den Variablenpaaren u_1, u_2 und v_1, v_2 abhängt; wir definieren dann zwei *Differentialoperationen:*

$$\begin{aligned} D\Phi &= \frac{\partial \Phi}{\partial u_1} - \omega \frac{\partial \Phi}{\partial u_2} + 2\pi i(v_1 - \omega v_2)\Phi, \\ D_1\Phi &= \omega \frac{\partial \Phi}{\partial v_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial v_2} \end{aligned} \tag{8}$$

und stellen zunächst fest, daß diese Operationen *vertauschbar* sind:

$$DD_1\Phi = D_1 D\Phi. \tag{9}$$

Wenden wir sie auf die Zetafunktion an, so ergibt sich:

$$DZ \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ u_1 & u_2 \end{vmatrix} (s)_\varphi = 2\pi i \sum \sum \frac{[m+v] e^{2\pi i [mu]}}{\varphi(m+v)^s} \tag{10}$$

und

$$D_1 Z \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ u_1 & u_2 \end{vmatrix} (s)_\varphi = -2si\sqrt{\Delta} \sum \sum \frac{[m+v] e^{2\pi i [mu]}}{\varphi(m+v)^{s+1}},$$

also

$$D_1 Z \left| \begin{matrix} v_1 & v_2 \\ u_1 & u_2 \end{matrix} \right| (s)_\varphi = - s \frac{\sqrt{\Delta}}{\pi} DZ \left| \begin{matrix} v_1 & v_2 \\ u_1 & u_2 \end{matrix} \right| (s+1)_\varphi. \tag{11}$$

Es lassen sich also die Operationen D und D_1 bei der Zetafunktion aufeinander zurückführen, und man braucht nur eine, z. B. die Operation D, beizubehalten. Die n-malige Wiederholung der Operationen liefert noch nach (11) die allgemeine Formel

$$\begin{aligned} &D_1^n Z \left| \begin{matrix} v_1 & v_2 \\ u_1 & u_2 \end{matrix} \right| (s)_\varphi \\ &= (-1)^n s(s+1)(s+2)\cdots(s+n-1) \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{\pi}\right)^n D^n Z \left| \begin{matrix} v_1 & v_2 \\ u_1 & u_2 \end{matrix} \right| (s+n)_\varphi. \end{aligned} \tag{12}$$

Man erhält nun unschwer

$$D^n Z \left| \begin{matrix} v_1 & v_2 \\ u_1 & u_2 \end{matrix} \right| (s)_\varphi = (2\pi i)^n \sum \sum \frac{[m+v]^n e^{2\pi i[mu]}}{\varphi(m+v)^s} \tag{13}$$

und wird so — wenn man noch $s + \frac{n}{2}$ an Stelle von s setzt — zu einer Reihe von Funktionen

$$Z \left| \begin{matrix} v_1 & v_2 \\ u_1 & u_2 \end{matrix} \right| (s, n)_\varphi = \sum \sum \frac{[m+v]^n e^{2\pi i[mu]}}{\varphi(m+v)^{s+\frac{n}{2}}}, \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \tag{14}$$

geführt, die wir als *abgeleitete Zetafunktionen* bezeichnen.

Unter diesen Funktionen sind die von Herrn Herglotz betrachteten als ganz spezielle Fälle enthalten; es liegt ihnen die Form $x^2 + y^2$ zugrunde und es sind nach Ausführung der Operation D^n alle Elemente der Charakteristik Null zu setzen.

Den Fundamentalsatz für die abgeleiteten Zetafunktionen findet man durch Anwendung der Operation D auf Gleichung (7). Dabei ist zu beachten, daß in den beiden dort auftretenden Zetafunktionen die Elemente der ersten und zweiten Reihe der Charakteristik vertauscht sind; dies hat zur Folge, daß eine Operation D auf der linken Seite eine Operation D_1 auf der rechten nach sich zieht. Man erhält so:

$$\pi^{-s}\Gamma(s) D^n Z \left| \begin{matrix} v_1 & v_2 \\ u_1 & u_2 \end{matrix} \right| (s)_\varphi = \frac{e^{-2\pi i[uv]}}{\Delta^{s-\frac{1}{2}}} \pi^{-(1-s)}\Gamma(1-s) D_1^n Z \left| \begin{matrix} -u_2 & u_1 \\ v_2 & -v_1 \end{matrix} \right| (1-s)_\varphi,$$

oder mit Benutzung von (12):

$$\begin{aligned} &\pi^{-s}\Gamma(s) D^n Z \left| \begin{matrix} v_1 & v_2 \\ u_1 & u_2 \end{matrix} \right| (s)_\varphi \\ &= \frac{e^{-2\pi i[uv]}}{\Delta^{s-\frac{1}{2}}} \pi^{-(1-s)}\Gamma(1+n-s) \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{\pi}\right)^n D^n Z \left| \begin{matrix} -u_2 & u_1 \\ v_2 & -v_1 \end{matrix} \right| (1+n-s)_\varphi. \end{aligned}$$

Setzt man jetzt $s - \frac{n}{2}$ an Stelle von s, so ergibt sich der *Fundamentalsatz der abgeleiteten Zetafunktionen:*

$$\pi^{-s}\Gamma\left(\frac{n}{2}-s\right) Z \begin{matrix} r_1 & r_2 \\ u_1 & u_2 \end{matrix} (s, n)_\varphi$$

$$(15) \quad = \frac{e^{-2\pi i(u_1 r_1 + u_2 r_2)}}{\Delta^{s-\frac{1}{2}}} \pi^{-1+s}\Gamma\left(\frac{n}{2}+1-s\right) Z \begin{matrix} -u_2 & u_1 \\ r_2 & -r_1 \end{matrix} \left(1-s, n\right)_\varphi.$$

Werden durch die Gleichung (14) die abgeleiteten Zetafunktionen nur innerhalb der Konvergenzgebiete der jeweiligen Doppelreihen dargestellt, so kann man aus der Definition mit Hilfe der D-Operation schließen, daß diese Funktionen über alle Werte von s fortsetzbar sind. Will man allgemein gültige Integraldarstellungen haben, so geht man von den entsprechenden Darstellungen der ursprünglichen Zetafunktionen zweiter Ordnung aus und wendet auf die dort auftretenden Thetareihen die Operationen D und D_1 an. Setzt man

$$(16) \quad \sum_{m_1} \sum_{m_2} [m+\tau]^n e^{-\pi z\varphi(m-v)+2\pi i[mu]} = \vartheta \begin{matrix} r_1 & r_2 \\ u_1 & u_2 \end{matrix} (z, n)_\varphi,$$

so ist

$$D^n \vartheta \begin{matrix} r_1 & r_2 \\ u_1 & u_2 \end{matrix} (z)_\varphi = (2\pi i)^n \vartheta \begin{matrix} r_1 & r_2 \\ u_1 & u_2 \end{matrix} (z, n)_\varphi$$

und es besteht die Transformationsgleichung

$$\vartheta \begin{matrix} r_1 & r_2 \\ u_1 & u_2 \end{matrix} (z, n)_\varphi = (-1)^n \frac{e^{-2\pi i[ur]}}{z^{n+1}(\sqrt{\Delta})^{n+1}} \vartheta \begin{matrix} -u_2 & u_1 \\ r_2 & -r_1 \end{matrix} \left(\frac{1}{z\Delta}, n\right)_\varphi.$$

Hiermit findet man leicht die überall gültige Integraldarstellung*)

$$\pi^{-s-\frac{n}{2}}\Gamma\left(s+\frac{n}{2}\right) Z \begin{matrix} r_1 & r_2 \\ u_1 & u_2 \end{matrix} (s, n)_\varphi = \int_1^\infty dz \cdot z^{s+\frac{n}{2}-1} \vartheta \begin{matrix} r_1 & r_2 \\ u_1 & u_2 \end{matrix} (z, n)_\varphi$$

$$+ \frac{(-1)^n e^{-2\pi i[ur]}}{(\sqrt{\Delta})^{n+1}} \int_1^\infty dz \cdot z^{\frac{n}{2}-s} \vartheta \begin{matrix} -u_2 & u_1 \\ r_2 & -r_1 \end{matrix} \left(\frac{z}{\Delta}, n\right)_\varphi,$$

aus der man nochmals den Fundamentalsatz (15) ablesen kann. Man erkennt hieraus auch, daß *alle abgeleiteten Zetafunktionen ganze transzendente Funktionen von* s sind, und es folgt dann weiter, daß die Funktion $Z \begin{matrix} r_1 & r_2 \\ u_1 & u_2 \end{matrix} (s, n)$ für $s = -\frac{n}{2}, -\left(\frac{n}{2}+1\right), -\left(\frac{n}{2}+2\right), \cdots$ verschwindet.

*) Man sieht ohne weiteres, daß man bei den speziellen von Herrn Herglotz betrachteten Funktionen mit *einfachen* Thetareihen ausreicht.

§ 3.

Will man die Entwicklungen des vorigen Paragraphen auf Zetafunktionen von beliebiger Ordnung ausdehnen, so wird man in folgender Weise vorgehen.

Es sei Φ irgend eine Funktion, die von zwei Reihen von je p Variablen $u_1, u_2, \cdots, u_p, v_1, v_2, \cdots, v_p$, sowie von den Koeffizienten einer quadratischen Form $\varphi(\!(x)\!) = \Sigma\Sigma a_{\mu\nu} x_\mu x_\nu$ abhängt. Es mögen dann zwei Differentialoperationen definiert werden:

$$(1)\quad \begin{aligned} D\Phi &= \xi_1 \frac{\partial \Phi}{\partial u_1} + \xi_2 \frac{\partial \Phi}{\partial u_2} + \cdots + \xi_p \frac{\partial \Phi}{\partial u_p} + 2\pi i(\xi_1 v_1 + \xi_2 v_2 + \cdots + \xi_p v_p)\Phi, \\ D_1\Phi &= x_1 \frac{\partial \Phi}{\partial v_1} + x_2 \frac{\partial \Phi}{\partial v_2} + \cdots + x_p \frac{\partial \Phi}{\partial v_p}, \end{aligned}$$

worin die Koeffizienten $\xi_1, \cdots, \xi_p, x_1, \cdots, x_p$ in noch näher zu bestimmender Weise von den $a_{\mu\nu}$ abhängen. Wir verlangen nun zunächst, daß die Operationen D und D_1 *vertauschbar* sein sollen, und finden leicht, daß dann die Koeffizienten die Bedingung

$$(2)\qquad \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \cdots + \xi_p x_p = 0$$

erfüllen müssen.

Wir wenden jetzt diese Operationen auf die allgemeine Zetafunktion

$$Z\left|\begin{matrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_p \\ u_1 & u_2 & \cdots & u_p \end{matrix}\right|(s)_\varphi = \sum_{m_1} \cdots \sum_{m_p} \frac{e^{2\pi i[mu]}}{\varphi(\!(m+v)\!)^{\frac{ps}{2}}}$$

an, wobei

$$[mu] = m_1 u_1 + m_2 u_2 + \cdots + m_p u_p$$

ist, und finden, wenn zur Abkürzung

$$(3)\qquad \xi_1(m_1 + v_1) + \xi_2(m_2 + v_2) + \cdots + \xi_p(m_p + v_p) = [m + v]$$

gesetzt wird:

$$(4)\qquad DZ\left|\begin{matrix} v \\ u \end{matrix}\right|(s)_\varphi = 2\pi i \sum \cdots \sum \frac{[m+v]\, e^{2\pi i[mu]}}{\varphi(\!(m+v)\!)^{\frac{ps}{2}}}.$$

Dagegen wird:

$$D_1 Z\left|\begin{matrix} v \\ u \end{matrix}\right|(s)_\varphi = -ps \sum \cdots \sum \frac{y_1(m_1+v_1) + \cdots + y_p(m_p+v_p)}{\varphi(\!(m+v)\!)^{\frac{ps}{2}+1}}\, e^{2\pi i[mu]},$$

und darin ist

$$y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ip}x_p.$$

Wir stellen nun die weitere Forderung auf, daß diese y_i den Zahlen ξ_i proportional sein sollen, d. h. es sollen die Bedingungsgleichungen

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p &= \mu\xi_1,\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p &= \mu\xi_2,\\
&\vdots\\
a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pp}x_p &= \mu\xi_p
\end{aligned}
\tag{5}
$$

erfüllt sein. *Dann gilt für die allgemeine Zetafunktion der Satz:*

$$
D_1 Z \left| \begin{matrix} v \\ u \end{matrix} \right| (s)_\varphi = -\frac{ps\mu}{2\pi i} DZ \left| \begin{matrix} v \\ u \end{matrix} \right| \left(s + \frac{2}{p}\right)_\varphi, \tag{6}
$$

so daß sich also die Operation D_1 auf die Operation D zurückführen läßt.

Sind

$$
\bar{a}_{ik} = \frac{1}{\Delta}\frac{\partial \Delta}{\partial a_{ik}}
$$

die Koeffizienten der zu φ *reziproken* Form φ, so ergibt die Auflösung des Gleichungssystems (5):

$$
\frac{1}{\mu} x_i = \bar{a}_{i1}\xi_1 + \bar{a}_{i2}\xi_2 + \cdots + \bar{a}_{ip}\xi_p, \quad (i = 1, 2, \cdots, p), \tag{7}
$$

und wenn man zu (5) und (7) die Bedingung (2) hinzunimmt, so sieht man, daß *durch Einsetzung der* $x_1, \cdots, x_p$ *die Form* φ, *dagegen durch Einsetzung der* $\xi_1, \cdots, \xi_p$ *ihre Reziproke zum Verschwinden gebracht wird*, also

$$
\varphi(\!(x)\!) = 0, \quad \varphi(\!(\xi)\!) = 0. \tag{8}
$$

Solche Systeme der x und ξ lassen sich allgemein in folgender Weise ermitteln. Es sei

$$
x_i = c_{i1}z_1 + c_{i2}z_2 + \cdots + c_{ip}z_p, \quad (i = 1, 2, \cdots, p) \tag{9}
$$

eine lineare Substitution, durch die die Form φ in eine *Summe von Quadraten* übergeführt wird, so daß also:

$$
\varphi(\!(x)\!) = z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_p^2 = f(\!(z)\!). \tag{10}
$$

Nun ist nach (5)

$$
\mu\xi_i = \frac{1}{2}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \frac{1}{2}\sum_k \frac{\partial f}{\partial z_k}\frac{\partial z_k}{\partial x_i};
$$

sind also $\bar{c}_{ik}$ die Elemente des zum System der (c_{ik}) *reziproken* Systems, so ist

$$
\mu\xi_i = \bar{c}_{1i}z_1 + \bar{c}_{2i}z_2 + \cdots + \bar{c}_{pi}z_p, \quad (i = 1, 2, \cdots, p). \tag{11}
$$

Die Gleichungssysteme (9) und (11) stellen lineare Substitutionen vor, durch die, *mit Erfüllung der Bedingung* (2), die Formen φ und $\bar{\varphi}$ simultan in eine Summe von Quadraten übergeführt werden. Nun verschwindet die Form $f(\!(z)\!)$ für solche Werte der $z_1, \cdots, z_p$, die durch eine *orthogonale* Substitution aus den p^{ten} *Einheitswurzeln* $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_p$ hervorgehen.

Sind also q_{ik} die Elemente einer orthogonalen Substitution, so hat man in (9) und (11)

$$z_i = q_{i1}\varepsilon_1 + q_{i2}\varepsilon_2 + \cdots + q_{ip}\varepsilon_p \tag{12}$$

zu nehmen, um Werte der x und ξ mit den gewünschten Eigenschaften zu erhalten. Zu jeder Form φ gehören also in völlig angebbarer Weise Systeme von $2p$ Zahlen $\begin{pmatrix} x_1, x_2, \cdots, x_p \\ \xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_p \end{pmatrix}$, die die Bedingungen (2) und (5) erfüllen, und wir können sagen: *Die Zahlen der ersten Reihe für eine Form φ sind Zahlen der zweiten Reihe für die reziproke Form $\overline{\varphi}$.* Die Größe μ bleibt unbestimmt, aber eine Vergleichung der Formeln (5) und (7) zeigt: Wählt man zu einer Form φ die Größe μ, so gehört zur reziproken Form die Größe $\frac{1}{\mu}$.

Wir definieren nun die *abgeleiteten Zetafunktionen*, indem wir

$$\frac{1}{(2\pi i)^n} D^n Z \left| \begin{matrix} v_1 \cdots v_p \\ u_1 \cdots u_p \end{matrix} \right| \left(s + \frac{n}{p}\right)_\varphi = Z \left| \begin{matrix} v_1 \cdots v_p \\ u_1 \cdots u_p \end{matrix} \right| (s, n)_\varphi, \tag{13}$$

$$(n = 1, 2, 3, \cdots)$$

setzen, und erhalten für sie unschwer die Reihendarstellung:

$$Z \left| \begin{matrix} v \\ u \end{matrix} \right| (s, n)_\varphi = \sum_{m_1} \cdots \sum_{m_p} \frac{[m+v]^n e^{2\pi i [mu]}}{\varphi(\!(m+v)\!)^{\frac{1}{2}(ps+n)}}. \tag{14}$$

Zur Ableitung des Fundamentalsatzes für diese Funktionen haben wir zunächst durch wiederholte Anwendung der Formel (6):

$$\begin{aligned} &D_1^n Z \left| \begin{matrix} v \\ u \end{matrix} \right| (s)_\varphi \\ &= \left(\frac{\mu i}{\pi}\right)^n \frac{ps}{2}\left(\frac{ps}{2}+1\right)\left(\frac{ps}{2}+2\right)\cdots\left(\frac{ps}{2}+n-1\right) D^n Z \left| \begin{matrix} v \\ u \end{matrix} \right| \left(s + \frac{2n}{p}\right)_\varphi. \end{aligned} \tag{15}$$

Übt man nun auf Formel (5) in § 1 wiederholt unsere Operationen aus, so ist nach den obigen Festsetzungen über die Zahlen x und ξ klar, daß eine Operation D auf der linken Seite eine Operation D_1 auf der rechten nach sich zieht; man erhält so mit Rücksicht auf (15):

$$\begin{aligned} &\pi^{-\frac{ps}{2}} \Gamma\left(\frac{ps}{2}\right) D^n Z \left| \begin{matrix} v \\ u \end{matrix} \right| (s)_\varphi \\ &= \left(\frac{i}{\mu}\right)^n \frac{e^{-2\pi i [uv]}}{\sqrt{\Delta}} \pi^{-p\frac{1-s}{2}-n} \Gamma\left(\frac{p(1-s)}{2}+n\right) D^n Z \left| \begin{matrix} u \\ -v \end{matrix} \right| \left(1 - s + \frac{2n}{p}\right)_{\overline{\varphi}}, \end{aligned}$$

und wenn man jetzt $s + \frac{n}{p}$ an Stelle von s einführt, so folgt der *Fundamentalsatz der abgeleiteten Zetafunktionen**):

*) Die unbestimmt gelassene Größe μ tritt hier, wie in (15), nur scheinbar auf.

$$\pi^{-\frac{ps}{2}}\,\Gamma\left(\frac{ps+n}{2}\right) Z\left|\begin{matrix} v \\ u \end{matrix}\right| (s,n)_\varphi$$

$$= \left(\frac{i}{\mu}\right)^n \frac{e^{-2\pi i[uv]}}{\sqrt{\Delta}}\,\pi^{-\frac{p(1-s)}{2}}\,\Gamma\left(\frac{p(1-s)+n}{2}\right) Z\left|\begin{matrix} u \\ -v \end{matrix}\right| (1-s,n)_{\bar\varphi}.$$

Diese Funktionen sind, wie man aus der leicht angebbaren Integraldarstellung ersieht, sämtlich ganze transzendente Funktionen von s, und die n^{te} abgeleitete Zetafunktion besitzt reelle Nullpunkte für

$$s = -\frac{2k+n}{p}, \quad (k = 0, 1, 2, \cdots).$$

Straßburg i. E., Februar 1906.

Über die Grundlagen der Mengenlehre und das Kontinuumproblem.

Von

Julius König in Budapest.

(Zweite Mitteilung.)

Die folgenden Zeilen schließen sich genau an die Entwicklungen an, die ich unter demselben Titel vor einigen Monaten (Math. Annalen, Bd. 61, S. 156—160) gegeben habe. Es wird jedoch die dort unter 3. gegebene Schlußweise*) hier gar nicht benützt. An ihre Stelle tritt, zur Erhärtung meiner unverändert gebliebenen Ansichten, eine neue Methode, die im wesentlichen auf einer Verschärfung und Verallgemeinerung des Begriffs „endlichdefiniert" beruht.

Diesen Auseinandersetzungen möchte ich eine prinzipielle Bemerkung vorausschicken. In den Grundlagen der Mengenlehre handelt es sich um die Formalisierung und Legalisierung von Tatsachen, die der inneren Anschauung unseres Bewußtseins entnommen sind, so daß unser „wissenschaftliches Denken" selbst Objekt des wissenschaftlichen Denkens ist. Dieser Zusammenhang der Mengenlehre mit Logik und Erkenntnistheorie ist unlösbar und tritt schon in den Elementen der Arithmetik zutage.

So nützlich auch in dieser Richtung die bisher nach mathematischen Analogieen erfolgte Algebraisierung der Logik ist, so kann uns diese allein über die vorhandenen Schwierigkeiten nicht weghelfen. Die „Tatsachen" und „Gesetze", die unserem wissenschaftlichen Denken zugrunde liegen, müssen genauer als bisher untersucht werden, und — vor allem — eine Disziplin geschaffen werden, die ich nach Analogien der „mathematischen Physik" eine Theorie der logischen Evidenz nennen würde.

Diese Richtung hoffe ich sehr bald in einer ausführlicheren Publikation weiter zu verfolgen.

*) Diese Schlußweise muß und kann im Sinne der hier gegebenen neuen Begriffsentwicklungen umgeformt werden.

1. Die endlich definierten Elemente des Kontinuums bilden eine abzählbare Menge, die man im Typus ω folgendermaßen schreiben kann:

$$\text{(I)}\qquad \begin{array}{l} (a_{11}, a_{12}, a_{13}, \cdots, a_{1k}, \cdots) \\ (a_{21}, a_{22}, a_{23}, \cdots, a_{2k}, \cdots) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (a_{k1}, a_{k2}, a_{k3}, \cdots, a_{kk}, \cdots) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}$$

Die a_{ik} sind hier beliebige positive ganze Zahlen, da wir das Kontinuum als die Menge der Dinge

$$(a_1, a_2, \cdots, a_k, \cdots)$$

definiert haben, wo a_k jede beliebige positive ganze Zahl sein kann. Mit Hilfe der Reihe (I) kann nun durch das dem Cantorschen Diagonalverfahren nachgebildete Gesetz

$$\text{(II)}\qquad a_k = a_{kk} + d$$

ein neues Kontinuumelement $(a_1, a_2, \cdots) = a^{(d)}$ definiert werden, wenn $d > 0$ eine fest gegebene positive ganze Zahl ist. Die Definition von $a^{(d)}$ ist aber nur dann widerspruchsfrei, wenn man voraussetzt, daß $a^{(d)}$ in der Reihe (I) nicht vorkommt, d. h. nicht endlich definiert ist. Würde $a^{(d)}$ (z. B. an der n-ten Stelle) in (I) vorkommen, so könnte (II) für $k = n$ nicht erfüllt werden, da $a_n = a_{nn}$ ist und zugleich $a_n = a_{nn} + d$ verlangt wird. Es scheint demnach, daß die Definition von $a^{(d)}$, die wir in einer endlichen Anzahl von Zeichen fixieren, in der Tat sich selbst widerspricht, also unmöglich ist. Andrerseits ist es uns aber ebenso unmöglich, die unmittelbar unsrer Anschauung entlehnte „Tatsache" als unrichtig abzulehnen, daß mit Hilfe jenes Diagonalverfahrens ein neues Kontinuumelement wirklich gebildet werden *kann*. Gerade dieses äußerst merkwürdige scheinbare Paradoxon führt aber zu einer fundamentalen Vertiefung der in der Mengenlehre anzuwendenden logischen Methoden. Der *Sinn* des Diagonalverfahrens ist klar und unanfechtbar, der Widerspruch entsteht nur durch die Forderung, diesen *Sinn* in der *Form* einer endlichen Definition auszudrücken. Die Erfüllung *dieser* Forderung ist unmöglich. Könnte man aber — ohne den Sinn zu ändern — die Form unserer Definition so umändern, daß sie *keine* endliche Definition ist, so hätten wir es mit einer wirklichen, widerspruchsfreien Definition des Kontinuumelementes $a^{(d)}$ zu tun. Wir müssen demnach, wie dies auch sonst häufig, eigentlich sogar bei jeder wesentlichen Verschärfung unsres wissenschaftlichen Denkens geschieht, unsere „Sprache" vervollkommen, und dies kann in der Tat folgendermaßen geschehen.

Zu den endlichen Definitionen ziehen wir gewisse „pseudoendliche" Definitionen heran, die aus (abzählbar) unendlich vielen Zeichen (Wörtern,

Buchstaben) bestehen sollen und zwar so, daß von einer gewissen, n-ten Stelle an (n eine endliche Ordnungszahl) nur ein gewisses Zeichen ($N.\ V.$)*) vorkommen soll. Um nun auch diesen Definitionen einen Sinn (Inhalt) zu geben, sagen wir: diese pseudoendliche Definition soll dem Sinne nach mit der endlichen Definition äquivalent sein, die aus der unendlichen entsteht, wenn sämtliche ($N.\ V.$) weggelassen werden, d. h. die aus den ersten n Zeichen gebildet ist. Die unendliche Zeichenfolge ist dann und nur dann eine logische Definition, wenn die entsprechende endliche Zeichenfolge, die wir auch als den *Hauptteil* der pseudoendlichen Definition bezeichnen wollen, dem Sinne (aber nicht notwendigerweise auch der Form) nach ohne Willkür und Widerspruch ein Kontinuumelement definiert.

Aus einer endlichen Definition können auf diesem Wege verschiedene pseudoendliche Definitionen entstehen, indem man das ($N.\ V.$) ω-mal, $\omega + 1$-mal, $\omega + 2$-mal, $\cdots$, im allgemeinen α-mal hinzusetzt, wo α eine beliebige Zahl der zweiten Zahlenklasse $Z(\aleph_0)$ ist.

2. Nach dem Vorstehenden gibt es Elemente des Kontinuums, die durch den endlichen Hauptteil ihrer Definition wohl vollständig bestimmt sind, deren Definition jedoch der Form nach nur dann widerspruchsfrei wird, wenn diesem endlichen Hauptteile (H) das Zeichen ($N.\ V.$) ω-mal hinzugefügt wird. Die Definition eines solchen Elementes wird durch das „*Bild*“ $H(N.\ V.)^{\omega}$ vollständig charakterisiert; doch muß dieses Bild von der Definition selbst streng unterschieden werden, da diese letztere, um auch formell widerspruchsfrei zu sein, unendlich viele Zeichen enthalten muß. Die Gesamtheit jener Elemente des Kontinuums, deren Definition durch ein solches Bild $H(N.\ V.)^{\omega}$ gegeben ist, muß — auch nach Heranziehung aller endlich definierten Elemente — eine abzählbare Menge bilden, da zwei verschiedenen Elementen gewiß auch verschiedene endliche Hauptteile entsprechen müssen und diese eine abzählbare Menge bilden.

Jene abzählbare Menge von Elementen der Kontinuums ist aber — auch mit den endlich definierten zusammen — durch ihre endlich definierten Hauptteile im Typus ω gegeben. Auf diese abzählbare Menge vom Typus ω, die ausführlich geschrieben

$$\text{(III)}\qquad \begin{array}{l} (b_{11},\ b_{12},\ b_{13},\ \cdots,\ b_{1k},\ \cdots) \\ (b_{21},\ b_{22},\ b_{23},\ \cdots,\ b_{2k},\ \cdots) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (b_{k1},\ b_{k2},\ b_{k3},\ \cdots,\ b_{kk},\ \cdots) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}$$

*) ($N.\ V.$) = ne varietur.

sei, kann nun wieder das Diagonalverfahren angewendet werden. Das Gesetz

$$b_k = b_{kk} + d$$

ist seiner Form nach, da es endlich ist, wieder keine widerspruchsfreie Definition für $(b_1, b_2, \cdots) = b^{(d)}$. Der Widerspruch verschwindet aber nun auch dann nicht, wenn (*N. V.*) ω-mal hinzugesetzt wird, da die Definition auch in dieser Form in (III) vorkommen muß, z. B. an der n-ten Stelle, so daß $b_n = b_{nn} + d$ nicht erfüllt werden kann. Wird aber (*N. V.*) $\omega + 1$-mal oder „öfters" hinzugesetzt, so erhalten wir eine widerspruchslose Definition. Verfährt man so weiter, so erhält man endliche Zeichenfolgen, die erst durch $\omega + 2, \omega + 3, \cdots$ malige Hinzufügung von (*N. V.*) eine widerspruchsfreie Definition geben.

Es sei nun α die kleinste Zahl der zweiten Zahlenklasse von der Beschaffenheit, daß die bestimmte endliche Zeichenfolge H (Hauptteil) eine widerspruchslose Definition wird, wenn (*N. V.*) α-mal hinzugetzt wird; wir sagen dann, daß H den *Rang* α besitzt. Die so entstandene pseudoendliche Definition wollen wir durch

$$H(N.\ V.)^{\alpha}$$

bezeichnen. Dies ist aber natürlich wieder nicht als die Definition selbst aufzufassen, denn diese muß ja unendlich viele Zeichen enthalten. Sie ist nur ein charakteristisches *Bild* jener Definition. Gehört zu einem α ein solches H, so nennen wir α *von der ersten Art*. Dies ist also der Fall, wenn

$$H(N.\ V.)^{\alpha}$$

das Bild einer widerspruchslosen pseudoendlichen Definition ist, aber für jedes α', das $< \alpha$ ist

$$H(N.\ V.)^{\alpha'}$$

noch einen formellen Widerspruch enthält.

3. Die bisherigen Auseinandersetzungen ergeben schließlich das Resultat, daß die zweite Zahlenklasse, wenn sie als Menge, d. h. als Gesamtheit durchwegs begrifflich gesonderter Elemente aufgefaßt werden könnte, auch abzählbar sein müßte. Wir beweisen nämlich, daß unter dieser Annahme einerseits die Zahlen erster Art abzählbar sind, und daß andererseits jede Zahl der zweiten Zahlenklasse von der ersten Art ist.

In der Tat: die Menge der endlichen Zeichenfolgen H ist abzählbar, also gilt dasselbe für die Menge der Zahlen erster Art, da der Definition nach verschiedenen α verschiedene H zugeordnet sind.

Wäre andererseits nicht jede Zahl der zweiten Zahlenklasse von der ersten Art, so gäbe es jedenfalls ein kleinstes (erstes) α_0, das ***nicht*** von der ersten Art ist, während ω, $\omega + 1$ usw. von der ersten Art sind

Das führt aber zu einem Widerspruch. Die endlichen Zeichenfolgen, die eine Zahl der zweiten Klasse als Rang besitzen, sind nämlich abzählbar, da das für die Menge aller endlichen Zeichenfolgen gilt. Sie können also folgendermaßen im ω-Typus geschrieben werden: $H_1, H_2, \cdots$ Sei $\alpha_1, \alpha_2, \cdots$ der entsprechende Rang. Die pseudoendlichen Definitionen

(IV) $$H_1(N.\ V.)^{\alpha_1},\quad H_2(N.\ V.)^{\alpha_2},\ \cdots$$

sollen nun die folgenden Kontinuumelemente definieren:

(IV′)
$$\begin{array}{c}(a_{11},\ a_{12},\ \cdots)\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ (a_{i1},\ a_{i2},\ \cdots)\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\end{array}$$

Das Diagonalgesetz

$$a_k = a_{kk} + d,$$

welches sich auf (IV′) beziehen soll, bezeichnen wir mit H_0. Nun enthält

$$H_0(N.\ V.)^{\alpha_0}$$

keinen Widerspruch, da nach unserer Annahme (IV) keine Definition der Form $H_0(N.\ V.)^{\alpha_0}$ enthält. Jedes α_i, das kleiner als α_0 ist, erscheint in der Reihe (IV); und die Definition $H_0(N.\ V.)^{\alpha_i}$ ergibt demnach einen Widerspruch. D. h. H_0 ist vom Range α_0; oder mit andern Worten die transfinite Ordnungszahl α_0 ist von der ersten Art. Die Annahme, daß die zweite Zahlenklasse auch Zahlen der zweiten Art enthält, hat somit einen Widerspruch ergeben.

Budapest, 2. Jänner 1906.

Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten.

Von

J. LÜROTH in Freiburg i./Br.

Die beiden Arbeiten über die gegenseitig eindeutige und stetige Abbildung von Mannigfaltigkeiten verschiedener Dimensionen aufeinander, die ich in den Jahrgängen 1878 und 1899 der Sitzungsberichte der Erlanger physikalisch-medizinischen Gesellschaft veröffentlichte, sind sehr kurz gehalten, und manche Beweise nicht gegeben. Ich zögerte immer mit einer ausführlicheren Darstellung, weil ich glaubte einen weiteren Spezialfall und damit vielleicht auch den allgemeinen Fall erledigen zu können. Trotz vieler Mühe, die ich mir in dieser Hinsicht gegeben habe, ist mir dies aber bis jetzt nicht geglückt. Deshalb gebe ich im folgenden eine Ausarbeitung der oben genannten Noten, die, im wesentlichen an sie anschließend, noch einige allgemeine Betrachtungen beifügt.

Der Grundgedanke ist der folgende.

Es seien zwei Mannigfaltigkeiten M_m und M_n von verschiedener Dimensionenzahl m und n in die Beziehung zueinander gesetzt, daß für $m = n + 1 + p$ die Koordinaten $y_1, y_2, \cdots, y_n$ eines Punktes der M_n eindeutige und stetige Funktionen der Koordinaten $t_0, t_1, \cdots, t_n, \xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_p$ eines Punktes der M_m sind (wenn $p = 0$ ist, fehlen hier und in den folgenden Formeln die $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_p$), indem etwa:

$$y_i = f_i(t_0, t_1, \cdots, t_n, \xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_p), \quad (i = 1, 2, 3, \cdots, n) \tag{1}$$

ist. Dabei möge der Punkt der M_m einem zusammenhängenden Gebiete Φ angehören, und der entsprechende Punkt der M_n einem Gebiete Ψ. Ist nun $(a_0, a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_p)$ ein Punkt aus Φ und a gehörig klein, so liegen die Punkte der M_m, welche den Gleichungen:

$$(2)\qquad \begin{gathered}(t_0 - a_0)^2 + (t_1 - a_1)^2 + \cdots + (t_n - a_n)^2 = a^2,\\ \xi_1 = b_1, \quad \xi_2 = b_2, \cdots, \xi_p = b_p\end{gathered}$$

genügen, alle in Φ und bilden eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit K_n. Die Bilder dieser Punkte sind durch die Formeln

$$(3)\qquad \begin{gathered}y_i = f_i(t_0, t_1, \cdots, t_n, b_1, b_2, \cdots, b_p),\\ (i = 1, 2, 3, \cdots, n)\end{gathered}$$

gegeben, in denen $t_0, t_1, \cdots, t_n$ nur durch die Gleichung:

$$(t_0 - a_0)^2 + (t_1 - a_1)^2 + \cdots + (t_n - a_n)^2 = a^2$$

miteinander verbunden sind. Die Gleichungen (3) definieren die y als eindeutige und stetige Funktionen eines Punktes der Mannigfaltigkeit K_n. Wenn es gelingt nachzuweisen, daß zwei *verschiedenen* Punkten der K_n das nämliche Wertsystem der y entspricht, so ist damit gezeigt, daß eine *gegenseitig eindeutige und stetige* Abbildung der M_m auf die M_n nicht möglich ist.

Im folgenden soll für $n = 1, 2, 3$ der Beweis geliefert werden. Für $n = 4$ ist er mir nicht gelungen, weil ich es nicht fertig brachte, im Raume von drei Dimensionen eine Kurve oder im Raume von vier Dimensionen eine Fläche zu konstruieren, die mit unendlich vielen Kurven verschlungen ist, wenigstens bei der hier anzunehmenden Allgemeinheit der Voraussetzungen.

§ 1.

Statt die y als Funktionen der t anzusehen, die durch die Gleichung (einer Kugel)

$$(1)\qquad (t_0 - a_0)^2 + (t_1 - a_1)^2 + \cdots + (t_n - a_n)^2 = a^2$$

miteinander verbunden sind, ist es bequemer sie als Funktionen von n unabhängigen Variabeln darzustellen.

Ich betrachte die beiden Punkte A und B, für die t_0 die Werte $a_0 + a$ bezw. $a_0 - a$ und $t_1, t_2, \cdots, t_n$ die Werte $a_1, \cdots, a_n$ haben. Ich kann voraussetzen, daß das Wertsystem, welches die y in A annehmen, von dem in B verschieden ist, weil ja sonst der zu beweisende Satz erfüllt wäre.

Ich projiziere nun vom Punkte B aus die Kugel (1) stereographisch auf die ebene Mannigfaltigkeit, welche die Kugel in A berührt, und deren Gleichung

$$t_0 = a_0 + a$$

ist. Wenn ich für einen Punkt dieser Mannigfaltigkeit die Werte der n Größen t gleich $s_1 + a_1, s_2 + a_2, \cdots, s_n + a_n$ setze, so finde ich die Beziehungen:

$$(2)\qquad \begin{aligned} t_0 - a_0 &= a\,\frac{4a^2 - s^2}{4a^2 + s^2}, \\ t_i - a_i &= a\,\frac{4as_i}{4a^2 + s^2}, \quad (i = 1, 2, \cdots, n), \end{aligned}$$

wo $s^2 = s_1^2 + s_2^2 + \cdots + s_n^2$ sein soll.

Umgekehrt wird, wenn die t die Gleichung (1) erfüllen,

$$(3)\qquad s_i = \frac{2a(t_i - a_i)}{t_0 - a_0 + a}, \quad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

Die n Funktionen y erscheinen nun als eindeutige und stetige Funktionen der unabhängigen Veränderlichen $s_1, \cdots, s_n$. Für

$$(s_1, \cdots, s_n) = (0, \cdots, 0)$$

folgt $t_0 = a_0 + a$, $t_i = a_i$, d. h. der Punkt A; für unendlich große s wird $t_0 = a_0 - a$, $t_i = a_i$, und ihnen entspricht der Punkt B.

§ 2.

Ich schicke nun einige allgemeine Erörterungen voraus, die für Mannigfaltigkeiten beliebiger Dimension gelten und im späteren wiederholt verwendet werden können.

Sind die Koordinaten eines Punktes der Mannigfaltigkeit $s_1, s_2, \cdots, s_n$, so nenne ich die Gesamtheit der Wertsysteme, welche eine Gleichung:

$$\sum_{i=1}^{n} (s_i - m_i)^2 - r^2 = 0$$

befriedigen, eine *Kugel;* der Punkt $(m_1, m_2, \cdots, m_n)$ sei ihr *Mittelpunkt*, r ihr *Radius*. Ist der Mittelpunkt durch einen Buchstaben P bezeichnet, so will ich die Kugel auch (P, r) nennen. Die Punkte, für die

$$\sum_{i=1}^{n} (s_i - m_i)^2 \gtrless r^2,$$

seien im *Äußeren*, bezw. im *Inneren* der Kugel gelegen. Sind (p) und (q) zwei Punkte P und Q, so heiße

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (p_i - q_i)^2}$$

der *Abstand* PQ.

Für jeden dritten Punkt R gilt dann, wie im gewöhnlichen Raume, die Ungleichung:

$$PQ + QR \geqq PR.$$

Von den Punkten, welche durch die Gleichungen:

$$s_i = p_i + \lambda v_i, \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

gegeben werden, wenn λ zwischen 0 und $+\infty$ variiert, möge gesagt werden, daß sie auf einem Strahle liegen, dessen Endpunkt der Punkt (p) ist.

Die Punkte der Kugel (1), die gleichzeitig dem Inneren einer mit dem Radius r um B gelegten Kugel angehören, genügen der Ungleichung

$$(t_0 - a_0 + a)^2 + \sum_{i=1}^{n} (t_i - a_i)^2 \leqq r^2.$$

In der Projektion entsprechen ihnen daher Punkte, deren Koordinaten die Ungleichung

$$\sum_{1}^{n} s_i^2 \geqq 4a^2 \left(\frac{4a^2}{r^2} - 1\right)$$

erfüllen, also außerhalb einer mit dem Radius $2a\sqrt{\frac{4a^2}{r^2} - 1}$ um den Punkt A geschlagenen Kugel liegen.

§ 3.

In einem endlichen Gebiete von beliebiger Dimensionszahl n sei eine unendliche Anzahl von zusammenhängenden Gebilden m^{ter} Dimension $(m < n)$ gegeben. Sie seien $\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \mathsf{A}_3, \cdots$ und ihre Gesamtheit (A) genannt. Wenn man auf unendlich vielen dieser Gebilde, nach beliebigem Gesetz, je einen Punkt P annimmt, so ist deren Zahl entweder endlich oder unendlich groß. Im ersten Falle ist unter den Punkten wenigstens einer P_0, durch den unendlich viele der Gebilde A hindurch gehen.

Im zweiten Falle gibt es mindestens einen Häufungspunkt der Punkte P, und wenn man diesen mit P_0 bezeichnet, liegen in jeder Kugel (P_0, r), wie klein r auch sein mag, unendlich viele der Punkte P. Oder mit anderen Worten: Es treten in diese Kugel unendlich viele der Gebilde A ein. In beiden Fällen kann ich also sagen: In jede Umgebung von P_0, sei sie auch noch so klein, treten unendlich viele der A ein. Die Punkte, deren Existenz hier bewiesen ist, will ich *Staupunkte* der Gebilde A nennen.*) Ihre Anzahl kann endlich oder unendlich sein. Ich setze hier das letztere voraus.

§ 4.

Es sei nun unter (A) die Menge der Staupunkte verstanden. *Sie ist abgeschlossen.* Denn ist A_0 ein Häufungspunkt dieser Menge, so liegen in einer Kugel $\left(A_0, \frac{a}{2}\right)$ stets Staupunkte, wie klein auch a sein mag.

*) Peano hat in dem Buche „Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale" (Torino 1887), pag. 302, schon solche Punkte betrachtet.

Es sei A_1 einer von ihnen. In eine Kugel $\left(A_1, \frac{a}{2}\right)$ treten dann unendlich viele der Gebilde A ein.

Auf einem von diesen sei P ein Punkt in $\left(A_1, \frac{a}{2}\right)$. Dann ist $A_0P \leqq A_0A_1 + A_1P \leqq a$. Also treten in die Kugel (A_0, a) unendlich viele der A ein, wie klein auch a sei. D. h. A_0 ist ein Staupunkt der A.*)

Legt man durch den beliebigen Punkt B der Menge (A) einen Strahl, dessen Endpunkt B ist, so ist entweder B der einzige auf dem Strahle liegende Staupunkt, oder es gibt noch andere. Ist deren Zahl endlich, so ist einer, C, am weitesten von B entfernt. Ist aber die Zahl unendlich, so gibt es entweder einen entferntesten Punkt C oder einen Häufungspunkt C, so daß alle auf dem Strahle liegenden Punkte von (A) zwischen B und C liegen. Da aber (A) abgeschlossen ist, ist im letzten Falle C selbst ein Punkt von (A). Wie im ersten Falle der von B ausgehende Strahl, so trägt in den anderen Fällen der von C ausgehende nur den einen Punkt C von (A), dessen *Träger* er heiße.

Die Kugel (B, r) bezw. (C, r) bei beliebig kleinem r wird dann von dem Strahle nur in einem Punkte D getroffen, und der gehört nicht zu (A).

Zwischen B bezw. C und D können noch unendlich viele der Gebilde A den Strahl schneiden, dagegen kann *der* Teil des Strahles, der sich von D ins Unendliche erstreckt, nur von einer endlichen Zahl der A geschnitten werden, und von diesem Teile des Strahles bleiben die A stets um Endliches entfernt, weil er sonst einen Staupunkt tragen müßte, gegen die Annahme. Ebenso können die Schnittfiguren der Kugel (B, r) bezw. (C, r) mit den Gebilden A dem Punkte D nicht unendlich nahe kommen, weil eben D kein Staupunkt ist.

Obige Betrachtungen kann man auch an eine von B aus ins Unendliche verlaufende *Kurve* anknüpfen, auf der ebenfalls ein *letzter* Staupunkt C liegen muß, so daß die Kurve zwischen C und dem Unendlichen keinen weiteren trägt.

§ 5.

Um den beliebigen Staupunkt B lege ich die Kugel (B, r) und suche eines der Gebilde A, welches in diese Kugel eintritt. Dann suche ich ein zweites, das vom ersten verschieden ist und in die Kugel $\left(B, \frac{r}{2}\right)$ eintritt, dann ein drittes, verschieden von den beiden gefundenen, das in $\left(B, \frac{r}{4}\right)$ eintritt usw. Diese Bestimmungen sind möglich, da in jede Kugel um B, sei sie auch noch so klein, immer noch unendlich viele der A eintreten. Aus der so bestimmten Reihe von Gebilden treten für jedes p *alle* Ge-

*) Vgl. Peano, Math. Ann., Bd. 37, S. 199, Prop. 8.

bilde vom p^{ten} an in $\left(B, \frac{r}{2^p}\right)$ ein. Die Gebilde dieser Teilreihe haben wieder Staupunkte (die zu (A) gehören), von denen B einer ist.

Ein anderer sei E. Ist s beliebig klein, so treten in (E, s) unendlich viele der Gebilde aus der konstruierten Teilreihe ein, die in der Ordnung, in der sie sich in der Teilreihe folgen, $\mathsf{A}_0, \mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \cdots$ seien.

Ist nun p so bestimmt, daß $\frac{r}{2^p} \leqq s$, so treten die Gebilde $\mathsf{A}_p, \mathsf{A}_{p+1}, \cdots$ alle, sowohl in (B, s), wie in (E, s) ein. Man kann also aus den Gebilden A eine Reihe herstellen, deren Glieder an einem gegebenen und einem nicht ganz willkürlich zu wählenden Punkte aus (A) unendlich nahe vorbeigehen.

§ 6.

In den Punkten des endlichen Gebietes, in dem sich die in den §§ 3 ff. angestellten Erwägungen abspielen, sei $f(P)$ eine stetige Funktion des Ortes P. Liegt P auf einem der Gebilde A, so sei $f(P) \leqq 0$. Wenn aber d eine beliebig kleine positive Größe ist, so möge es stets möglich sein, mindestens ein Gebilde A′ zu finden, das an einen beliebigen Staupunkt, so nahe als man will, herankommt, und dessen Punkte von solchen, in denen $f(P) \geqq 0$ ist, um weniger als d entfernt sind.

Wenn diese Bedingungen erfüllt sind, muß in allen Punkten aus (A) die Funktion $f = 0$ sein. Denn sei A_0 ein beliebiger Staupunkt und $f(A_0) \neq 0$. Es sei r der Radius einer Kugel, in deren Innerem, wo auch ihr Mittelpunkt liegen möge, die Schwankung der Funktion f kleiner als $\frac{1}{4}|f(A_0)|$ sei. Ich nehme $d < r$, bestimme das A′ so — was nach der Annahme möglich ist —, daß A′ in die Kugel (A_0, r) eintritt, und bezeichne mit B einen Punkt auf diesem A′ im Inneren von (A_0, r). Weil dann B von einem Punkte C, in dem $f(C) \geqq 0$ ist, weniger weit als d und somit als r entfernt ist, so ist:

$$f(B) \geqq f(C) - \tfrac{1}{4}|f(A_0)|,$$

also weil $f(B) < 0$

$$|f(B)| = -f(B) \leqq -f(C) + \tfrac{1}{4}|f(A_0)| \leqq \tfrac{1}{4}|f(A_0)|.$$

Andererseits ist

$$|f(A_0) - f(B)| \leqq \tfrac{1}{4}|f(A_0)|,$$

daher wäre

$$|f(A_0)| = |f(A_0) - f(B) + f(B)| \leqq \tfrac{1}{2}|f(A_0)|,$$

was aber nur möglich ist, wenn $f(A_0) = 0$ ist.

§ 7.

In einem endlichen Raume Ω sei eine unendliche Zahl von geschlossenen Kurven $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \cdots$ gegeben. Es sei z eine eindeutige stetige Funktion des Ortes P in Ω. In den Punkten des Gebietes Ω habe z den Minimalwert z_0. Es sei z der Wert dieser Funktion in P, a eine positive Zahl und $r = z - z_0 + a$ gesetzt.

Es sei ferner φ eine zweite stetige Funktion des Ortes P in Ω, die um 2π wächst oder abnimmt, wenn P eine der Kurven $\mathfrak{a}_i$ durchläuft. Ich bilde nun P in einen Punkte P' einer Ebene ab, indem ich dem Bildpunkte P' von P als Polarkoordinaten in bezug auf einen Pol O' die Werte r und φ gebe. Dann macht die Unbestimmtheit von φ in bezug auf die Lage von P' nichts aus. Jedem Punkte P entspricht so ein einziger Punkt P'.

Die Kurven $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \cdots$ mögen Staupunkte in unendlicher Zahl haben, deren Menge $\mathfrak{P}$ sei.

Es soll gezeigt werden, daß es stets mindestens einen Wert von z gibt, der zu zwei *verschiedenen* Punkten aus $\mathfrak{P}$ gehört. Gäbe es irgend zwei Punkte in $\mathfrak{P}$, die den nämlichen Bildpunkt hätten, so lieferten sie das nämliche z und der Beweis wäre nicht nötig. Ich kann also annehmen, daß zwei verschiedene Punkte aus $\mathfrak{P}$ verschiedene Bildpunkte haben. Der Punktmenge $\mathfrak{P}$ entspricht auf diese Art gegenseitig eindeutig eine Punktmenge $\mathfrak{Z}$ als Bild.

Ich kann die nämliche Abbildung auch auf die Kurven $\mathfrak{a}$ anwenden. Wenn ein Punkt eine dieser Kurven $\mathfrak{a}_i$ durchläuft, so bewegt sich sein Bild in einer Kurve $\mathfrak{b}_i$, die ganz außerhalb des Kreises (O', a) liegt. Ist Z der größte Wert von z im Gebiete Ω und $b > Z - z_0 + a$, so liegen die Kurven $\mathfrak{b}_i$ ganz im Kreise (O', b). Da φ von 0 bis 2π wächst, während P die $\mathfrak{a}_i$ durchläuft, so legt sich $\mathfrak{b}_i$ in den Ring zwischen (O', a) und (O', b) um den Punkt O' herum.

Hier braucht aber gegenseitige Eindeutigkeit der Abbildung nicht mehr vorhanden zu sein, vielmehr kann ein Punkt P' Bild von mehreren Punkten P sein.

Da jede von O' aus ins Unendliche laufende Linie alle die $\mathfrak{b}_i$ schneiden muß, so trägt jede solche Linie Staupunkte der $\mathfrak{b}_i$. Deren Menge, die $\mathfrak{Z}'$ sei, ist somit unendlich.

Ich zeige jetzt, daß die Mengen $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{Z}'$ identisch sind. Dazu brauche ich die Hilfssätze der folgenden Paragraphen.

§ 8.

In einem Raume von beliebig vielen Dimensionen sei P ein Punkt und $f(P)$ ein von ihm eindeutig abhängiger, der sich mit der Lage von

P stetig verändert. $\mathfrak{S}$ sei irgend eine unendliche Menge von Punkten. Durchläuft P die Menge $\mathfrak{S}$, so nimmt $f(P)$ entweder unendlich viele verschiedene Lagen an oder nur endlich viele. Im ersten Falle seien $P_1, P_2, \cdots$ unendlich viele Punkte, so daß die entsprechenden $f(P_1), f(P_2), \cdots$ alle verschieden sind. Ist dann P_0 eine Häufungsstelle der Menge $P_1, P_2, \cdots$, so ist, wie jetzt gezeigt werden soll, $f(P_0)$ eine Häufungsstelle der $f(P_1), f(P_2), \cdots$. Ich bezeichne mit Abst. (R, S) den Abstand der beiden Punkte R und S. Ich bestimme e zu einem angegebenen d, so daß, wenn Abst. $(P, P_0) < e$, dann Abst. $(f(P), f(P_0)) < d$ ist, was wegen der Stetigkeit der durch f angedeuteten Abhängigkeit möglich ist. Da P_0 Häufungsstelle ist, gibt es in der Reihe $P_1, P_2, \cdots$ unendlich viele Punkte $P_p, P_q, P_r, \cdots$, für welche die Ungleichungen:

$$\text{Abst. } (P_p, P_0) < e, \quad \text{Abst. } (P_q, P_0) < e, \cdots$$

gelten, und folglich auch die Ungleichungen

$$\text{Abst. } (f(P_p), f(P_0)) < d, \quad \text{Abst. } (f(P_q), f(P_0)) < d, \cdots$$

richtig sind. Also gibt es in der Kugel $(f(P_0), d)$ stets unendlich viele Punkte der Menge $f(P_1), f(P_2), \cdots$, und folglich ist $f(P_0)$ eine Häufungsstelle dieser Menge.

Gibt es aber nur eine endliche Zahl verschiedener Punkte $f(P)$, während P die Menge $\mathfrak{S}$ durchläuft, so sei A einer von ihnen. Dann muß es eine unendliche Menge Punkte in $\mathfrak{S}$ geben, etwa $P_1, P_2, \cdots$, so daß

$$f(P_1) = f(P_2) = \cdots = A$$

ist. Haben die Punkte $P_1, P_2, \cdots$ die Häufungsstelle P_0, so ist

$$\text{Abst. } (f(P_0), A) = \text{Abst. } (f(P_0), f(P_p)), \quad (p = 1, 2, 3, \cdots).$$

Da wegen der Stetigkeit der Abstand rechts durch passende Wahl von p unter jede Grenze gebracht werden kann, muß also

$$f(P_0) = A$$

sein.

Unter den gemachten Annahmen gibt es also entweder einen Punkt P_0, so daß $f(P_0)$ eine Häufungsstelle der Punkte $f(P)$ ist, oder es gibt unendlich viele Punkte von $\mathfrak{S}$, für die $f(P) = f(P_0)$ ist.

§ 9.

Ist Q_0 ein Häufungspunkt einer Punktmenge $\mathfrak{R}$, so nehme ich einen Punkt Q_1 der Menge beliebig an. In der Kugel um Q_0, die durch Q_1 geht, liegen dann noch unendlich viele Punkte aus $\mathfrak{R}$. Von diesen sei Q_2 einer, für den Abst. $(Q_0, Q_2) < \frac{1}{2}$ Abst. (Q_0, Q_1) ist. Dann betrachte ich die Kugel um Q_0, die durch Q_2 geht, und nehme in ihr einen Punkt Q_3

aus $\mathfrak{R}$, für den Abst. $(Q_0, Q_3) < \frac{1}{2}$ Abst. (Q_0, Q_2) ist usw. Auf diese Art wird aus $\mathfrak{R}$ eine unendliche Reihe von Punkten $Q_1, Q_2, Q_3, \cdots$ herausgenommen, die ich eine *Normalreihe* zu Q_0 nennen will. Eine solche kann nur *einen* Häufungspunkt haben.

Denn hätte sie zwei, Q_0, Q_0', so lege ich um beide Punkte Kugeln mit dem Radius $n = \frac{1}{4}$ Abst. (Q_0, Q_0'). Der erste Punkt der Normalreihe, der in (Q_0, n) liegt, sei Q_p. Dann ist für $q > p$ Abst. $(Q_0, Q_q) < n$ und

$$\text{Abst. } (Q_0', Q_q) \geqq \text{Abst. } (Q_0, Q_0') - \text{Abst. } (Q_0, Q_q) \geqq 3n,$$

so daß von Q_q an alle Punkte der Normalreihe außerhalb der Kugel $(Q_0', 3n)$ lägen, also Q_0' nicht Häufungspunkt sein könnte.

§ 10.

Es sei Q_0 ein Staupunkt der Kurven $\mathfrak{b}_i$. Ich nehme dann die Punkte $Q_1, Q_2, \cdots$ auf den Kurven $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \cdots$ an, auf jeder Kurve einen Punkt, so daß sie eine Normalreihe zu Q_0 bilden. Das ist möglich, selbst wenn in der Nähe von Q_0 alle Kurven $\mathfrak{b}_i$ zusammenfallen sollten, weil im Inneren eines kleinen um Q_0 gelegten Kreises jedenfalls von jeder dieser Kurven eine endliche Strecke liegen muß.

Die Werte von $r = z - z_0 + a$, von $z = r - a + z_0$ und von φ seien für den Punkt Q_p bezw. r_p, z_p, φ_p, dagegen für Q_0: r_0, z_0, φ_0. Da nach der Annahme die Punkte Q_i eine Normalreihe bilden mit dem einzigen Häufungspunkte Q_0, müssen nach dem Satze von § 8 r_0, z_0 und φ_0 die Häufungswerte der r_p, z_p und φ_p sein.

Die Punkte Q_i seien die Bilder von Punkten P_i. Dabei kann es sein, daß durch einen Punkt Q_i sein Original P_i nicht eindeutig bestimmt ist. In diesem Falle kann ich P_i aus den möglichen Punkten nach Belieben auswählen. Diese Punkte P_i liegen auf den Kurven $\mathfrak{a}_i$, auf jeder Kurve nur einer, und sind verschieden, weil ihre Bilder, die Q_i, es sind. Wenn ich die Werte von z und φ für den Punkt P_i mit $z(P_i)$ und $\varphi(P_i)$ bezeichne, so ist gemäß der Art, wie die Abbildung eingerichtet wurde,

$$z(P_i) = z_i; \quad \varphi(P_i) = \varphi_i.$$

Da die P_i alle verschieden sind, so ist für *einen* Häufungspunkt P_0 von ihnen

$$z(P_0) = z_0, \quad \varphi(P_0) = \varphi_0,$$

d. h. Q_0 ist das Bild von P_0. Folglich gehört Q_0, das zu $\mathfrak{Z}'$ gehört, auch zu der Menge $\mathfrak{Z}$, da ja P_0 zu $\mathfrak{Y}$ gehört.

Sei umgekehrt Q_0' ein Punkt von $\mathfrak{Z}$, also Bild eines Punktes P_0' aus

$\mathfrak{Y}$. Die Polarkoordinaten von Q_0' seien r_0', φ_0'. Sind dann r, φ die Koordinaten irgend eines anderen Punktes Q', so ist

$$\text{Abst.}\,(Q'Q_0') < \sqrt{(r-r_0')^2 + b^2(\varphi-\varphi_0')^2}.$$

Mache ich also

$$|r-r_0'| < \frac{d}{\sqrt{2}}, \quad |\varphi-\varphi_0'| < \frac{d}{b\sqrt{2}},$$

so wird

$$\text{Abst.}\,(Q'Q_0') < d.$$

Es sei (P_0', s) eine Kugel, in der die Schwankung von $z < \frac{d}{\sqrt{2}}$ und die von $\varphi < \frac{d}{b\sqrt{2}}$ ist. Tritt in diese Kugel eine Kurve $\mathfrak{a}_p$ ein, und ist P_p' ein Punkt auf $\mathfrak{a}_p$ im Inneren von (P_0', s), so ist für den Punkt P_p'

$$|z-z_0'| < \frac{d}{\sqrt{2}}; \quad |\varphi-\varphi_0'| < \frac{d}{b\sqrt{2}},$$

da im Punkte P_0' $z = z_0'$, $\varphi = \varphi_0'$ ist.

Ist Q_p' das Bild von P_p', so liegt Q_p' auf $\mathfrak{b}_p$, und für diesen Punkt ist:

$$|r-r_0' < \frac{d}{\sqrt{2}}; \quad \varphi-\varphi_0'| < \frac{d}{b\sqrt{2}},$$

so daß Abst. $(Q_p', Q_0') < d$ ist. Daher ist Q_0' so beschaffen, daß in den Kreis (Q_0', d) mit dem beliebig kleinen Radius d unendlich viele Kurven $\mathfrak{b}_p$ eintreten, also ist Q_0' Staupunkt dieser Kurven und gehört zur Menge $\mathfrak{Z}'$. Die Mengen $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{Z}'$ sind somit identisch.

Da die Resultate der letzten Paragraphen im Grunde nnr von der Stetigkeit der Funktionen z und φ des Ortes im Raume und des Ortes in der Ebene abhängen, so gelten sie auch für andere ähnlich beschaffene Abbildungen.

§ 11.

Es sei in einer Ebene eine unendliche abgeschlossene Punktmenge $\mathfrak{M}$ gegeben. Diese Menge möge folgende Eigenschaften haben:

1. Sei es möglich um einen Punkt O der Ebene einen Kreis von solchem Radius a zu legen, daß in (O, a) kein Punkt aus $\mathfrak{M}$ liege.

2. Treffe jede von O aus ins Unendliche laufende Kurve auf Punkte aus $\mathfrak{M}$.

3. Ein Kreis (O, b) umfasse alle Punkte von $\mathfrak{M}$. (Ich könnte dafür eine allgemeinere Bedingung nehmen.)

Ich lege in den Kreis (O, a) ein Quadrat von der Seitenlänge $\frac{a}{q}$ und suche von ihm ausgehend diejenigen mit den Seiten zusammenhängenden Quadrate, welche einen zusammenhängenden Flächenteil bilden und

weder in ihrem Inneren, noch auf der Grenze einen Punkt aus $\mathfrak{M}$ tragen. Damit die Grenzen dieser Fläche sich nicht schneiden, entferne ich von zwei Quadraten, die nur einen Eckpunkt gemein haben, während die vier anstoßenden Seiten zur Grenze gehören, eines, so lange, bis solche nicht mehr vorkommen. Die konstruierte Fläche kann sich nicht ins Unendliche erstrecken, weil nach der zweiten unserer Annahmen die Menge $\mathfrak{M}$ die Ebene in zwei getrennte Teile teilt. Sie kann mehrere Grenzkurven besitzen, von denen aber dann eine alle anderen einschließt.

Sei r der kleinste Wert, den q haben kann, so mache ich die Konstruktion mit $q = r, 2r, 4r, 8r, \cdots$ und erhalte so die Flächenstücke $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2, \mathfrak{H}_3, \cdots$. Die äußersten Grenzkurven dieser Stücke seien $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2, \mathfrak{h}_3, \cdots$. Ich könnte an eine Seite von $\mathfrak{h}_p$ noch ein Quadrat ansetzen, wenn in diesem kein Punkt aus $\mathfrak{M}$ läge. Damit also kein Quadrat angesetzt werden kann, müssen mindestens in der Entfernung der Diagonale eines Quadrates Punkte aus $\mathfrak{M}$ vorkommen. Wegen der Notwendigkeit, Quadrate zu entfernen wird die Grenze jedoch größer.

Sei $\mathfrak{Q}$ ein Quadrat, das zur konstruierten Fläche gehört, so lege ich um $\mathfrak{Q}$ die acht anstoßenden Quadrate herum, die eine Fläche $\mathfrak{Q}'$ bilden mögen, und um diese eine weitere Schicht von 16 Quadraten $\mathfrak{Q}''$. Wenn nun dieser Haufen von 25 Quadraten keinen Punkt aus $\mathfrak{M}$ enthält, so gehört er ganz der zuerst konstruierten Fläche an. Von ihm könnten aber nach den vorhin getroffenen Bestimmungen einzelne Quadrate fortgenommen werden müssen. Da die Seiten aller Quadrate parallel sind, so könnten das nur die vier in den Ecken von $\mathfrak{Q}''$ liegenden sein. Dagegen blieben sämtliche in $\mathfrak{Q}'$ unberührt, und somit läge das Quadrat $\mathfrak{Q}$ ganz im Inneren des Quadrathaufens, und keine seiner Seiten gehörte zu dessen Begrenzung. Somit muß höchstens in der Entfernung $\frac{6a}{2^p r}$ von einem Punkte der Grenze $\mathfrak{h}_p$ ein Punkt aus $\mathfrak{M}$ liegen.

Jeder Punkt von $\mathfrak{H}_1$ gehört zu $\mathfrak{H}_2$, jeder von $\mathfrak{H}_2$ zu $\mathfrak{H}_3, \cdots$, so daß von den Grenzkurven $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2, \mathfrak{h}_3, \cdots$ jede von allen folgenden umschlossen wird, soweit sie nicht mit ihr zusammenfällt.

Die Kurven $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2, \cdots$ haben eine unendliche, abgeschlossene Menge $\mathfrak{M}'$ von Staupunkten. Ist M ein solcher Staupunkt, so treten in den Kreis $\left(M, \frac{d}{2}\right)$ unendlich viele der Kurven $\mathfrak{h}$ ein, und zwar, wenn $\mathfrak{h}_p$ die erste ist, auch alle folgenden. Ist $s > p$ und $\frac{6a}{2^s r} < \frac{d}{2}$, so ist auf der Kurve $\mathfrak{h}_s$ im Inneren von $\left(M, \frac{d}{2}\right)$ ein Punkt N zu finden, von welchem ein Punkt L aus $\mathfrak{M}$ einen Abstand $< \frac{6a}{2^s r} < \frac{d}{2}$ hat. Daher ist der Ab-

stand ML sicher $< d$. In jeder Nähe von M liegen also Punkte von $\mathfrak{M}$, daher ist M ein Häufungspunkt von $\mathfrak{M}$ und, weil $\mathfrak{M}$ abgeschlossen ist, ein Punkt von $\mathfrak{M}$ selbst.

Also ist die Menge $\mathfrak{M}'$ ein Teil von $\mathfrak{M}$.

§ 12.

Nun sei in der Ebene eine stetige Funktion u des Ortes gegeben. Es soll gezeigt werden, daß es sicher zwei verschiedene Punkte aus $\mathfrak{M}$ gibt, in denen u den nämlichen Wert hat.

Seien A und B zwei der Staupunkte aus $\mathfrak{M}'$ und AC, BD ihre Träger (vergl. § 4), wobei C und D außerhalb des Kreises (O, b) gelegen seien.

Hätte u in A den nämlichen Wert, wie in B, so wäre es nicht nötig den Satz zu beweisen. Hat aber u in A den Wert u_1, in B den u_2 und ist $u_1 < u_2$, so sei

$$u_0 = \frac{1}{2}(u_1 + u_2), \quad g = \frac{1}{4}(u_2 - u_1).$$

Ich lege dann um A und B zwei Kreise mit so kleinem Radius t, daß in ihnen die Schwankung von u kleiner als g ist. Dann ist in (A, t) $u < u_0 - g$, in (B, t) $u > u_0 + g$. Die Strahlen AC und BD mögen nun (A, t) in E und (B, t) in F schneiden. Dann ist kein Punkt der Strecke EC und FD ein Punkt aus $\mathfrak{M}'$, und folglich kann nur eine endliche Zahl der Kurven $\mathfrak{h}$ diese Strecken schneiden. Diese lasse ich aus deren Reihe fort.

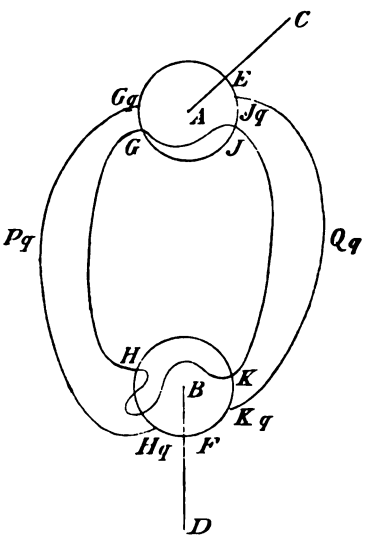


Fig. 1.

Die erste der übrigen Kurven $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2, \cdots$, welche in (A, t) und (B, t) eintritt, sei $\mathfrak{h}_p$. Von ihren Schnittpunkten mit diesen Kreisen seien GH und JK (Fig. 1) so gewählt, daß zwischen G und H einerseits, zwischen J und K andererseits kein Schnittpunkt von $\mathfrak{h}_p$ mit jenen beiden Kreisen liegt. Dabei werden nach der Annahme die Bogen GH und JK weder von AC noch von BD getroffen. Auch schneiden diese Bogen sich nicht.

Auf irgend einer anderen der Kurven $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{h}_q$, wo $q > p$, kann ich ebenso die Bogen G_qH_q und J_qK_q bestimmen, in derselben Weise wie GH, JK auf $\mathfrak{h}_p$. Dann gibt es auf G_qH_q einen Punkt P_q, in dem $u = u_0$ ist, und auf J_qK_q einen zweiten Q_q. Da die Kurven $\mathfrak{h}_q$ die $\mathfrak{h}_p$ einschließen, wird der Bogen G_qH_q in dem

Stück der Ebene liegen, das durch (O, b) und die Linie $CEGHFD$ begrenzt ist, und der Bogen $J_q K_q$ in dem durch $CEJKFD$ abgeschnittenen Stücke, und in diesen beiden Stücken liegen dann auch P_q und Q_q. Deren Häufungspunkte P_0 und Q_0 liefern, nach § 8, $u = u_0$. Sie können aber nicht identisch sein, weil sie sonst auf EC oder FD liegen müßten. Da aber P_0, Q_0 zu den Häufungspunkten $\mathfrak{M}'$ gehören, ist dies nicht möglich. Also wird der Wert u_0 in *zwei verschiedenen* Punkten der Menge $\mathfrak{M}$ angenommen.

Ebenso gut wie u_0 hätte ich eine andere zwischen u_1 und u_2 liegende Zahl nehmen und denselben Beweis mit kleinen Änderungen führen können. Ich kann also sagen: *Unter den im Anfange von § 11 aufgestellten Bedingungen werden unendlich viele Werte in mindestens je zwei verschiedenen Punkten der Menge $\mathfrak{M}$ angenommen.*

Wende ich dieses Resultat auf die Verhältnisse der §§ 7—10 an, so sind die Bedingungen des § 11 erfüllt, und folglich gibt es unendlich viele Werte, die z in mindestens je zwei verschiedenen Punkten aus $\mathfrak{Y}$ annimmt.

§ 13.

Ich mache jetzt eine Anwendung auf einen Raum von drei Dimensionen. In ihm sei eine unendliche abgeschlossene Punktmenge $\mathfrak{N}$ gegeben von folgenden Eigenschaften:

1. Es gibt eine Kugel (O, a), in der kein Punkt aus $\mathfrak{N}$ liegt.

2. Jede von O aus ins Unendliche laufende Kurve treffe stets auf Punkte aus $\mathfrak{N}$.

3. Alle Punkte aus $\mathfrak{N}$ seien in einer Kugel (O, b) enthalten (diese Bedingung ist in der Allgemeinheit eigentlich nicht nötig).

Ich lege in die Kugel (O, a) einen Würfel von der Kantenlänge $\frac{a}{q}$ und baue von ihm ausgehend mit kongruenten Würfeln einen zusammenhängenden Raum auf, indem ich so lange als möglich Würfel an Würfel ansetze und zwar stets so, daß sie mit einer Seitenfläche zusammenhängen. Wegen der Eigenschaft 2. muß dieser Aufbau einmal ein Ende haben. Diese zusammengebauten Würfel bilden einen Raum, der vielleicht Hohlräume einschließen kann, aber eine zusammenhängende äußere Oberfläche besitzt. Es könnte vorkommen, daß die Oberfläche sich selbst schneidet, indem zwei Würfel einer Ecke oder eine Kante gemein haben, während die sich in der Ecke oder Kante schneidenden Seitenflächen zur Begrenzung gehören. Um dies zu verhindern, entferne ich aus dem Würfelhaufen von solchen Würfeln so lange einen, bis derartige Vorkommnisse nicht mehr auftreten.

Wenn ich die Konstruktion für eine gewisse kleinste Zahl $q = r$ mache und dann für $q = 2r, 4r, 8r, \cdots$, so erhalte ich äußere Oberflächen $\mathfrak{G}_0, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \cdots$, die sich ganz einschließen, soweit sie nicht zusammenfallen. Da O ganz im Inneren aller Flächen $\mathfrak{G}$ liegt, trifft jede von O aus ins Unendliche gehende Linie alle diese Flächen und trägt also einen ihrer Staupunkte. Somit ist deren Zahl unendlich und nach § 4 abgeschlossen. Ihre Menge sei $\mathfrak{N}'$.

Jeder Punkt der Fläche $\mathfrak{G}$ hat in seiner Nähe Punkte aus $\mathfrak{N}$. Wenn es nicht nötig wäre, Würfel aus dem Haufen nachträglich zu entfernen, würden in der Entfernung $\frac{a}{2^s r}$ von einem Punkte der Fläche $\mathfrak{G}_s$ Punkte aus $\mathfrak{N}$ liegen müssen. Wegen jenes Umstandes aber muß ich eine Überlegung anstellen, die der von § 11 analog ist, nur daß Würfel an die Stelle von Quadraten treten, und daß aus dem Haufen von 5^3 Würfeln vielleicht alle die $5 \cdot 12 - 8 = 52$ zu entfernen wären, die an der Bildung der Kanten dieses Würfelhaufens beteiligt sind. Ich sehe daraus, daß höchstens in der Entfernung $\frac{9a}{2^s r}$ von einem Punkte von $\mathfrak{G}_s$ sich Punkte aus $\mathfrak{N}$ befinden müssen.

Damit kann ich nun, ähnlich wie in § 11, zeigen, daß die Menge $\mathfrak{N}'$ ein Teil von $\mathfrak{N}$ ist.

§ 14.

Im Raume seien jetzt zwei stetige Funktionen u und v des Ortes gegeben. Ich kann dann zeigen, daß es stets unendliche viele Wertsysteme (u_0, v_0) gibt, welche in zwei verschiedenen Punkten von $\mathfrak{N}$ angenommen werden.

Es sei A ein Punkt aus $\mathfrak{N}'$, dessen Träger AC sei, und BD der Träger des Punktes B aus $\mathfrak{N}'$, wobei C und D außerhalb (O, b) liegen mögen (ich nehme dieselben Bezeichnungen, wie in § 12, obgleich es sich dort um die Ebene, hier um den Raum handelt). Haben u und v die nämlichen Werte in A wie in B, so ist der Satz richtig. Ich kann also annehmen, daß etwa u in A den Wert u_1 und in B den davon verschiedenen Wert u_2 habe. Es sei dabei $u_2 > u_1$. Ich setze:

$$\frac{1}{2}(u_2 + u_1) = u_0, \quad \frac{1}{4}(u_2 - u_1) = g,$$

lege um A und B die Kugeln (A, t), (B, t) (Fig. 2) so klein, daß sie sich nicht schneiden und in ihnen u bezw. $< u_0 - g$ und $> u_0 + g$ ist. E und F seien die Schnittpunkte dieser Kugeln mit den Strahlen AC und BD.

Ich denke mir aus der Reihe der Flächen $\mathfrak{G}$ die fortgelassen — und deren Zahl ist endlich —, welche EC und FD schne[illegible]

Die erste von den übrigbleibenden, die in (A, t) und (B, t) eindringt, sei die $\mathfrak{G}_p$. Dann dringt jede andere $\mathfrak{G}_q$ auch ein, wenn $q > p$ ist. Sei nun der Punkt M in der Kugel (A, t) und N in (B, t) so gewählt, daß sie im Inneren von $\mathfrak{G}_p$ liegen, so sind sie auch im Inneren von $\mathfrak{G}_q$. Verbinde ich sie im Inneren von $\mathfrak{G}_p$ durch ein Kurvenstück, und die Punkte C und D durch ein Kurvenstück im Äußeren von (O, b) und füge die Strecken AM und BN bei, so erhalte ich eine Kurve $\mathfrak{k}$, bestehend aus dem letzt erwähnten Stück, der Linie CA, AM, dem Kurvenstück MN, den Strecken NB, BD. Diese Kurve trifft jede $\mathfrak{G}_r$ nur dort, wo die MA und NB sie schneiden, also jedesmal ungerade*) und im Inneren von (A, t) bezw. (B, t).

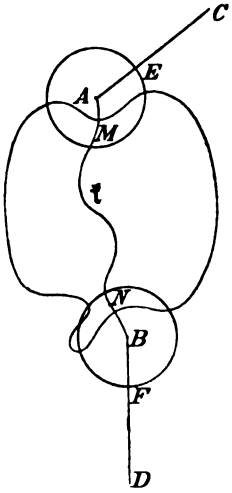


Fig. 2.

§ 15.

Die geschlossene Fläche $\mathfrak{G}_r$, $r \geqq p$, trifft (A, t) in einer oder mehreren geschlossenen Kurven. Da aber das von diesen begrenzte Stück von $\mathfrak{G}_r$ durch $\mathfrak{k}$ ungerade geschnitten wird, muß eine von ihnen mit $\mathfrak{k}$ verschlungen sein. In ihren Punkten ist $u < u_0 - g$. An sie setze ich nun Quadrat an Quadrat der Fläche $\mathfrak{G}_r$ an, soweit sie durch Seiten zusammenhängen, so lange als in den anzusetzenden Quadraten noch $u < u_0$ ist. Dies Ansetzen muß ein Ende haben, weil in (B, t) auf $\mathfrak{G}_r$ $u > u_0$ ist. Ich erhalte so einen zusammenhängenden Teil von $\mathfrak{G}_r$, der eine oder mehrere Grenzkurven haben kann. Aber mindestens eine von diesen muß mit $\mathfrak{k}$ verschlungen sein, weil ich von einer solchen Kurve ausging und die angesetzten Quadrate $\mathfrak{k}$ nicht trafen. Die Kurven, die ich so auf $\mathfrak{G}_p$, $\mathfrak{G}_{p+1}, \cdots$ erhalte, seien $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_3, \cdots$.

Diese Kurven lasse ich jetzt an die Stelle der $\mathfrak{a}$ des § 7 treten, und v an die Stelle von z.

Die dort verlangte Variable φ aber erhalte ich auf folgende Weise: Ich lege von O nach einem beliebigen Punkt P eine ganz willkürliche Kurve $\mathfrak{p}$ und bezeichne mit J den Wert des Gaußschen Integrals

$$\iint \frac{\begin{vmatrix} s_1 - s_1' & ds_1 & ds_1' \\ s_2 - s_2' & ds_2 & ds_2' \\ s_3 - s_3' & ds_3 & ds_3' \end{vmatrix}}{\sqrt{(s_1 - s_1')^2 + (s_2 - s_2')^2 + (s_3 - s_3')^2}^3},$$

*) Ich sage kurz „eine Kurve trifft oder schneidet eine Fläche *ungerade*“, statt in einer ungeraden Zahl von Punkten.

wo (s_1, s_2, s_3) die Koordinaten eines Punktes auf $\mathfrak{k}$, (s_1', s_2', s_3') die eines Punktes auf $\mathfrak{p}$ sind, und die Integration über $\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{p}$ sich erstreckt. Da man ohne und mit Umschlingung von $\mathfrak{k}$ von O nach P gehen kann, ist J nicht ganz bestimmt, vielmehr um ganze Vielfache von 4π unbestimmt. Nehme ich nun $\varphi = \frac{1}{2} J$, so ist φ eine Variable von den gewünschten Eigenschaften, weil ja die g_r die $\mathfrak{k}$ umschlingen.

Es folgt also nach den Resultaten der §§ 7—12, daß es unter den Staupunkten der Kurven $\mathfrak{g}$, die ja einen Teil von $\mathfrak{N}'$, und damit von $\mathfrak{N}$ bilden, zwei verschiedene gibt, die den beiden Funktionen u und v die nämlichen Werte u_0 und v_0 erteilen.

§ 16.

Jetzt ist es nicht schwer, die im Eingang dieser Arbeit erwähnten drei Fälle des Satzes: „Daß zwei Mannigfaltigkeiten verschiedener Dimension nicht gegenseitig eindeutig und stetig aufeinander abgebildet werden können" zu beweisen, indem ich den zweiten Satz beweise: *Daß n stetige und eindeutige Funktionen des Ortes auf einer n-dimensionalen Kugel stets unendlich viele Wertsysteme mindestens zweimal annehmen müssen* — wenigstens für $n = 1, 2$ oder 3.

Im Falle $n = 1$ hat man einen Kreis, auf dem eine stetige Funktion w des Ortes gegeben sei. Nimmt w in zwei Punkten A und B des Kreises verschiedene Werte w_1 und w_2 an, so nimmt w jeden Zwischenwert in zwei Punkten auf den beiden Teilen an, in die der Kreis durch die Punkte A und B zerfällt.

Für $n = 2$ hat man die Kugel

$$(t_0 - a_0)^2 + (t_1 - a_1)^2 + (t_2 - a_2)^2 = a^2.$$

Die beiden Funktionen, die in der Einleitung y_1 und y_2 hießen, mögen jetzt w und u genannt werden.

Auf der Kugel muß es zwei Punkte A und B geben, in denen die beiden Funktionen w, u nicht die nämlichen Werte haben. Ich kann annehmen, in A habe w den Wert w_1, in B den w_2, und es sei $w_1 \neq w_2$, $w_1 < w_2$. Ich setze $w_0 = \frac{w_1 + w_2}{2}$, $\frac{w_2 - w_1}{4} = d$ und nehme dann diese Punkte A und B für die in § 1 gebrauchten, indem ich die Kugel von B aus auf ihre Tangentenebene in A projiziere. Wenn ich den Projektionen die nämlichen Werte von w und u zuteile, die sie in den Originalen haben, so hat in der Ebene im Punkt A w den Wert $w_1 = w_0 - 2d$. Wenn ich im § 2 die Größe r so bestimme, daß in den Kugelpunkten, die zugleich im Inneren von (B, r) liegen, $w > w_2 - d$ ist, so ist in der

Ebene außerhalb des Kreises vom Radius $2a\sqrt{\frac{4a^2}{r^2}-1}$ $w > w_2 - d$, also auch $> w_0 + d$. Um den Punkt A kann ich einen Kreis (A, r_0) so schlagen, daß in ihm $w < w_1 + d = w_0 - d$ ist. Jede von A ausgehende, ins Unendliche laufende Kurve trägt nun Punkte, in denen $w = w_0$ ist. Sie liegen, wie es § 11 verlangt, alle außerhalb des Kreises (A, r_0), aber innerhalb des Kreises (A, b), wenn $b = 2a\sqrt{\frac{4a^2}{r^2}-1}$ ist. Die Menge der Punkte ist unendlich und abgeschlossen. Denn wäre in einem Häufungspunkte P w nicht $= w_0$, so könnte ich eine Umgebung herstellen, in der er ebenfalls nicht $= w_0$ wäre, und P wäre dann kein Häufungspunkt. Nach § 12 folgt also, daß es in der Menge von Punkten, für die $w = w_0$ ist, sicher zwei verschiedene gibt, in denen auch u den nämlichen Wert hat.

Für $n = 3$ habe ich die Kugel zu betrachten

$$(t_0 - a_0)^2 + (t_1 - a_1)^2 + (t_2 - a_2)^2 + (t_3 - a_3)^2 = a^2,$$

und die drei Funktionen seien nun w, u, v, statt wie früher y_1, y_2, y_3 genannt. Auch jetzt muß es zwei Punkte A und B der Kugel geben, in denen das Tripel (w, u, v) nicht das gleiche ist. Ich mache dieselben Annahmen und Bezeichnungen wie oben und finde dann, daß im Raume von drei Dimensionen, in den die obige Kugel stereographisch von B aus projiziert wird, in einer Kugel (A, r_0) kein Punkt liegt, für den $w = w_0$ ist, während außerhalb (A, b) auch keiner sich befindet. In dem Hohlraume zwischen beiden liegt die unendliche abgeschlossene Menge von Punkten mit $w = w_0$.

Ich finde also nach § 14, daß in *zwei verschiedenen* Punkten dieser Menge neben $w = w_0$ auch noch u und v die nämlichen Werte u_0 und v_0 haben.

Berichtigung zu meinem Aufsatz: „Historische Bemerkung zur Funktionentheorie", Band 60, Seite 398 ff.

Seite 398 letzter Absatz ist vor Schröder anzuführen: Seidel (Journ. f. r. u. ang. Math. Band 73).
„ 400 Zeile 12 v. o. muß es heißen „Glieder der Reihe werden unendlich" statt „die Funktion wird unendlich".
„ 401 ist der letzte Satz zu streichen.

Herr Professor Landau in Berlin hatte die Güte, mich auf diese Fehler aufmerksam zu machen.

Einige elementare Bemerkungen über den Prozeß der analytischen Fortsetzung.

Von

E. Study in Bonn.

Ist $w = u + iv$ eine analytische Funktion der komplexen Veränderlichen $z = x + iy$, $w = f(z)$, so sind die reellen Komponenten u und v von w einzeln analytische Funktionen der reellen Komponenten x und y von z:

$$u = \varphi(x, y), \quad v = \psi(x, y).$$

Es steht also nichts im Wege, diese reellen Funktionen zu Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen zu erweitern. Hiermit betritt man ein vierdimensionales Gebiet, und zwar gelangt man in dieses durch ein natürliches, willkürfreies Verfahren. Es wird also die Frage sich aufdrängen, ob man nicht auf einem Wege, der durch dieses Gebiet hindurchführt, einen analytischen Zusammenhang zwischen zwei im reellen (zweidimensionalen) Gebiete getrennten Lösungen u_1 und u_2 der Laplaceschen Gleichung, und damit zugleich auch einen *natürlichen* Zusammenhang zwischen zwei verschiedenen analytischen Funktionen der komplexen Veränderlichen z herstellen kann. Ein solcher Zusammenhang würde besonders da von Interesse sein, wo die Funktionen $f(z)$, $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ eine natürliche Grenze haben, die von einem reellen Zuge einer analytischen Kurve gebildet wird, z. B. von einer Kreislinie. Denn dann liefert ja bekanntlich die Schwarzsche Spiegelung an diesem Kurvenzuge eine neue Funktion $f_1(z)$, die jenseits der natürlichen Grenze existiert. Es wird dann zu wissen erwünscht sein, ob diese Funktion $f_1(z)$ außerdem auch als eine natürliche Fortsetzung der Funktion $f(z)$ um deren Grenze herum aufgefaßt werden kann.

Herr L. Schlesinger ist, nach persönlicher Mitteilung, schon vor längerer Zeit zu der Einsicht gelangt, daß es sich im Falle der elliptischen Modulfunktionen nicht so verhält. Indessen läßt sich eine Entscheidung ganz allgemein und auch sehr leicht herbeiführen. Man kann

es nämlich den Ausdrücken der Funktionen u, v unmittelbar ansehen, daß sie eine analytische Fortsetzung in andere reelle Funktionen *niemals* zulassen.

Wir bezeichnen, wie üblich, mit $\bar{f}$ die zu der Funktion f konjugiert-komplexe Funktion, und haben dann

$$u = \frac{1}{2}\{f(x+iy) + \bar{f}(x-iy)\},$$
$$v = \frac{1}{2i}\{f(x+iy) - \bar{f}(x-iy)\}.$$

Lassen wir auch für x und y komplexe Werte zu, so ist deren Veränderlichkeit nur an die Einschränkung gebunden, daß die Funktionen $f(x+iy)$ und $\bar{f}(x-iy)$ zweier nunmehr unabhängiger komplexer Argumente $x+iy$ und $x-iy$ gleichzeitig existieren müssen. Diese Bedingung aber läßt sich noch etwas zweckmäßiger ausdrücken. Erklären wir vier reelle Größen x', y', x'', y'' und dann zwei komplexe Größen z', z'' durch die Gleichungen

$$x - iy = x' - iy', \quad x' + iy' = z',$$
$$x + iy = x'' + iy'', \quad x'' + iy'' = z'',$$

und setzen wir analog

$$u - iv = u' - iv', \quad u' + iv' = w',$$
$$u + iv = u'' + iv'', \quad u'' + iv'' = w'',$$

so sagen die bezeichneten Forderungen aus, daß die Funktionen

$$w' = f(z'), \quad w'' = f(z'')$$

existieren müssen. Es ergibt sich dann

$$u = \frac{1}{2}\{w'' + \bar{w}'\}, \quad v = \frac{1}{2i}\{w'' - \bar{w}'\}.$$

Der vierdimensionale Existenzbereich der Funktionen u, v läßt sich also eindeutig-umkehrbar und stetig abbilden auf den Bereich, der aus allen *Paaren* z', z'' gewöhnlicher komplexer Größen besteht, die in den Existenzbereich der Funktion $f(z)$ fallen. Zugleich sieht man, daß die Größen x und y nur dann reell werden, wenn $z' = z''$ wird. Gleichzeitig reduzieren sich dann auch u und v auf reelle Werte, und die Verbindung $u+iv$ wird identisch mit der völlig *bestimmten* Funktion $f(z)$.

Hiermit ist unsere Behauptung erwiesen. Zugleich erkennen wir, daß sie einer bedeutenden Verallgemeinerung fähig ist.

Man betrachte irgend eine analytische Mannigfaltigkeit M im Gebiete der komplexen Veränderlichen $z_1 \cdots z_n$. Setzt man dann $z_k = x_k + iy_k$, so hat man vor sich eine Mannigfaltigkeit von gerader Dimensionenzahl $2r$ im Gebiete der $2n$ reellen Veränderlichen x_k, y_k. Durch analytische Fort-

Einige elementare Bemerkungen über den Prozeß der analytischen Fortsetzung.

Von

E. Study in Bonn.

Ist $w = u + iv$ eine analytische Funktion der komplexen Veränderlichen $z = x + iy$, $w = f(z)$, so sind die reellen Komponenten u und v von w einzeln analytische Funktionen der reellen Komponenten x und y von z:

$$u = \varphi(x, y), \quad v = \psi(x, y).$$

Es steht also nichts im Wege, diese reellen Funktionen zu Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen zu erweitern. Hiermit betritt man ein vierdimensionales Gebiet, und zwar gelangt man in dieses durch ein natürliches, willkürfreies Verfahren. Es wird also die Frage sich aufdrängen, ob man nicht auf einem Wege, der durch dieses Gebiet hindurchführt, einen analytischen Zusammenhang zwischen zwei im reellen (zweidimensionalen) Gebiete getrennten Lösungen u_1 und u_2 der Laplaceschen Gleichung, und damit zugleich auch einen *natürlichen* Zusammenhang zwischen zwei verschiedenen analytischen Funktionen der komplexen Veränderlichen z herstellen kann. Ein solcher Zusammenhang würde besonders da von Interesse sein, wo die Funktionen $f(z)$, $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ eine natürliche Grenze haben, die von einem reellen Zuge einer analytischen Kurve gebildet wird, z. B. von einer Kreislinie. Denn dann liefert ja bekanntlich die Schwarzsche Spiegelung an diesem Kurvenzuge eine neue Funktion $f_1(z)$, die jenseits der natürlichen Grenze existiert. Es wird dann zu wissen erwünscht sein, ob diese Funktion $f_1(z)$ außerdem auch als eine natürliche Fortsetzung der Funktion $f(z)$ um deren Grenze herum aufgefaßt werden kann.

Herr L. Schlesinger ist, nach persönlicher Mitteilung, schon vor längerer Zeit zu der Einsicht gelangt, daß es sich im Falle der elliptischen Modulfunktionen nicht so verhält. Indessen läßt sich eine Entscheidung ganz allgemein und auch sehr leicht herbeiführen. Man kann

gewisse imaginäre gerade Linien dar, die sogenannten Minimalgeraden, die wir als link- und rechtseitige Minimalgerade unterscheiden können. Sind dann x, y, u, v reelle Größen, so wird durch die Gleichungen

$$\xi - i\eta = x - iy, \quad \xi + i\eta = u + iv$$

jedem komplexen Punkt (ξ, η) ein wohlbestimmtes Paar reeller Punkte (x, y) und (u, v) zugewiesen, und umgekehrt: das Paar der beiden reellen Punkte, die den durch (ξ, η) gehenden Minimalgeraden angehören.

Nehmen wir jetzt an, daß der Punkt (ξ, η) eine analytische Kurve durchläuft, *die nicht eine Minimalgerade ist*, so bedeutet — wie man ohne weiteres erkennt — die Zuordnung zwischen (x, y) und (u, v) eine reelle, (von singulären Stellen abgesehen) uneigentlich-konforme Abbildung. Umgekehrt kann eine solche in der Form $w = f(\bar{z})$ willkürlich gegeben werden; sie bestimmt dann vermöge der Gleichungen

$$\xi = \frac{1}{2}(w + \bar{z}), \quad \eta = \frac{1}{2i}(w - \bar{z})$$

eindeutig die zugehörige analytische Kurve, die verschieden ist von einer Minimalgeraden. Jede solche Kurve hat also ein *reelles Bild* in einer uneigentlich-konformen Transformation $z \longrightarrow w$, durch die die Punkte zweier Riemannscher Flächen (z) und (w) einander eindeutig-umkehrbar zugeordnet werden.*)

Ist nun die Kurve selbst *reell*, d. h. sind ihre Punkte paarweise konjugiert-komplex, so zeigt sich das an der Abbildung darin, daß die beiden Riemannschen Flächen (z) und (w) zusammenfallen, und daß jedes umgekehrte Punktepaar $w \longrightarrow z$ ebenfalls ein Paar zugeordneter Punkte ist. Tritt überdies der Fall ein, daß die reelle Kurve einen oder mehrere reelle Züge hat, so fällt jeder Punkt eines solchen Kurvenzuges mit dem zugeordneten Punkt zusammen. Die Abbildung selbst aber stimmt in der Umgebung dieses Zuges (der einem bestimmten Blatte der Riemannschen Fläche angehört) überein mit der Schwarzschen Spiegelung.

Wenn also zu einer reellen analytischen Kurve mehrere Schwarzsche Spiegelungen gehören, so hängen diese immer durch analytische Fortsetzung, und zwar durch Fortsetzung auf *reellem* Wege, mit einander zusammen. Jede einzelne unter ihnen bestimmt vollkommen zugleich mit der ganzen Kurve alle übrigen konformen Spiegelungen.

---

*) Ist z. B. die ebene Kurve eine Gerade, so ist die zugehörige Abbildung eine uneigentliche Ähnlichkeitstransformation, und umgekehrt. Ist die Kurve ein (irreduzibeler) Kreis, so ist die Abbildung irgend eine andere uneigentliche Möbiussche Kreisverwandtschaft, und umgekehrt.

Von den beiden besprochenen Sätzen gehört der erste unmittelbar der allgemeinen Theorie der analytischen Funktionen an; der zweite, in geometrischer Einkleidung vorgetragene, aber kann wenigstens dieser Theorie untergeordnet werden. Gleichungen der Form $w = f(\bar{z})$ sind zwar nicht analytisch im üblichen Sinne des Wortes, und sie sind vielleicht nicht in gleichem Grade nützliche Verallgemeinerungen „reeller" Gleichungen $u = f(x)$, wie Gleichungen der Form $w = f(z)$. Indessen hat doch die Theorie der analytischen Funktionen auch zur Betrachtung derartiger Abhängigkeiten genötigt. Der ebenfalls von Herrn Schwarz formulierte Satz z. B., daß eine analytische Funktion, die in den Punkten eines reellen analytischen Kurvenbogens reelle Werte hat, in den spiegelbildlich einander entsprechenden Punkten zu beiden Seiten des Kurvenbogens konjugiert-komplexe Werte annimmt, gehört gewiß der allgemeinen Funktionentheorie an: die geometrische Fassung ist nebensächlich und könnte auch durch eine andere ersetzt werden. Das gleiche gilt dann auch von unserer Bemerkung über den Zusammenhang verschiedener konformer Spiegelungen. Diese aber beruht, soviel wir sehen, ganz und gar darauf, daß man die zweidimensionale Mannigfaltigkeit (z) oder (x, y), die durch Erweiterung der sogenannten reellen Mannigfaltigkeit (x) entstanden ist, von neuem dem gleichen Erweiterungsprozeß unterwirft, sie als enthalten in einer vierdimensionalen Mannigfaltigkeit (ξ, η) auffaßt.

Dieser letzte Prozeß läuft nun auf den Gebrauch *bikomplexer* Größen hinaus. In der Tat, hat man die reellen Größen x und y in der Form $z = x + iy$ zu einer sogenannten komplexen Größe zusammengefaßt, so braucht man zur Zusammenfassung zweier Größen ξ, η, die selbst schon komplex sind, eine neue Einheit, die man übrigens denselben Verknüpfungsregeln unterwerfen wird. Man wird etwa in obiger Formel das Zahlenpaar (0, 1) statt mit i, mit j bezeichnen. Dann kann man ohne Mehrdeutigkeit $\zeta = \xi + j\eta$ (und $z = x + jy$) setzen, sofern man bei der Darstellung von ξ und η selbst das Zeichen i beibehält:

$$\xi = \xi_1 + i\xi_2, \quad \eta = \eta_1 + i\eta_2, \quad \zeta = \xi + j\eta.$$

Mag man sich nun der Zusammenfassung von je vier Gleichungen in eine einzige mit Hilfe eines Systems bikomplexer Größen der Form

$$a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 ij,$$
$$(i^2 = -1,\ j^2 = -1,\ ij = ji)$$

bedienen wollen, oder nicht, an der Sache wird dadurch nur Unwesentliches geändert: Ist die vorgetragene wenn auch noch so unbedeutende Ergänzung zu dem Satze von der konformen Spiegelung vernünftig, enthält sie eine irgendwie nützliche Erkenntnis, dann kann zwar (wie es

ohne Zweifel geschehen wird) auch fernerhin behauptet, aber nicht mit Recht behauptet werden, daß die Erweiterung des Bereiches der reellen Größen zum Bereiche der gemeinen komplexen Größen in der allgemeinen Analysis ausreichend, und noch weniger, daß sie allein *zulässig* sei. Denn diese Behauptung schließt, wie uns scheint, die andere ein, daß die zu jener Erkenntnis unentbehrliche doppelte Erweiterung des Bereiches der reellen Größen überflüssig, ja sogar ein methodischer Mißgriff sei.

Die zentrale Stellung der gemeinen komplexen Größen und ihrer Funktionen ist gewiß durch die ganze Entwickelung der modernen Mathematik gewährleistet. In den Erörterungen über den „tieferen Grund" dieser Erscheinung — oder vielmehr, bei den Versuchen, ihr einen möglichst prägnanten Ausdruck zu geben — ist man aber unseres Erachtens etwas dogmatisch zu Werke gegangen. Zunächst bleiben diese Erörterungen alle auf dem Boden der Algebra.*) Daher bietet vielleicht unsere Bemerkung eine Ergänzung, wonach bei transzendenten Funktionen natürliche Grenzen auch im hyperkomplexen Gebiete (bei Anwendung des beschriebenen *natürlichen* Erweiterungsprozesses) nicht umgangen werden können. Aber allzugroßes Gewicht hat man unseres Erachtens auf die Forderung gelegt, daß auch in dem erweiterten Gebiete ein Produkt nicht soll verschwinden können, wenn nicht einer der Faktoren verschwindet.

Mit dem Nachweise, daß dann der Fundamentalsatz der Algebra seine Gültigkeit verliert, wird zwar die ausgezeichnete Stellung der gemeinen komplexen Größen auf eine kurze Formel gebracht, die Anwendung anderer komplexer Größen aber, auch in der allgemeinen Analysis, nicht endgültig ausgeschlossen. Es dürfte auch zu bedenken sein, daß man schon bei dem Übergang zu den gemeinen komplexen Größen kaum minder wichtige Eigenschaften der reellen Größen aufgibt, nämlich die durch Ungleichungen ausgedrückten Anordnungssätze.

Sind diese Überlegungen sachgemäß, so wird jener bekannte Ausspruch von Gauß**), an den alle diese Erörterungen angeknüpft haben (falls man ihn im Sinne von Weierstraß deuten will), selbst dann nicht in vollem Umfange aufrecht zu erhalten sein, wenn man das von Gauß in einem sonst gewiß nicht üblichen Sinne gebrauchte Wort „nicht zulässig" durch die milderen Ausdrücke „unzweckmäßig" oder „überflüssig" erklärt.

Es ist gewiß, daß *jedes* Wort des Princeps Mathematicorum die aller-

*) Daß schon von diesem Gesichtspunkte aus die von Weierstraß und anderen bekundeten Ansichten sich nicht in vollem Umfange aufrecht erhalten lassen, hat der Verfasser bei anderen Gelegenheiten darzulegen versucht (Gött. Nachr. 1898, S. 5—8. Geometrie der Dynamen, Leipzig 1903, S. 596).

**) Gauß Werke, Bd. II, S. 178.

sorgfältigste Erwägung verdient (einige Kommentatoren scheinen uns die Worte „in der allgemeinen Arithmetik" nicht hinreichend beachtet zu haben). Indessen aus einem seiner Aussprüche ein Verbot gewisser Forschungsrichtungen oder ein aprioristisches Werturteil über diese ableiten zu wollen, das scheint uns wirklich *unzulässig* zu sein, im eigentlichen, nicht abgeschwächten Sinne des Wortes.*) Es kommt hinzu, daß wir nicht einmal sicher sein können, recht verstanden zu haben: So hat sich Dedekind der Weierstraßchen Interpretation jener fragmentarischen und dunkeln Äußerung nicht angeschlossen.

Im Grunde ist eigentlich schon nicht einzusehen, warum die Lösungen der Laplaceschen Gleichung nicht in das komplexe Gebiet hinein sollen fortgesetzt werden dürfen, da man doch alle anderen analytischen Funktionen von zwei reellen Veränderlichen dieser Fortsetzung unterwirft. Ist es überhaupt möglich, die wissenschaftliche Systematik auf diese Art zu durchlöchern?

Im übrigen verweisen wir wegen des zuerst von Herrn Segre angewendeten Prozesses der wiederholten Erweiterung des betrachteten Größengebietes auf dessen schon erwähnte Abhandlung, und außerdem auf eine Arbeit des Verfassers „Sugli enti analitici", die kürzlich in den Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo (t. XXI, p. 345) erschienen ist. Man findet dort allgemeinere Entwicklungen, u. a. auch eine Ausdehnung des Begriffs der Schwarzschen Spiegelung auf die Theorie einer unbestimmten Zahl von komplexen Veränderlichen.

Anwendungen der vorgetragenen und verwandter Ideen sollen den Gegenstand weiterer Arbeiten bilden, in denen der Verfasser besonders gewisse flächentreue Abbildungen als ein Seitenstück zu den konformen Abbildungen und in ihrer Beziehung zu diesen eingehend zu erörtern gedenkt.

*) Wir sehen davon ab, durch Zitate (aus den Schriften namhafter Autoren) zu zeigen, daß wir hier nicht etwa offene Türen einrennen.

Ein Satz über eindeutige Abbildung und seine Anwendung in der Variationsrechnung.

Von

OSKAR BOLZA in Chicago.

Um den fraglichen Satz bequemer formulieren zu können, wollen wir sagen, ein Punkt $(x) = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ liege in der Umgebung (ϱ) einer im Raum der Variabeln x definierten Punktmenge $\mathfrak{M}$, wenn er in der Umgebung (ϱ) irgend eines Punktes von $\mathfrak{M}$ liegt, d. h. also, wenn es mindestens einen Punkt $(\bar{x})$ von $\mathfrak{M}$ gibt, so daß

$$|x_i - \bar{x}_i| < \varrho, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

Die hierdurch definierte Umgebung (ϱ) der Menge $\mathfrak{M}$ wollen wir mit $(\varrho)_{\mathfrak{M}}$ bezeichnen.

Es soll nun zunächst der folgende Satz*) bewiesen werden:

Satz I: *Die n reellen eindeutigen Funktionen*

$$y_i = f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n), \quad i = 1, 2, \cdots, n \tag{1}$$

*nebst ihren ersten partiellen Ableitungen seien stetig im Innern eines Bereiches***) $\mathfrak{A}$; *ferner möge die durch die Gleichungen* (1) *definierte Beziehung zwischen dem (x)-Raum und dem (y)-Raum ein-eindeutig sein für eine im Innern von $\mathfrak{A}$ gelegene, beschränkte****), *abgeschlossene Punktmenge $\mathfrak{C}$, und endlich sei die Funktionaldeterminante*

$$\Delta(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \frac{\partial(f_1, f_2, \cdots, f_n)}{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_n)}$$

in $\mathfrak{C}$ von Null verschieden.

Alsdann läßt sich eine ganz im Innern von $\mathfrak{A}$ gelegene Umgebung $(\varrho)_{\mathfrak{C}}$ von $\mathfrak{C}$ angeben, derart daß die Gleichungen (1) *eine ein-eindeutige Be-*

*) Der Satz ist eine Verallgemeinerung eines Satzes, den ich in § 34 meiner Lectures on the Calculus of Variations (Chicago 1904) bewiesen habe.

**) Wir gebrauchen das Wort „Bereich" für eine Punktmenge, welche innere Punkte enthält.

***) „borné".

ziehung zwischen dem Bereich $(\varrho)_{\mathfrak{C}}$ *und dessen Bild* $\mathfrak{S}_\varrho$ *im* (y)*-Raum definieren.*

Man zeigt zunächst leicht, daß sich eine positive Größe d so klein angeben läßt, daß die Umgebung $(d)_{\mathfrak{C}}$ ganz im Innern von $\mathfrak{A}$ liegt.

Dann wähle man eine abnehmende Folge positiver Größen mit der Grenze Null:

$$d > \varrho_1 > \varrho_2 > \cdots > \varrho_\nu > \cdots > 0, \quad \lim_{\nu=\infty} \varrho_\nu = 0. \tag{2}$$

Angenommen nun, es gäbe für jeden Wert des Index ν in $(\varrho_\nu)_{\mathfrak{C}}$ mindestens *ein* Paar verschiedener Punkte

$$(x'_\nu) = (x'_{1\nu}, x'_{2\nu}, \cdots, x'_{n\nu}), \quad (x''_\nu) = (x''_{1\nu}, x''_{2\nu}, \cdots, x''_{n\nu}),$$

deren Bilder im (y)-Raum zusammenfallen. Dann können wir den beiden Punkten (x'_ν), (x''_ν) zwei Punkte (ξ'_ν) resp. (ξ''_ν) von $\mathfrak{C}$ zuordnen, derart, daß

$$|x'_{i\nu} - \xi'_{i\nu}| < \varrho_\nu, \quad |x''_{i\nu} - \xi''_{i\nu}| < \varrho_\nu. \tag{3}$$

Wir betrachten jetzt die Punktmenge

$$\{z_\nu\} = \{(\xi'_{1\nu}, \xi'_{2\nu}, \cdots, \xi'_{n\nu}; \xi''_{1\nu}, \xi''_{2\nu}, \cdots, \xi''_{n\nu})\}$$

im $2n$-dimensionalen Raum $x'_1, \cdots, x'_n; x''_1, \cdots, x''_n$. Sie ist in der beschränkten, abgeschlossenen Menge

$$\mathfrak{D}: \quad x'_1, x'_2, \cdots, x'_n \text{ in } \mathfrak{C}, \quad x''_1, x''_2, \cdots, x''_n \text{ in } \mathfrak{C}$$

enthalten. Enthält daher die Menge $\{z_\nu\}$ unendlich viele verschiedene Punkte, so besitzt sie mindestens *einen* Häufungspunkt

$$h = (a'_1, \cdots, a'_n; \; a''_1, \cdots, a''_n),$$

der zugleich Häufungspunkt von $\mathfrak{D}$ ist und daher zu $\mathfrak{D}$ gehört, d. h. (a') ist ein Punkt von $\mathfrak{C}$ und ebenso (a''). Es läßt sich dann eine unendliche Teilfolge $\{z_{\nu_\mu}\}$ aus $\{z_\nu\}$ herausheben, so daß

$$\lim_{\mu=\infty} z_{\nu_\mu} = h, \quad \nu_{\mu+1} > \nu_\mu,$$

d. h.

$$\lim_{\mu=\infty} (\xi'_{\nu_\mu}) = (a'), \quad \lim_{\mu=\infty} (\xi''_{\nu_\mu}) = (a''). \tag{4}$$

Enthält die Menge $\{z_\nu\}$ nur eine endliche Anzahl verschiedener Punkte, so läßt sich aus $\{z_\nu\}$ eine unendliche Teilfolge $\{z_{\nu_\mu}\}$ von gleichen Punkten herausgreifen, und man gelangt zu demselben Resultat (4).

Verbindet man (4) mit (2) und (3), so folgt, daß auch

$$\lim_{\mu=\infty} (x'_{\nu_\mu}) = (a'), \quad \lim_{\mu=\infty} (x''_{\nu_\mu}) = (a''). \tag{5}$$

Es läßt sich nun aber zeigen, daß

$$(a') = (a''). \tag{6}$$

Denn setzt man

$$D(x_1', \cdots, x_n';\ x_1'', \cdots, x_n'') = \sum_{i=1}^{n} [f_i(x_1', \cdots, x_n') - f_i(x_1'', \cdots, x_n'')]^2,$$

so ist nach der Definition der Punkte (x_ν'), (x_ν''):

$$D(x_{1\nu_\mu}', \cdots, x_{n\nu_\mu}';\ x_{1\nu_\mu}'', \cdots, x_{n\nu_\mu}'') = 0,$$

und daher, wenn wir zur Grenze $\mu = +\infty$ übergehen und beachten, daß $D(x_1', \cdots, x_n';\ x_1'', \cdots, x_n'')$ in $a_1', \cdots, a_n';\ a_1'', \cdots, a_n''$ stetig ist:

$$D(a_1', \cdots, a_n',\ a_1'', \cdots, a_n'') = 0,$$

also

$$f_i(a_1', \cdots, a_n') = f_i(a_1'', \cdots, a_n''), \qquad i = 1, 2, \cdots, n.$$

Da wir aber voraussetzen, daß die Abbildung (1) für die Menge $\mathfrak{E}$ eineindeutig ist, so folgt hieraus

$$(a') = (a'').$$

Aus unserer Annahme folgt also, daß es einen Punkt (a) von $\mathfrak{E}$ gibt, derart, daß in jeder Nähe von (a) Paare von verschiedenen Punkten existieren, deren Bilder im (y)-Raum zusammenfallen.

Dies ist aber nach dem Satz über implizite Funktionen nicht möglich, da die Funktionen $f_i(x_1, \cdots, x_n)$ nebst ihren ersten Ableitungen in der Umgebung von (a) stetig sind und überdies

$$\Delta(a_1, \cdots, a_n) \neq 0.$$

Wir sind also zu einem Widerspruch gelangt; daher muß es mindestens einen Wert $\nu = r$ geben, derart, daß zwei verschiedenen Punkten von $(\varrho_r)_{\mathfrak{E}}$ allemal zwei verschiedene Punkte im (y)-Raum entsprechen. Dasselbe gilt dann a fortiori für die Umgebung $(\varrho)_{\mathfrak{E}}$, sobald $\varrho \leqq \varrho_r$ gewählt wird, womit unser Satz bewiesen ist.

Zusatz I: *Die Größe ϱ läßt sich so klein wählen, daß jeder Punkt des Bildes $\mathfrak{S}_\varrho$ von $(\varrho)_{\mathfrak{E}}$ ein innerer Punkt von $\mathfrak{S}_\varrho$ ist, und daß die durch Auflösung der Gleichungen* (1) *erhaltenen und in $\mathfrak{S}_\varrho$ eindeutig definierten inversen Funktionen*

$$x_\varkappa = \psi_\varkappa(y_1, y_2, \cdots, y_n), \qquad \varkappa = 1, 2, \cdots, n \tag{7}$$

im Bereich $\mathfrak{S}_\varrho$ stetig sind und stetige partielle Ableitungen erster Ordnung besitzen.

Denn bezeichnet man mit $\overset{+}{\mathfrak{E}}$ denjenigen Bestandteil von $\mathfrak{E}$, in welchem $\Delta(x_1, \cdots, x_n) > 0$, mit $\overset{-}{\mathfrak{E}}$ denjenigen, in welchem $\Delta(x_1, \cdots, x_n) < 0$, so folgt leicht aus den über die Menge $\mathfrak{E}$ gemachten Voraussetzungen, daß auch die Mengen $\overset{+}{\mathfrak{E}}$ und $\overset{-}{\mathfrak{E}}$ beschränkt und abgeschlossen sind. Nach

bekannten Sätzen*) über stetige Funktionen folgt dann, indem man zunächst $\overset{+}{\mathfrak{C}}$ und $\overset{-}{\mathfrak{C}}$ getrennt betrachtet, daß sich eine positive Größe d_1 so wählen läßt, daß

$$\Delta(x_1, \cdots, x_n) \neq 0 \quad \text{in} \quad (\varrho)_{\mathfrak{C}},$$

sobald $\varrho < d_1$.

Wird ϱ dieser Bedingung entsprechend und zugleich $\leqq \varrho_r$ gewählt, so führt der Satz über implizite Funktionen unmittelbar zum Beweis der oben ausgesprochenen Behauptungen.

Es sei $\mathfrak{E}$ das Bild der Menge $\mathfrak{C}$ im (y)-Raum; dann ist die Menge $\mathfrak{E}$, ebenso wie $\mathfrak{C}$, beschränkt und abgeschlossen.**) Da sie in $\mathfrak{S}_\varrho$ enthalten ist, so liegt sie nach dem Vorigen ganz im Innern von $\mathfrak{S}_\varrho$. Daraus folgt

Zusatz II: *Es läßt sich eine Umgebung $(\sigma)_{\mathfrak{E}}$ des Bildes $\mathfrak{E}$ von $\mathfrak{C}$ angeben, welche ganz in $\mathfrak{S}_\varrho$ liegt.*

Hiernach läßt sich der Satz I auch so aussprechen: Unter den angegebenen Voraussetzungen lassen sich zwei positive Größen ϱ und σ angeben, derart, daß für jedes (y) in $(\sigma)_{\mathfrak{E}}$ die Gleichungen (1) eine und nur eine Lösung (x) in $(\varrho)_{\mathfrak{C}}$ besitzen.

In dieser Form läßt sich der Satz auf implizite Funktionen verallgemeinern, und man erhält den folgenden

Satz II: *Es sei das System von n Gleichungen gegeben:*

$$f_i(x_1, x_2, \cdots, x_m, \; y_1, y_2, \cdots, y_n) = 0, \qquad i = 1, 2, \cdots, n, \tag{8}$$

wobei die Funktionen f_i nebst ihren ersten partiellen Ableitungen als Funktionen ihrer $m + n$ Argumente im Innern eines Bereiches $\mathfrak{A}$ stetig sind.

Die Gleichungen (8) *mögen befriedigt sein für die sämtlichen Punkte einer ganz im Innern von $\mathfrak{A}$ gelegenen, beschränkten, abgeschlossenen Punktmenge $\mathfrak{A}$, welche die Eigenschaft hat, daß, wenn $(x_1', \cdots, x_m', \; y_1', \cdots, y_n')$ und $(x_1'', \cdots, x_m'', \; y_1'', \cdots, y_n'')$ zwei verschiedene Punkte von $\mathfrak{C}$ sind, dann allemal $(x_1', \cdots, x_m') \neq (x_1'', \cdots, x_m'')$.*

Endlich sei die Funktionaldeterminante

$$\frac{\partial(f_1, \cdots f_n)}{\partial(y_1, \cdots, y_n)} \neq 0 \quad \text{in} \quad \mathfrak{C}. \tag{9}$$

*Wenn alsdann X (resp. Y) die Projektion***) der Menge $\mathfrak{C}$ in den $(x_1, \cdots, x_n)$-Raum (resp. den $(y_1, \cdots, y_n)$-Raum) bezeichnet, so lassen sich*

---

*) Vgl. Jordan, Cours d'Analyse, I, Nr. 62, 64.

**) Vgl. Jordan, l. c. Nr. 64.

***) Unter der Projektion eines Punktes $(x_1', \cdots, x_m'; \; y_1', \cdots, y_n')$ von $\mathfrak{C}$ in den (x)-Raum wird der Punkt: $(x) = (x_1', \cdots, x_m')$ verstanden.

zwei positive Größen ϱ und σ angeben, derart daß für jedes (x) in der Umgebung $(\sigma)_x$ die Gleichungen (8) eine und nur eine Lösung (y) besitzen, für welche der Punkt (x, y) in der Umgebung $(\varrho)_{\mathfrak{E}}$ liegt; die hierdurch für den Bereich $(\sigma)_x$ eindeutig definierten impliziten Funktionen

$$y_i = \psi_i(x_1, \cdots, x_m) \tag{10}$$

sind in diesem Bereich stetig und besitzen stetige partielle Ableitungen erster Ordnung.

Zum Beweis betrachte man das Gleichungssystem

$$u_h = x_h, \quad h = 1, 2, \cdots, m,$$
$$u_{m+i} = f_i(x_1, \cdots, x_m, y_1, \cdots, y_n), \qquad i = 1, 2, \cdots, n.$$

Dasselbe erfüllt alle Bedingungen des Satzes I und läßt sich daher in dem angegebenen Sinn eindeutig nach $x_1, \cdots, x_m, y_1, \cdots, y_n$ auflösen. Setzt man insbesondere $u_{m+1} = 0, \cdots, u_{m+n} = 0$, so erhält man den obigen Satz.

Um die Brauchbarkeit der angegebenen Säze zu zeigen, führe ich zwei der Variationsrechnung entlehnte Beispiele an:

1) *Der Satz von der Existenz eines Feldes.*

Es sei im $n+1$-dimensionalen Raum eine n-fach unendliche Kurvenschar in Parameterdarstellung gegeben:

$$x_j = \varphi_j(t, a_1, a_2, \cdots, a_n), \qquad i = 1, 2, \cdots, n+1, \tag{12}$$

wobei die Funktionen φ_j nebst ihren ersten partiellen Ableitungen stetig sein sollen in dem Bereich

$$T_0 < t < T_1, \quad |a_i - a_i^0 < d. \tag{13}$$

Die spezielle Kurve

$$\mathfrak{E}: \qquad x_j = \varphi_j(t, a_1^0, a_2^0, \cdots, a_n^0), \quad t_0 \leqq t \leqq t_1,$$

wo $T_0 < t_0$, $t_1 < T_1$, soll keine mehrfachen Punkte besitzen, und die Funktionaldeterminante

$$\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n)}{\partial(t, a_1, \cdots, a_n)}$$

sei von Null verschieden für

$$t_0 \leqq t \leqq t_1, \quad a_1 = a_1^0, \cdots, a_n = a_n^0. \tag{14}$$

Dann läßt sich eine positive Größe $\varkappa$ angeben, derart daß die Gleichungen (12) eine ein-eindeutige Beziehung zwischen dem Bereich

$$t_0 - \varkappa < t < t_1 + \varkappa, \quad |a_i - a_i^0| < \varkappa, \qquad i = 1, 2, \cdots, n, \tag{15}$$

und dessen Bild $\mathfrak{S}_\varkappa$ im (x)-Raum definieren; mit andern Worten: durch jeden Punkt des Bereiches $\mathfrak{S}_\varkappa$ geht eine und nur eine Kurve der Schar (12), für welche die Bedingungen (14) erfüllt sind.

Der Beweis folgt unmittelbar aus Satz I; die Menge $\mathfrak{C}$ ist hier durch (14) definiert, die Umgebung $(x)_{\mathfrak{C}}$ durch (15).

Das Bild $\mathfrak{S}_x$ ist hier ein Kontinuum, da*) die Menge (15) zusammenhängend ist.

In dem speziellen Fall der nicht-parametrischen Darstellung hat eine der Gleichungen, z. B. die letzte, die Form

$$x_{n+1} = t$$

und die Bedingung, daß die Kurve $\mathfrak{C}$ keine mehrfachen Punkte enthält, ist stets erfüllt, kann also bei der Formulierung des Satzes weggelassen werden.

2) *Reduktion der Differentialgleichungen für das allgemeinste Problem des Extremums eines einfachen Integrals auf ein kanonisches System***):

Auch bei dieser bekannten Aufgabe tritt eine Schwierigkeit bezüglich der eindeutigen Auflösung eines Gleichungssystems auf, welche durch den obigen Satz II in befriedigender Weise gelöst werden kann. Die Funktionen

$$f(x, y_1, \cdots, y_n, y_1', \cdots, y_n'), \quad f_\varrho(x, y_1, \cdots, y_n, y_1', \cdots, y_n'), \quad \varrho = 1, 2, \cdots, r$$

seien als Funktionen ihrer $2n+1$ Argumente nebst ihren partiellen Ableitungen bis zur dritten Ordnung (inkl.) im Innern eines Bereiches $\mathfrak{A}$ stetig, und es werde

$$\Omega = f + \sum_{\varrho=1}^{r} \lambda_\varrho f_\varrho,$$

$$\Omega_i = \frac{\partial \Omega}{\partial y_i}, \qquad \Omega_{n+i} = \frac{\partial \Omega}{\partial y_i'}$$

gesetzt. Es handelt sich dann um die Auflösungen des Gleichungssystems

$$(16) \qquad \begin{cases} \Omega_{n+i} = v_i, & i = 1, 2, \cdots, n, \\ f_\varrho = 0, & \varrho = 1, 2, \cdots, r \end{cases}$$

nach den Unbekannten $y_1', \cdots, y_n', \lambda_1, \cdots, \lambda_\varrho$.

Dabei soll angenommen werden, daß man eine Lösung

$$y_i = y_i(x), \qquad \lambda_\varrho = \lambda_\varrho(x)$$

der Differentialgleichungen

$$\Omega_i - \frac{d}{dx}\Omega_{n+i} = 0, \qquad f_\varrho = 0$$

von folgenden Eigenschaften gefunden habe:

---

*) Vgl. Jordan, l. c. Nr. 64.

**) Ich folge der Bezeichnung von A. Mayer in den Abhandlungen: Über den Hilbertschen Unabhängigkeitssatz etc., Sächsische Berichte, Mai 1903, Mai 1905, Juli 1905. Abgedruckt in Math. Ann. Bd. 58 und 62.

Die Funktionen $y_i(x)$ nebst ihren ersten und zweiten Ableitungen, die Funktionen $\lambda_\varrho(x)$ nebst ihren ersten Ableitungen sind stetig in einem Intervall $(x_0 x_1)$ und die Kurve

$$x_0 \leqq x \leqq x_1, \quad y_i = y_i(x), \quad y_i' = y_i(x)$$

liegt ganz im Innern des Bereiches $\mathfrak{A}$. Endlich soll die Funktionaldeterminante

$$\frac{\partial(\Omega_{n+1}, \cdots, \Omega_{2n}, f_1, \cdots, f_r)}{\partial(y_1', \cdots, y_n', \lambda_1, \cdots, \lambda_r)}$$

von Null verschieden sein für

$$x_0 \leqq x \leqq x_1, \quad y_i = y_i(x), \quad y_i' = y_i'(x), \quad \lambda_\varrho = \lambda_\varrho(x).$$

Definiert man dann die Funktionen $v_i(x)$ durch

$$v_i(x) = \Omega_{n+i}(x, y_1(x), \cdots, y_1'(x), \cdots, \lambda_1(x), \cdots),$$

so lassen sich die Gleichungen (16) im Sinne des Satzes II eindeutig nach $y_1', \cdots, y_n', \lambda_1, \cdots, \lambda_r$ auflösen für jedes Wertsystem $x, y_1, \cdots, y_n, v_1, \cdots, v_n$ in einer gewissen Umgebung (σ) der Kurve

$$x_0 \leqq x \leqq x_1, \quad y_i = y_i(x), \quad v_i = v_i(x).$$

Freiburg i./B., den 26 März 1906.

Über die Herleitung der Differentialgleichungen der Variationsrechnung.

Von

Hans Hahn in Wien.

Für die Variationsrechnung ist die Frage von großer Bedeutung, ob es außer den durch die Lagrangeschen Gleichungen gelieferten (stetigen und unstetigen) Lösungen noch andere Lösungen geben kann. Man ist aber auch im einfachsten Falle über das von Du Bois-Reymond erzielte Resultat, daß sich unter den stetig differenzierbaren Funktionen keine neuen Lösungen finden können, nicht wesentlich hinausgelangt, denn die Abhandlung von Whittemore*) läßt nur sehr spezielle Verteilung der Unstetigkeitsstellen zu und führt auch dann nur unter bedeutenden Einschränkungen zum Ziele, und auch die in der Dissertation von Gernet**) angedeutete Methode bedarf zu ihrer exakten Durchführung sehr weitgehender Voraussetzungen über das zu untersuchende Variationsproblem. Im ersten Abschnitte dieses Aufsatzes wird nun gezeigt, daß alle rektifizierbaren durchwegs mit einer Tangente versehenen Lösungskurven eines Variationsproblems mit den stetigen Lösungen der Lagrangeschen Gleichungen übereinstimmen, während die bloß mit einer einseitigen Tangente versehenen Lösungskurven mit den bekannten unstetigen Lösungen zusammenfallen. Der zweite Teil dieses Aufsatzes beschäftigt sich mit dem allgemeinen Probleme der Variationsrechnung. Ich habe vor einiger Zeit eine Methode angegeben***), um auch in diesem Falle die Lagrangeschen Gleichungen aufstellen zu können unter der Voraussetzung, daß die Lösungen bloß einmal stetig differenzierbar sind. Hier nun zeige ich, wie das mittlerweile von Hilbert†) mitgeteilte Verfahren zur Aufstellung dieser Gleichungen, das zweimalige Differenzierbarkeit voraussetzt, modifiziert

*) Annals of math. (2) 2 (1900).

**) Gött. Diss. 1902, p. 53.

***) Monatshefte f. Math. u. Phys. 14 (1903).

†) Gött. Nachr. 1905.

werden kann, so daß auch dieses Verfahren nur mehr die Existenz stetiger erster Ableitungen der gesuchten Lösung voraussetzt.

§ 1.

Das einfachste Problem der Variationsrechnung verlangt, in einer gegebenen Klasse von Kurven, die zwei feste Punkte der Ebene miteinander verbinden, diejenigen aufzufinden, welche einem Kurvenintegrale von der Form:

$$\int F(x, y; x', y')\,dt \tag{1}$$

einen kleineren (oder größeren) Wert erteilen, als jede andere genügend benachbarte, dieselben Punkte verbindende Kurve.

Soll der Wert des Integrals (1) unabhängig sein von der Art der Darstellung der Kurvenkoordinaten durch den Parameter t, so muß bekanntlich für alle positiven Zahlen k die Beziehung bestehen:

$$F(x, y; kx', ky') = kF(x, y; x', y').$$

Wir setzen dieselbe als erfüllt voraus. Ferner sei die Funktion $F(x, y; x', y')$ in allen in Betracht kommenden Punkten der Ebene eine regulär-analytische Funktion ihrer vier Argumente, und zwar für alle endlichen Wertepaare x', y', ausgenommen etwa das Wertepaar 0, 0.

Die in der Variationsrechnung übliche Methode lehrt, unser Problem zu lösen, wenn die oben genannte Kurvenklasse aus allen denjenigen Kurven besteht, deren Koordinaten sich als zweimal stetig differenzierbare Funktionen eines Parameters t darstellen lassen. Diese Kurven haben in jedem Punkte eine Tangente und eine bestimmte endliche Krümmung; die Neigung der Tangente gegen die Koordinatenachsen, sowie die Krümmung ändern sich stetig von Punkt zu Punkt. Die gesuchte Kurve muß dann bekanntlich den beiden (voneinander nicht unabhängigen) Differentialgleichungen genügen:

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial x'} = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0, \tag{2}$$

den sogenannten Lagrangeschen Gleichungen*) des Problems.

P. Du Bois-Reymond**) gelang es zu beweisen, daß, wenn man die eben angeführte Kurvenklasse durch die Klasse aller derjenigen Kurven ersetzt, deren Koordinaten sich durch einmal stetig differenzierbare Funk-

*) O. Bolza bezeichnet diese Gleichungen in seinen „Lectures on the Calculus of Variations" als Eulersche Gleichungen.

**) Math. Ann. 15 1879, p. 564. Eine einfachere Fassung des Beweises rührt von Hilbert her. Beide Fassungen sind wiedergegeben in Bolza, Lectures, p. 22. Ferner ein sehr einfacher Beweis von E. Zermelo, Math. Ann. 58.

tionen eines Parameters t darstellen lassen, zu den durch die Lagrangeschen Gleichungen gelieferten Lösungen keine weiteren hinzukommen. Die nunmehr zugelassenen Kurven besitzen also in jedem Punkte eine bestimmte Tangente, deren Neigung gegen die Koordinatenachsen sich stetig ändert. Eine solche Kurve ist bekanntlich stets rektifizierbar.

Im folgenden wird nun diese Kurvenklasse abermals durch eine umfassendere ersetzt: Es soll von den Kurven, unter denen die Lösung des Variationsproblems gesucht wird, nur vorausgesetzt werden, daß sie rektifizierbar sind und in jedem Punkte eine bestimmte Tangente besitzen, und es soll dargetan werden, daß auch hierdurch keine neuen Lösungen zustande kommen.*) Es ist klar, daß die hier betrachtete Kurvenklasse jede der beiden früher erwähnten in sich einschließt, aber wesentlich allgemeiner ist.

Zunächst sei darauf hingewiesen, daß für jede Kurve aus unserer Klasse der Begriff des Kurvenintegrals einen Sinn besitzt. In der Tat können wir, da die Kurve als rektifizierbar vorausgesetzt ist, die vom Anfangspunkte der Integration an gemessene Bogenlänge s als Parameter einführen. Bezeichnen wir mit γ den Winkel, den die Tangente an die Kurve im Punkte s (positiv gerechnet in der Richtung wachsenden s) mit der positiven x-Achse einschließt, so ist:

$$(3)\qquad \begin{aligned} \cos\gamma &= \lim_{h=0} \frac{x(s+h)-x(s)}{\sqrt{[x(s+h)-x(s)]^2+[y(s+h)-y(s)]^2}};\\ \sin\gamma &= \lim_{h=0} \frac{y(s+h)-y(s)}{\sqrt{[x(s+h)-x(s)]^2+[y(s+h)-y(s)]^2}}. \end{aligned}$$

Es sind also $\cos\gamma$ und $\sin\gamma$ dargestellt als Grenzen stetiger Funktionen, und sind daher — nach der Terminologie von R. Baire**) — Funktionen der ersten Klasse. Dasselbe gilt, da $F(x, y; x', y')$ stetig von seinen vier Argumenten abhängt, von der Funktion $F(x, y; \cos\gamma, \sin\gamma)$***); dieser Ausdruck ist also integrierbar im Sinne von H. Lebesgue†) und das Integral:

$$\int_0^s F(x, y; \cos\gamma, \sin\gamma)\, ds$$

*) Die sogenannten diskontinuierlichen Lösungen genügen unseren Forderungen nicht, da sie nicht in jedem Punkte eine Tangente besitzen. Dieselben kommen am Schlusse dieses Paragraphen zur Behandlung.

**) Siehe etwa R. Baire, Leçons sur les fonctions discontinues. Paris, Gauthier-Villars, 1905.

***) Vgl. etwa H. Lebesgue, Journ. de math., 1905, p. 153.

†) H. Lebesgue, Leçons sur l'intégration. Paris, Gauthier-Villars, 1904, p. 111.

bezeichnen wir als das über unsere Kurve erstreckte Integral der Funktion $F(x, y; x', y')$. Man erkennt ferner leicht, daß, wenn mit $x'(s)$ und $y'(s)$ irgend welche der vier Derivierten von $x(s)$ und $y(s)$ bezeichnet werden, stets die Beziehung besteht:

$$\int_0^s F(x, y; x'(s), y'(s))\,ds = \int_0^s F(x, y; \cos\gamma, \sin\gamma)\,ds.$$

In der Tat: Zunächst hat der links stehende Ausdruck immer einen Sinn, da $x'(s)$ sowohl als $y'(s)$ und somit auch $F(x, y; x'(s), y'(s))$ höchstens von der zweiten Klasse sind.*) Andererseits können sich $x'(s)$ und $y'(s)$ von $\cos\gamma$ und $\sin\gamma$ höchstens in den Punkten einer Menge vom Maße Null unterscheiden**); auf die Werte des Integranden in einer solchen Punktmenge kommt es aber bei der Integration von Funktionen, deren Werte zwischen endlichen Grenzen liegen — und nur um solche handelt es sich hier —, bekanntlich gar nicht an.

Soll nun das Stück $(s_0 s_1)$ unserer Kurve dem Integral (1) einen kleinsten oder größten Wert erteilen, so ergibt eine bekannte Schlußweise, daß das über diesen Kurvenbogen erstreckte Integral:

$$\int_{s_0}^{s_1} \left(\frac{\partial F}{\partial x} u + \frac{\partial F}{\partial y} v + \frac{\partial F}{\partial x'} u' + \frac{\partial F}{\partial y'} v'\right) ds$$

den Wert Null haben muß für alle stetigen, abteilungsweise stetig differenzierbaren Funktionen $u(s)$, $v(s)$, die für $s = s_0$ und $s = s_1$ verschwinden. Dasselbe gilt somit für jedes einzelne der Integrale:

$$\int_{s_0}^{s_1} \left(\frac{\partial F}{\partial x} u + \frac{\partial F}{\partial x'} u'\right) ds; \quad \int_{s_0}^{s_1} \left(\frac{\partial F}{\partial y} v + \frac{\partial F}{\partial y'} v'\right) ds.$$

Wir zeigen zunächst, daß die Gleichung besteht:

$$\int_{s_0}^{s_1} \frac{\partial F}{\partial x} u\,ds = -\int_{s_0}^{s_1} \left(\int_{s_0}^{s} \frac{\partial F}{\partial x}\,ds\right) u'(s)\,ds. \tag{4}$$

Auf Grund unserer Voraussetzungen liegen die Werte der Funktion $\frac{\partial F}{\partial x}$ zwischen endlichen Grenzen. Es liegen daher auch die Werte der vier Ableitungen von $\int_{s_0}^{s} \frac{\partial F}{\partial x}\,ds$ zwischen endlichen Grenzen, und da das

*) H. Lebesgue, l. c., p. 121.
**) H. Lebesgue, l. c., p. 125.

gleiche nach Voraussetzung von $u(s)$ gilt, so gilt es auch von $u(s)\int_{s_0}^{s}\frac{\partial F}{\partial x}\,ds$. Nach einem Satze von Lebesgue*) existiert daher die Ableitung

$$\frac{d}{ds}\left[u(s)\int_{s_0}^{s}\frac{\partial F}{\partial x}\,ds\right]$$

im ganzen Intervall $(s_0 s_1)$, abgesehen höchstens von einer Punktmenge vom Maße Null. Wo aber diese Ableitung existiert, muß sie den Wert haben:

$$u'(s)\int_{s_0}^{s}\frac{\partial F}{\partial x}\,ds + u(s)\,\frac{d}{ds}\int_{s_0}^{s}\frac{\partial F}{\partial x}\,ds.$$

Da nun, ebenfalls nach Lebesgue**), abgesehen von einer Punktmenge vom Maße Null, die Gleichung gilt:

$$\frac{d}{ds}\int_{s_0}^{s}\frac{\partial F}{\partial x}\,ds = \frac{\partial F}{\partial x},$$

so gilt in $(s_0 s_1)$, wieder abgesehen von einer Punktmenge vom Maße Null, die Gleichung:

$$\frac{d}{ds}\left[u(s)\int_{s_0}^{s}\frac{\partial F}{\partial x}\,ds\right] = u'(s)\int_{s_0}^{s}\frac{\partial F}{\partial x}\,ds + u(s)\cdot\frac{\partial F}{\partial x}. \tag{5}$$

Integriert man eine der vier Ableitungen von $u(s)\int_{s_0}^{s}\frac{\partial F}{\partial x}\,ds$ von s_0 bis s_1, so erhält man aber***) die Differenz:

$$\left[u(s)\int_{s_0}^{s}\frac{\partial F}{\partial x}\,ds\right]_{s_0}^{s_1},$$

die wegen der Voraussetzung $u(s_1) = 0$ den Wert Null hat. Da es aber bei Bildung des Lebesgueschen Integrals einer endlichen Funktion auf die Werte des Integranden in einer Punktmenge vom Maße Null nicht ankommt, so muß wegen (5) auch:

$$\int_{s_0}^{s_1}\left(u'(s)\int_{s_0}^{s}\frac{\partial F}{\partial x}\,ds\right)ds + \int_{s_0}^{s_1}u(s)\,\frac{\partial F}{\partial x}\,ds = 0$$

sein, wodurch Gleichung (4) bewiesen ist.

*) l. c., p. 128.
**) l. c., p. 124.
***) l. c., p. 128.

Wir können also weiter aussagen: Die beiden Integrale:

$$(6)\qquad \int_{s_0}^{s_1}\Big(\int_{s_0}^{s}\frac{\partial F}{\partial x}\,ds-\frac{\partial F}{\partial x'}\Big)u'(s)\,ds;\quad \int_{s_0}^{s_1}\Big(\int_{s_0}^{s}\frac{\partial F}{\partial y}\,ds-\frac{\partial F}{\partial y'}\Big)v'(s)\,ds$$

müssen für alle stetigen, abteilungsweise stetig differenzierbaren, in s_0 und s_1 verschwindenden Funktionen $u(s)$ und $v(s)$ den Wert Null haben.

Wir treffen nun für $u(s)$ die folgende Wahl. Es sei:

$$u(s)=0 \text{ in } (s_0\sigma_0);\quad u(s)=s-\sigma_0 \text{ in } (\sigma_0,\sigma_0+\sigma),$$
$$u(s)=\sigma \text{ in } (\sigma_0+\sigma,\sigma_1);\quad u(s)=\sigma-(s-\sigma_1) \text{ in } (\sigma_1,\sigma_1+\sigma),$$
$$u(s)=0 \text{ in } (\sigma_1+\sigma,s_1).$$

Durch Einführung dieser Werte in (6) erhält man:

$$(7)\qquad \int_{\sigma_0}^{\sigma_0+\sigma}\Big(\int_{s_0}^{s}\frac{\partial F}{\partial x}\,ds-\frac{\partial F}{\partial x'}\Big)\,ds=\int_{\sigma_1}^{\sigma_1+\sigma}\Big(\int_{s_0}^{s}\frac{\partial F}{\partial x}\,ds-\frac{\partial F}{\partial x'}\Big)\,ds,$$

wie man auch σ_0, σ_1 und σ wählen mag, wenn nur:

$$s_0\leqq\sigma_0<\sigma_0+\sigma\leqq\sigma_1<\sigma_1+\sigma\leqq s_1.$$

Nun beachte man, daß die vier Ableitungen nach s der Funktion

$$\Psi(s,S)=\int_{s}^{S}\Big(\int_{s_0}^{s}\frac{\partial F}{\partial x}\,ds-\frac{\partial F}{\partial x'}\Big)\,ds,\quad (s_0\leqq S<s_1)$$

durchaus zwischen endlichen Grenzen liegen. Nach einem schon einmal verwendeten Satz von Lebesgue hat sie daher, abgesehen von einer Punktmenge vom Maße Null, überall eine bestimmte Ableitung. Wir wählen für σ_0 und σ_1 solche Werte von s, für welche die genannte Funktion eine bestimmte Ableitung nach s, $\Psi'(s,S)$, hat. Aus Gleichung (7) — $\Psi(\sigma_0+\sigma,\sigma_0)=\Psi(\sigma_1+\sigma,\sigma_1)$ — folgt jetzt unmittelbar:

$$\Psi'(\sigma_0,\sigma_0)=\Psi'(\sigma_1,\sigma_1).$$

Nun hat aber das unbestimmte Integral einer durchaus endlichen Funktion diese Funktion überall zur Ableitung, ausgenommen höchstens eine Punktmenge vom Maße Null. Abgesehen von einer solchen Punktmenge ist daher überall:

$$\Psi'(s,\sigma_0)=\Psi'(s,\sigma_1)=\int_{s_0}^{s}\frac{\partial F}{\partial x}\,ds-\frac{\partial F}{\partial x'}.$$

Wir haben daher das Resultat: *Auf einer Kurve, die dem Integral* (1) *einen kleinsten (oder größten) Wert erteilt, müssen, abgesehen von einer Punktmenge vom Maße Null, durchweg die Gleichungen gelten:*

$$(8)\qquad \begin{cases} \int_{s_0}^{s} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y; \cos\gamma, \sin\gamma)\,ds - \frac{\partial F}{\partial x'}(x, y; \cos\gamma, \sin\gamma) = c, \\ \int_{s_0}^{s} \frac{\partial F}{\partial y}(x, y; \cos\gamma, \sin\gamma)\,ds - \frac{\partial F}{\partial y'}(x, y; \cos\gamma, \sin\gamma) = c', \end{cases}$$

wo c und c' Konstante bedeuten.

Wir bezeichnen nun mit $\Phi(s)$ und $\Phi_1(s)$ die stetigen Funktionen:

$$(9)\qquad \begin{cases} \Phi(s) = \int_{s_0}^{s} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y; \cos\gamma, \sin\gamma)\,ds - c, \\ \Phi_1(s) = \int_{s_0}^{s} \frac{\partial F}{\partial y}(x, y; \cos\gamma, \sin\gamma)\,ds - c', \end{cases}$$

und betrachten die Gleichungen:

$$(10)\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial F}{\partial x'}(x(s), y(s); \cos\varphi, \sin\varphi) = \Phi(s), \\ &\frac{\partial F}{\partial y'}(x(s), y(s); \cos\varphi; \sin\varphi) = \Phi_1(s). \end{aligned}$$

Abgesehen von einer Punktmenge vom Maße Null muß also der Winkel γ diesen beiden Gleichungen genügen. Es kann Werte von s geben, für die diese Gleichungen identisch in φ erfüllt sind; wegen der Stetigkeit aller in diesen Gleichungen auftretenden Funktionen müssen diese Werte von s eine abgeschlossene Menge bilden. Der Bogen $(s_0 s_1)$ unserer Kurve zerfällt also in eine höchstens abzählbar unendliche Menge von Bögen der folgenden zwei Arten:

1. Bögen, in deren sämtlichen Punkten die beiden Gleichungen (10) identisch in φ erfüllt sind.

2. Bögen, die in ihrem Inneren keinen einzigen Punkt enthalten, in dem die beiden Gleichungen (10) identisch erfüllt sind.

Betrachten wir zuerst die Bögen der ersteren Art. Es müssen auf denselben die Gleichungen bestehen:

$$-\sin\varphi \frac{\partial^2 F}{\partial x'^2}(x, y; \cos\varphi, \sin\varphi) + \cos\varphi \frac{\partial^2 F}{\partial x' \partial y'}(x, y; \cos\varphi, \sin\varphi) = 0,$$

$$-\sin\varphi \frac{\partial^2 F}{\partial x' \partial y'}(x, y; \cos\varphi, \sin\varphi) + \cos\varphi \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}(x, y; \cos\varphi, \sin\varphi) = 0,$$

und zwar identisch in φ. Wegen der Relationen:

$$\frac{1}{y'^2}\frac{\partial^2 F}{\partial x'^2}(x, y; x', y') = -\frac{1}{x'y'}\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y'}(x, y; x', y')$$
$$= \frac{1}{x'^2}\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}(x, y; x', y') = F_1(x, y; x', y')$$

reduzieren sie sich auf die eine Gleichung:

$$F_1(x, y; \cos\varphi, \sin\varphi) = 0,$$

die also identisch in φ bestehen muß. Die linke Seite dieser Gleichung ist eine analytische Funktion von x, y und φ; die Gleichung kann also in der Form geschrieben werden:

$$G(x, y)\varphi^m + [\varphi]_{m+1} = 0, \quad (m \geqq 0),$$

wo $G(x, y)$ eine analytische Funktion bedeutet. Hieraus aber folgt:

$$G(x(s), y(s)) = 0.$$

Wir sehen also: *Die Bögen der ersteren Art sind Bögen analytischer Kurven.*

Analytische Kurven aber, die dem Integral (1) einen kleinsten (oder größten) Wert erteilen, müssen den Lagrangeschen Gleichungen (2) genügen, die sich bekanntlich auf die eine Gleichung reduzieren:

$$(x'y'' - x''y')F_1 + \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y'} - \frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y} = 0. \tag{11}$$

Da auf den jetzt betrachteten Bögen F_1 identisch verschwindet, so sind sie *singuläre* Lösungen dieser Gleichungen.

Wir gehen nun über zur Untersuchung der Bögen von der zweiten Art. Die Gleichungen (10) sind periodisch in φ von der Periode 2π; es genügt also, die Wurzeln zu betrachten, die im Intervalle $0 \leqq \varphi < 2\pi$ liegen. Für einen im Inneren der jetzt betrachteten Bögen liegenden Punkt können diese Gleichungen nur eine endliche Anzahl von Wurzeln besitzen, die in dieses Intervall fallen; sie mögen mit $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ bezeichnet werden. Unter diesen Wurzeln kann sich eine mehrfache Wurzel φ_ν nur dann finden, wenn für eine der Zahlen $\nu = 1, 2, \cdots, n$ die Gleichung besteht:

$$F_1(x, y; \cos\varphi_\nu, \sin\varphi_\nu) = 0. \tag{12}$$

Man sieht wieder leicht, daß auf jedem Bogen die Punkte, in denen eine der Wurzeln φ_ν der Gleichungen (10) auch noch die Gleichung (12) befriedigt, eine abgeschlossene Menge bilden. In der Tat, haben die Gleichungen (10) an irgend einer Stelle n Wurzeln, die ins Intervall $(0, 2\pi)$ fallen, unter denen keine der Gleichung (12) genügt, so gilt dasselbe für eine Umgebung dieser Stelle. Der von uns betrachtete Bogen zerfällt also wieder in eine höchstens abzählbar unendliche Teilmenge von Bögen der folgenden zwei Arten:

1. Bögen, in deren jedem Punkte mindestens eine der Wurzeln der eichungen (10) auch noch die Gleichung (12) befriedigt, und

2. Bögen, die in ihrem Inneren keinen einzigen Punkt enthalten, in m die Gleichungen (10) und (12) eine Wurzel gemeinsam haben.

Der erste dieser beiden Fälle ist wieder leicht zu erledigen. Da die eichung (12) nicht identisch in φ_ν erfüllt ist — sonst würde ja der gen zu den bereits oben betrachteten gehören —, ergibt sich daraus φ_ν algebroide Funktion von x und y. Die Einführung dieser Werte in Gleichungen (10) zeigt dann, daß unser Bogen einer analytischen eichung genügt. Wie bei den bereits erledigten Bögen erkennen wir her auch bei den jetzt betrachteten, *daß sie den Lagrangeschen Gleiungen* (2) *genügen müssen, und zwar als singuläre Lösungen.*

Es bleibt der letzte und schwierigste Fall zu untersuchen, nämlich che Bögen, auf denen keine mehrfache Wurzel der Gleichungen (10) gt. Sei (σ_0, σ_1) ein beliebiger ganz im Inneren eines solchen Bogens gender Bogen. Auf (σ_0, σ_1) haben die Gleichungen (10) dann überall eichviel Wurzeln: $\varphi_1(s), \varphi_2(s), \cdots, \varphi_n(s)$. Dieselben sind stetige Funknen von s, und es gibt eine positive Konstante ε, so daß die Ungleiungen gelten:

$$|\varphi_\mu(s) - \varphi_\nu(s)| > \varepsilon, \quad (\mu, \nu = 1, 2, \cdots, n;\ \mu \neq \nu). \tag{3}$$

Ein oben erhaltenes Resultat besagt: In jedem Punkte des Bogens $\sigma_1)$, abgesehen höchstens von einer Punktmenge vom Maße Null, ist r Winkel $\gamma(s)$, den die positive Richtung der Kurventangente mit der sitiven x-Richtung bildet, gleich einer der Wurzeln $\varphi_\nu(s)$ der Gleiungen (10). Ferner ist der Winkel $\gamma(s)$ zufolge eines Satzes von Baire*) als Funktion der ersten Klasse auf dem Bogen (σ_0, σ_1) höchens punktweise unstetig, seine Stetigkeitsstellen liegen also auf diesem gen überall dicht.

Sei σ irgend eine Stetigkeitsstelle von $\gamma(s)$. Dann muß offenbar an r Stelle σ der Winkel $\gamma(\sigma)$ zusammenfallen mit einer der Wurzeln (s) der Gleichungen (10). In der Tat, wäre dies nicht der Fall, so be es, da für $s = \sigma$ alle $\varphi_\nu(s)$ und nach Voraussetzung auch $\gamma(s)$ stetig id, eine Umgebung von σ, in der nirgends $\gamma(s)$ mit einer der Funnen $\varphi_\nu(s)$ zusammenfiele, was unmöglich ist, da die Menge der Punkte, denen $\gamma(s)$ mit keinem $\varphi_\nu(s)$ zusammenfällt, nur das Maß Null hat, id somit kein Intervall enthalten kann.

An jeder Stetigkeitsstelle σ von $\gamma(s)$ ist daher für ein geeignetes ν: $\sigma) = \varphi_\nu(\sigma)$. Aus dem Bestehen der Ungleichungen (13) folgt aber, daß

*) R. Baire, Leçons sur les fonctions discontinues, p. 83.

dann eine Umgebung von σ geben muß, in der nirgends $\gamma(s) = \varphi_\mu(s)$, $+\nu$) wird; da nun aber überall, abgesehen von einer Punktmenge vom aße Null, $\gamma(s)$ gleich einer der Wurzeln $\varphi_\mu(s)$ der Gleichungen (10) ein muß, so sehen wir:

Jede Stetigkeitsstelle von $\gamma(s)$ läßt sich mit einem Intervall um- geben, in dem — abgesehen von einer Punktmenge vom Maße Null — $\gamma(s)$ mit ein und derselben stetigen Funktion $\varphi_\nu(s)$ übereinstimmt.

Das ist aber nur so möglich, daß in diesem Intervall $\gamma(s)$ und $\varphi_\nu(s)$ *ausnahmslos* übereinstimmen. In der Tat hat man für alle diesem Inter- vall angehörenden s und S:

$$x(s) - x(S) = \int_S^s \cos\gamma(s)\,ds = \int_S^s \cos\varphi_\nu(s)\,ds;$$

$$y(s) - y(S) = \int_S^s \sin\gamma(s)\,ds = \int_S^s \sin\varphi_\nu(s)\,ds.$$

Aus der Stetigkeit von $\varphi_\nu(s)$ folgt aber:

$$\frac{dx}{ds} = \cos\varphi_\nu(s); \quad \frac{dy}{ds} = \sin\varphi_\nu(s)$$

und somit: $$\operatorname{tg}\gamma(s) = \frac{dy}{ds} : \frac{dx}{ds} = \operatorname{tg}\varphi_\nu(s),$$

wie behauptet wurde.

Wir können also unser Resultat präziser so aussprechen: Jede keitsstelle s_0 von $\gamma(s)$ liegt im Inneren eines Intervalls, in dem $\gamma(s)$ weg mit einer und derselben stetigen Funktion $\varphi_\nu(s)$ übereinstimm

Unter allen den Punkt s_0 enthaltenden Intervallen, in denen chung $\gamma(s) = \varphi_\nu(s)$ besteht, gibt es ein größtes. Wir behaupten, den Endpunkten dieses größtmöglichen Intervalls die In der Tat, wir haben vorausgesetzt, d Tangente besitzt. Die eben dieses größtmögli En

Die Punkte, die nicht innere Punkte eines solchen Intervalls*) sind, bilden bekanntlich eine abgeschlossene Menge M; dieselbe ist nirgends dicht, da diese Intervalle — ebenso wie die Stetigkeitsstellen von $\gamma(s)$ — überall dicht liegen. Diese Menge muß weiter eine perfekte Menge sein, d. h. es müssen ihre sämtlichen Punkte Häufungspunkte sein. In der Tat, gemäß der Definition der Menge M ist jeder ihrer Punkte Unstetigkeitspunkt von $\gamma(s)$. Enthielte sie nun einen isolierten Punkt, so müßte derselbe Endpunkt eines Intervalls δ_1 und Anfangspunkt eines anderen δ_2 sein. In δ_1 wäre $\gamma(s) = \varphi_\nu(s)$, in δ_2 wäre $\gamma(s) = \varphi_\mu(s)$; in dem betrachteten Punkte aber würde, wie oben gezeigt, $\gamma(s) = \varphi_\nu(s) = \varphi_\mu(s)$ sein. Wegen der Ungleichungen (13) folgt daraus $\mu = \nu$; d. h. der betrachtete Punkt wäre kein Unstetigkeitspunkt von $\gamma(s)$, entgegen der Voraussetzung, daß er zur Menge M gehört.

Wir sehen also: Die Unstetigkeitsstellen von $\gamma(s)$ bilden eine perfekte Menge; in allen Punkten dieser Menge, die Endpunkte eines der die Menge definierenden Intervalle sind, fällt $\gamma(s)$ zusammen mit einer der Wurzeln $\varphi_\nu(s)$ der Gleichungen (10).

Als Funktion der ersten Klasse kann $\gamma(s)$ nach dem Satze von R. Baire**) auch bezüglich dieser perfekten Menge nur punktweise unstetig sein, d. h. ihre Stetigkeitsstellen bezüglich dieser Menge liegen in dieser Menge überall dicht. Sei also σ ein Punkt von M, der Stetigkeitspunkt von $\gamma(s)$ in bezug auf M ist. Dann muß wieder $\gamma(\sigma)$ mit einer der Wurzeln $\varphi_\nu(\sigma)$ der Gleichungen (10) zusammenfallen. Denn in der Tat, es ist bekanntlich jeder Punkt M Häufungspunkt von Endpunkten der die Menge M definierenden Intervalle. In jedem solchen Intervallendpunkte aber hat, wie erwähnt, $\gamma(s)$ einen der Werte $\varphi_\nu(s)$; wäre nun $\gamma(\sigma)$ verschieden von allen $\varphi_\nu(\sigma)$, so ließe sich σ so mit einem Intervall umgeben, daß auch in allen Punkten von M, die in dieses Intervall fallen, $\gamma(s)$ von allen $\varphi_\nu(s)$ verschieden wäre; das ist aber unmöglich. Es muß also eine Gleichung bestehen: $\gamma(\sigma) = \varphi_\nu(\sigma)$.

Hieraus aber folgt, daß σ Stetigkeitsstelle von $\gamma(\sigma)$ im gewöhnlichen Sinne ist (also nicht bloß in bezug auf die perfekte Menge M). In der Tat, in allen den Intervallen, deren Endpunkte sich in σ häufen, muß ebenfalls $\gamma(s) = \varphi_\nu(s)$ sein. Denn lägen in jeder Nähe von σ Intervalle, in denen $\gamma(s) = \varphi_\mu(s)$ wäre $(\mu + \nu)$, so bestände dieselbe Beziehung in den Endpunkten dieser Intervalle, und σ könnte wegen der Ungleichungen

*) Zu ihnen gehören u. a. die Endpunkte der genannten Intervalle.

**) R. Baire, l. c., p. 88 ff. Dabei heißt eine Funktion $f(s)$ stetig bezüglich einer perfekten Menge M im Punkte s_0 dieser Menge, wenn zu jedem positiven ε ein positives η gehört, so daß in allen Punkten s von M, für welche $|s - s_0| < \eta$ ist, auch $|f(s) - f(s_0)| < \varepsilon$ wird.

) auch nicht Stetigkeitsstelle von $\gamma(s)$ in bezug auf die Menge M sein. läßt sich also σ mit einem Intervall umgeben, in dem wieder — abehen höchstens von einer Punktmenge vom Maße Null — die Beiung gilt: $\gamma(s) = \varphi_\nu(s)$, und wir haben schon oben gesehen, daß dann ie Beziehung in dem genannten Intervall ausnahmslos gilt.

Wir sehen also: In jedem Punkte von M, in dem $\gamma(s)$ stetig in bezauf M ist, ist $\gamma(s)$ auch stetig im gewöhnlichen Sinne. Andererseits n aber die Menge M gemäß ihrer Definition nur Unstetigkeitsstellen $\gamma(s)$ enthalten. Dieser Widerspruch läßt nur eine Lösung zu: *Die nge M enthält keinen einzigen Punkt.*

Wir haben also das wichtige Resultat: Der Winkel $\gamma(s)$ ist auf dem zen Bogen (σ_0, σ_1) eine stetige Funktion von s. Die Gleichungen (8), denen wir bisher nur beweisen konnten, daß sie auf unserem Bogen esehen von einer Punktmenge vom Maße Null bestehen, *müssen dauf diesem Bogen ausnahmslos erfüllt sein.*

Aus dem Bestehen der Gleichungen (8) kann man nun aber, da, wie iesen, der Winkel γ als Funktion von s stetig ist, und ferner auf erem Bogen der Ausdruck $F_1(x, y, \cos\gamma, \sin\gamma)$ durchaus von Null schieden ist, wie Du Bois-Reymond und Hilbert gezeigt haben*), ließen, *daß dieser Bogen ebenfalls den Lagrangeschen Gleichungen* (2) *ügen muß.*

Das Schlußresultat dieser Untersuchungen läßt sich nunmehr so aussechen: *Jeder rektifizierbare, durchweg mit einer Tangente versehene rvenbogen, der dem Integrale* (1) *einen kleinsten (oder größten) Wert er, ist zusammengesetzt aus Teilbögen, deren jeder analytisch ist und den grangeschen Gleichungen genügt.* Wo zwei verschiedene solche Bögen inander grenzen, ist:

$$F_1(x, y, \cos\gamma, \sin\gamma) = 0.$$

Ein solches Linienelement ist ein singuläres Element der Lagrangeen Gleichungen.

Um auch die sogenannten *diskontinuierlichen* Lösungen unseres Variansproblems zu erhalten, müssen wir eine weitere Verallgemeinerung serer Voraussetzungen eintreten lassen. Während wir bisher von der asse von Kurven, unter denen wir die Lösung unseres Problems suchten, ausgesetzt haben, sie seien rektifizierbar und durchweg mit einer Tanite versehen, wollen wir von denselben außer der Rektifizierbarkeit nur hr verlangen, daß sie in jedem Punkte eine vordere Tangente besitzen. h. also, es müssen die durch die Gleichungen (3) definierten Grenzrte nur für positives h bestehen. Dann bedeute γ wieder den Winkel,

*) Siehe die in Fußnote auf S. 254 angeführte Literatur.

den die vordere Tangente mit der x-Achse einschließt. Wie oben sieht man, daß $\cos\gamma$ und $\sin\gamma$ und somit auch γ selbst, als Funktionen von s betrachtet, von der ersten Baireschen Klasse und somit auf jeder perfekten Menge höchstens punktweise unstetig sind. Alle auftretenden Integrale haben daher auch hier einen Sinn.

Wie oben werden die beiden Gleichungen (8) abgeleitet, die wieder, abgesehen von einer Punktmenge vom Maße Null, überall erfüllt sein müssen, ein Resultat, das sich auch so aussprechen läßt:

Auf unserer Kurve müssen

$$\frac{\partial F}{\partial x'}(x, y; \cos\gamma, \sin\gamma) \quad \text{und} \quad \frac{\partial F}{\partial y'}(x, y; \cos\gamma, \sin\gamma)$$

bezw. übereinstimmen mit den durch die Gleichungen (9) definierten stetigen Funktionen $\Phi(s)$ und $\Phi_1(s)$, wieder abgesehen von einer Punktmenge vom Maße Null.

Wieder läßt sich unser Kurvenbogen zerlegen in eine höchstens abzählbar unendliche Menge von Teilbögen der folgenden drei Arten:

1. Bögen, auf denen die Gleichung:

$$F_1(x, y; \cos\varphi, \sin\varphi) = 0$$

identisch in φ erfüllt ist.

2. Bögen, in deren jedem Punkte mindestens eine Wurzel φ_ν der Gleichungen (10) auch noch der eben angeschriebenen Gleichung genügt.

3. Bögen, die in ihrem Inneren keinen einzigen Punkt enthalten, in dem eine Wurzel φ_ν der Gleichungen (10) auch noch der Gleichung $F_1 = 0$ genügt.

Von den Bögen der ersten und zweiten Art erkennt man wie oben, daß sie *stückweise analytisch sind und sich aus Bögen von singulären Lösungen der Lagrangeschen Gleichungen zusammensetzen müssen*, die aber nunmehr auch Ecken bilden können. Bei Betrachtung der Bögen dritter Art schlagen wir, analog wie oben, den folgenden Weg ein:

Die Stetigkeitsstellen von $\gamma(s)$ müssen wegen des Satzes von Baire auf einem solchen Bogen überall dicht liegen. In jedem Stetigkeitspunkte muß $\gamma(s)$ mit einer der Wurzeln $\varphi_\nu(s)$ der Gleichungen (10) übereinstimmen, und dieser Punkt läßt sich dann mit einem Intervall umgeben, in dessen Innerem durchweg $\gamma(s) = \varphi_\nu(s)$ ist. Hieraus schließen wir wieder, daß die Unstetigkeitsstellen von $\gamma(s)$ eine abgeschlossene Menge M bilden, nur können wir hier nicht mehr wie oben schließen, daß diese Menge keine isolierten Punkte enthalten kann; hingegen ergibt sich wie oben, daß die Menge M keine perfekte Teilmenge enthalten kann. Nun ist aber jede abgeschlossene Menge, die keine perfekte Teilmenge enthält, abzählbar*), so daß wir schließlich sehen:

*) Vgl. etwa Schoenflies, Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten, p. 65 ff.

Auf den Bögen der dritten Art bilden die Unstetigkeitsstellen von $\gamma(s)$ — falls es solche überhaupt gibt — eine abgeschlossene abzählbare Menge. Jeder von zwei solchen Unstetigkeitspunkten begrenzte Teilbogen genügt den Lagrangeschen Gleichungen, und in den isolierten Unstetigkeitsstellen schließen sich diese Teilbögen so aneinander, daß die Ausdrücke:

$$\frac{\partial F}{\partial x'}(x, y; \cos\gamma, \sin\gamma); \quad \frac{\partial F}{\partial y'}(x, y; \cos\gamma, \sin\gamma)$$

stetig bleiben. Mehr aber läßt sich, wie man aus Beispielen sehen kann, aus dem Verschwinden der ersten Variation nicht ableiten.

§ 2.

In diesem Abschnitte wollen wir die folgende Aufgabe behandeln*): Es seien zwischen den drei unbekannten Funktionen $y(x)$, $z(x)$, $s(x)$ die zwei Differentialgleichungen erster Ordnung vorgeschrieben:

$$\begin{aligned} f(y', z', s', y, z, s; x) &= 0, \\ g(y', z', s', y, z, s; x) &= 0. \end{aligned} \tag{14}$$

Ferner seien für $x = a_1$ die Anfangswerte vorgeschrieben:

$$y(a_1) = y^{(1)}, \quad z(a_1) = z^{(1)}, \quad s(a_1) = s^{(1)}, \tag{15}$$

für $x = a_2$ hingegen die beiden Endwerte:

$$z(a_2) = z^{(2)}, \quad s(a_2) = s^{(2)}. \tag{16}$$

Es soll ein System von drei diesen Bedingungen genügenden Funktionen $y(x)$, $z(x)$, $s(x)$ gefunden werden, so daß an der Stelle $x = a_2$ die Funktion $y(x)$ einen kleinsten Wert hat (d. h. mit anderen Worten: wenn $Y(x)$, $Z(x)$, $S(x)$ ein zweites System von Funktionen bedeutet, das ebenfalls den Bedingungen (14) — (16) genügt und dem ersten hinlänglich benachbart ist, so soll stets $Y(a_2) - y(a_2) > 0$ sein).

Wir machen die folgenden Voraussetzungen:

1. Die beiden in (14) auftretenden Funktionen f und g mögen für alle in Betracht kommenden Systeme ihrer Argumente regulär-analytisch sein.

2. Die drei Funktionen $y(x)$, $z(x)$, $s(x)$ sollen stetig und stetig differenzierbar sein.

3. Nach Einsetzen dieser drei Funktionen in den Ausdruck:

$$\frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial g}{\partial z'} - \frac{\partial f}{\partial z'}\frac{\partial g}{\partial y'}, \tag{17}$$

möge derselbe durchaus von Null verschieden ausfallen.

*) Dabei schließe ich mich in Gedankengang und Bezeichnungsweise so eng als möglich an die in der Einleitung zitierte Abhandlung von Hilbert an.

Wir wollen beweisen, daß, wenn außerdem die später zu entwickelnde Bedingung (27) erfüllt ist, *die Funktionen* $y(x)$, $z(x)$, $s(x)$ *analytisch sein müssen und zusammen mit zwei ebenfalls analytischen Funktionen* $\lambda(x)$ *und* $\mu(x)$ *die Lagrangeschen Differentialgleichungen:*

$$(18)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial y'}&=0,\\ \frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial z}-\frac{d}{dx}\frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial z'}&=0,\\ \frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial s}-\frac{d}{dx}\frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial s'}&=0 \end{aligned}$$

befriedigen müssen.

Nach dem Vorgange von D. Hilbert setzen wir nun:

$$S(x)=s(x)+\varepsilon_1\sigma_1(x)+\varepsilon_2\sigma_2(x),$$

wo $\sigma_1(x)$ und $\sigma_2(x)$ für $x=a_1$ und $x=a_2$ verschwinden mögen, sonst aber willkürlich sind, und bestimmen die beiden Funktionen $Y(x,\varepsilon_1,\varepsilon_2)$, $Z(x,\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ als diejenigen Lösungen der Differentialgleichungen:

$$(19)\qquad \begin{aligned} f(Y', Z', S', Y, Z, S; x)&=0,\\ g(Y', Z', S', Y, Z, S; x)&=0, \end{aligned}$$

die für $x=a_1$ die Anfangswerte $y^{(1)}$ und $z^{(1)}$ haben (siehe Gleichung (15)). Die Funktionen Y und Z werden dann analytische Funktionen*) von ε_1 und ε_2 in der Umgebung der Stelle (0, 0) dieser beiden Veränderlichen und reduzieren sich für $\varepsilon_1=\varepsilon_2=0$ auf $y(x)$ und $z(x)$. Diejenigen unter ihnen, für welche auch noch

$$Z(a_2,\varepsilon_1,\varepsilon_2)=z(a_2)$$

ist, gehören daher — für genügend kleine ε_1, ε_2 — zu den Funktionen, denen gegenüber $y(x)$ Minimum sein soll. Die Theorie der gewöhnlichen Maxima und Minima mit Nebenbedingungen zeigt, daß es dann zwei Konstanten l, m gibt, die nicht beide Null sind und für welche

$$(20)\qquad \begin{aligned} \left[\frac{\partial(l\,Y(a_2,\varepsilon_1,\varepsilon_2)+mZ(a_2,\varepsilon_1,\varepsilon_2))}{\partial\varepsilon_1}\right]_{\varepsilon_1=\varepsilon_2=0}&=0,\\ \left[\frac{\partial(l\,Y(a_2,\varepsilon_1,\varepsilon_2)+mZ(a_2,\varepsilon_1,\varepsilon_2))}{\partial\varepsilon_2}\right]_{\varepsilon_1=\varepsilon_2=0}&=0 \end{aligned}$$

wird. Differenziert man die Gleichungen (19) nach ε_1 und ε_2 und setzt dann $\varepsilon_1=\varepsilon_2=0$, so bekommt man:

---

*) Der Umstand, daß die unabhängige Veränderliche x in (19) in nicht analytischer Weise vorkommt, stört hierbei nicht. Siehe Picard, Traité III, p. 157.

$$\frac{\partial f}{\partial y'}\left[\frac{\partial Y'}{\partial \varepsilon_1}\right]_0 + \frac{\partial f}{\partial y}\left[\frac{\partial Y}{\partial \varepsilon_1}\right]_0 + \frac{\partial f}{\partial z'}\left[\frac{\partial Z'}{\partial \varepsilon_1}\right]_0 + \frac{\partial f}{\partial z}\left[\frac{\partial Z}{\partial \varepsilon_1}\right]_0 + \frac{\partial f}{\partial s'}\sigma_1' + \frac{\partial f}{\partial s}\sigma_1 = 0,$$

$$\frac{\partial g}{\partial y'}\left[\frac{\partial Y'}{\partial \varepsilon_1}\right]_0 + \frac{\partial g}{\partial y}\left[\frac{\partial Y}{\partial \varepsilon_1}\right]_0 + \frac{\partial g}{\partial z'}\left[\frac{\partial Z'}{\partial \varepsilon_1}\right]_0 + \frac{\partial g}{\partial z}\left[\frac{\partial Z}{\partial \varepsilon_1}\right]_0 + \frac{\partial g}{\partial s'}\sigma_1' + \frac{\partial g}{\partial s}\sigma_1 = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y'}\left[\frac{\partial Y'}{\partial \varepsilon_2}\right]_0 + \frac{\partial f}{\partial y}\left[\frac{\partial Y}{\partial \varepsilon_2}\right]_0 + \frac{\partial f}{\partial z'}\left[\frac{\partial Z'}{\partial \varepsilon_2}\right]_0 + \frac{\partial f}{\partial z}\left[\frac{\partial Z}{\partial \varepsilon_2}\right]_0 + \frac{\partial f}{\partial s'}\sigma_2' + \frac{\partial f}{\partial s}\sigma_2 = 0,$$

$$\frac{\partial g}{\partial y'}\left[\frac{\partial Y'}{\partial \varepsilon_2}\right]_0 + \frac{\partial g}{\partial y}\left[\frac{\partial Y}{\partial \varepsilon_2}\right]_0 + \frac{\partial g}{\partial z'}\left[\frac{\partial Z'}{\partial \varepsilon_2}\right]_0 + \frac{\partial g}{\partial z}\left[\frac{\partial Z}{\partial \varepsilon_2}\right]_0 + \frac{\partial g}{\partial s'}\sigma_2' + \frac{\partial g}{\partial s}\sigma_2 = 0.$$

Durch Multiplikation dieser Gleichungen mit zwei später zu bestimmenden Funktionen $\lambda(x)$ und $\mu(x)$, Addition und Integration folgt weiter:

$$(21)\quad \begin{aligned}
&\int_{a_1}^{a_2}\Big\{\frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial y'}\left[\frac{\partial Y'}{\partial \varepsilon_1}\right]_0 + \frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial y}\left[\frac{\partial Y}{\partial \varepsilon_1}\right]_0 + \frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial z'}\left[\frac{\partial Z'}{\partial \varepsilon_1}\right]_0 \\
&\quad + \frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial z}\left[\frac{\partial Z}{\partial \varepsilon_1}\right]_0 + \frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial s'}\sigma_1' + \frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial s}\sigma_1\Big\}\,dx = 0, \\
&\int_{a_1}^{a_2}\Big\{\frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial y'}\left[\frac{\partial Y'}{\partial \varepsilon_2}\right]_0 + \frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial y}\left[\frac{\partial Y}{\partial \varepsilon_2}\right]_0 + \frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial z'}\left[\frac{\partial Z'}{\partial \varepsilon_2}\right]_0 \\
&\quad + \frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial z}\left[\frac{\partial Z}{\partial \varepsilon_2}\right]_0 + \frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial s'}\sigma_2' + \frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial s}\sigma_2\Big\}\,dx = 0.
\end{aligned}$$

Bisher konnten wir uns wörtlich dem Hilbertschen Gedankengang anschließen. Um nun die Voraussetzung einer zweimaligen Differenzierbarkeit von $y(x)$, $z(x)$, $s(x)$ zu vermeiden, müssen wir von hier ab einen abweichenden Weg einschlagen. Wir formen die Gleichungen (21) durch partielle Integration um:

$$(22)\quad \begin{cases}
\displaystyle\int_{a_1}^{a_2}\frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial y}\,dx\cdot\left[\frac{\partial Y}{\partial \varepsilon_1}\right]_0^{x=a_2} + \int_{a_1}^{a_2}\frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial z}\left[\frac{\partial Z}{\partial \varepsilon_1}\right]_0^{x=a_2} \\
\displaystyle+\int_{a_1}^{a_2}\Big\{\frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial y'} - \int_{a_1}^{x}\frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial y}\,dx\Big\}\left[\frac{\partial Y'}{\partial \varepsilon_1}\right]_0 dx \\
\displaystyle+\int_{a_1}^{a_2}\Big\{\frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial z'} - \int_{a_1}^{x}\frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial z}\,dx\Big\}\left[\frac{\partial Z'}{\partial \varepsilon_1}\right]_0 dx \\
\displaystyle+\int_{a_1}^{a_2}\frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial s'}\sigma_1'\,dx + \int_{a_1}^{a_2}\frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial s}\sigma_1\,dx = 0,
\end{cases}$$

$$
(22)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_{a_1}^{a_2} \frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial y}\,dx\cdot\left[\frac{\partial Y}{\partial \varepsilon_2}\right]_0^{x=a_2}+\int_{a_1}^{a_2}\frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial z}\,dx\left[\frac{\partial Z}{\partial \varepsilon_2}\right]_0^{x=a_2} \\ \displaystyle+\int_{a_1}^{a_2}\left\{\frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial y'}-\int_{a_1}^{x}\frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial y}\,dx\right\}\left[\frac{\partial Y'}{\partial \varepsilon_2}\right]dx \\ \displaystyle+\int_{a_1}^{a_2}\left\{\frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial z'}-\int_{a_1}^{x}\frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial z}\,dx\right\}\left[\frac{\partial Z'}{\partial \varepsilon_2}\right]_0 dx \\ \displaystyle+\int_{a_1}^{a_2}\frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial s'}\,\sigma_2'\,dx+\int_{a_1}^{a_2}\frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial s}\,\sigma_2\,dx=0. \end{cases}
$$

Wir werden weiter unten beweisen, daß die beiden Gleichungen*):

$$
(23)\quad \begin{aligned} \frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial y'}-\left[\frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial y'}\right]^{x=a_2}-\int_{a_2}^{x}\frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial y}\,dx=0, \\ \frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial z'}-\left[\frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial z'}\right]^{x=a_2}-\int_{a_2}^{x}\frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial z}\,dx=0, \end{aligned}
$$

wenn noch die Anfangswerte von $\lambda(x)$ und $\mu(x)$ für $x=a_2$ willkürlich vorgeschrieben sind, stets ein und nur ein Paar von Funktionen $\lambda(x)$, $\mu(x)$ bestimmen. Wir wählen diese Anfangswerte so, daß:

$$
(24)\qquad \left[\frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial y'}\right]^{x=a_2}=l,\qquad \left[\frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial z'}\right]^{x=a_2}=m
$$

wird (wo l und m die in (20) eingeführten Größen bedeuten).

Man erkennt aus (23) unmittelbar, daß nun:

$$
\frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial y'}-\int_{a_1}^{x}\frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial y}\,dx=\left[\frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial y'}\right]^{x=a_1},
$$

$$
\frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial z'}-\int_{a_1}^{x}\frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial z}\,dx=\left[\frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial z'}\right]^{x=a_1}
$$

wird, so daß die Gleichungen (22) sich wegen (24) und (20) auf:

*) Wir können nicht durch Differentiation von (23) zu einem System von Differentialgleichungen für λ und μ übergehen, da wir nicht wissen, ob die auftretenden Größen differenzierbar sind.

$$(25)\qquad \begin{aligned} &\int_{a_1}^{a_2} \frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial s'}\,\sigma_1'\,dx + \int_{a_1}^{a_2} \frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial s}\,\sigma_1\,dx = 0,\\ &\int_{a_1}^{a_2} \frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial s'}\,\sigma_2'\,dx + \int_{a_1}^{a_2} \frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial s}\,\sigma_2\,dx = 0 \end{aligned}$$

reduzieren. Schreiben wir nun, wie Hilbert:

$$(\lambda, \mu; \sigma) = \int_{a_1}^{a_2} \left\{ \frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial s'}\,\sigma' + \frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial s}\,\sigma \right\} dx,$$

so haben wir: Für irgend zwei in $x = a_1$ und $x = a_2$ verschwindende Funktionen σ_1, σ_2 gibt es stets ein offenbar nicht identisch verschwindendes Lösungssystem der Gleichungen (23), so daß:

$$(\lambda, \mu; \sigma_1) = 0 \quad \text{und} \quad (\lambda, \mu; \sigma_2) = 0$$

wird.

Von hier an können wir wieder die Schlußweise von Hilbert benützen. Entweder es gilt $(\lambda, \mu; \sigma) = 0$ für alle σ, oder es gibt ein σ_3, so daß $(\lambda, \mu; \sigma_3) \neq 0$. Dann aber gibt es offenbar ein Lösungssystem λ', μ' von (23), für welches $(\lambda', \mu'; \sigma_3) = 0$. Wäre nun nicht für alle $\sigma : (\lambda', \mu'; \sigma) = 0$, so gäbe es ein σ_4, so daß $(\lambda', \mu'; \sigma_4) \neq 0$ wird. Nach dem obigen Satze aber müßte es dann ein Lösungssystem λ'', μ'' von (23) geben, für welches

$$(\lambda'', \mu''; \sigma_3) = 0 \quad \text{und} \quad (\lambda'', \mu''; \sigma_4) = 0$$

ist. Wir werden nun aber weiter unten zeigen, daß zwischen $\lambda, \lambda', \lambda''$; μ, μ', μ'' eine Relation bestehen muß:

$$a\lambda + a'\lambda' + a''\lambda'' = 0; \qquad a\mu + a'\mu' + a''\mu'' = 0,$$

in der nicht a, a', a'' alle drei verschwinden. Aus den angeschriebenen Gleichungen aber würde folgen*)

$$a = a' = a'' = 0.$$

Es gibt also ein Lösungssystem von (23) — es werde wieder mit λ, μ bezeichnet —, so daß:

$$(\lambda, \mu; \sigma) = 0$$

für alle in $x = a_1$ und $x = a_2$ verschwindenden σ. Bringt man nun aber $(\lambda, \mu; \sigma)$ auf die Form:

$$(\lambda, \mu; \sigma) = \int_{a_1}^{a_2} \left\{ \frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial s'} - \int_{a_1}^{x} \frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial s}\,dx \right\} \sigma'\,dx,$$

*) Hilbert l. c.

so ergibt eine bekannte Schlußweise*) das Bestehen der Gleichung:

$$(26) \qquad \frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial s'} - \left[\frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial s'}\right]^{x=a_2} - \int_{a_2}^{x} \frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial s}\, dx = 0.$$

Aus den Gleichungen (14), (23) und (26) ergeben sich nun aber, vorausgesetzt daß:

$$(27) \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial^2(\lambda f+\mu g)}{\partial y'^2} & \frac{\partial^2(\lambda f+\mu g)}{\partial y'\partial z'} & \frac{\partial^2(\lambda f+\mu g)}{\partial y'\partial s'} & \frac{\partial f}{\partial y'} & \frac{\partial g}{\partial y'} \\ \frac{\partial^2(\lambda f+\mu g)}{\partial z'\partial y'} & \frac{\partial^2(\lambda f+\mu g)}{\partial z'^2} & \frac{\partial^2(\lambda f+\mu g)}{\partial z'\partial s'} & \frac{\partial f}{\partial z'} & \frac{\partial g}{\partial z'} \\ \frac{\partial^2(\lambda f+\mu g)}{\partial s'\partial y'} & \frac{\partial^2(\lambda f+\mu g)}{\partial s'\partial z'} & \frac{\partial^2(\lambda f+\mu g)}{\partial s'^2} & \frac{\partial f}{\partial s'} & \frac{\partial g}{\partial s'} \\ \frac{\partial f}{\partial y'} & \frac{\partial f}{\partial z'} & \frac{\partial f}{\partial s'} & 0 & 0 \\ \frac{\partial g}{\partial y'} & \frac{\partial g}{\partial z'} & \frac{\partial g}{\partial s'} & 0 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

ist, y', z', s', λ, μ als differenzierbare Funktionen von x.**) Es können nunmehr die Gleichungen (23) und (26) nach x differenziert werden, wodurch sie in die Gleichungen (18) übergehen; die Funktionen y, z, s, λ, μ genügen also dem Differentialgleichungssysteme (14), (18); woraus unter Berücksichtigung von (27) weiter folgt, daß alle diese Funktionen analytisch sind.

Es sind somit alle unsere Behauptungen erwiesen, und es sind nur die Beweise der die Gleichungen (23) betreffenden Sätze, die zur Verwendung gelangten, nachzutragen.***)

Angenommen, es sei eine Lösung λ, μ der Gleichungen (23) gegeben, so erkennt man aus diesen Gleichungen, daß die Ausdrücke:

$$(28) \qquad v = \frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial y'}, \qquad w = \frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial z'}$$

nach x differenzierbar sind. Wegen der Voraussetzung (17) lassen sich umgekehrt λ, μ als lineare Funktionen von v, w mit in x stetigen Koeffizienten ausdrücken. Differenzieren wir nun die Gleichungen (23) nach x und substituieren die Veränderlichen v, w, so erhalten wir ein System linearer Differentialgleichungen:

---

*) Siehe Bolza, Lectures on the Calculus of Variations, p. 22.

**) Nach einem bekannten Satze über die impliziten Funktionen. Siehe etwa C. Jordan, Cours d'analyse I, p. 82.

***) In meinem Aufsatze „Über die Lagrangesche Multiplikatorenmethode in der Variationsrechnung" (Monatshefte f. Math. u. Phys. 14 (1903)) habe ich viel allgemeinere Systeme dieser Art betrachtet und die Existenz ihrer Lösungen nachgewiesen.

$$v' = a(x)\,v + a_1(x)\,w,$$
$$w' = b(x)\,v + b_1(x)\,w$$

für v und w, und die darin auftretenden Koeffizienten sind stetige Funktionen von x. Bedeutet umgekehrt v, w irgend ein System von Lösungen dieser Differentialgleichungen, und bestimmt man λ, μ aus den Gleichungen (28), so ist ersichtlich, daß λ, μ den Gleichungen (23) genügen. Man erkennt nunmehr leicht, daß tatsächlich die Sätze bestehen:

Die Gleichungen (23) besitzen immer eine und nur eine Lösung λ, μ, die für $x = a_2$ vorgeschriebene Werte annimmt. Zwischen je drei Lösungen von (23) besteht immer eine linear-homogene Relation mit konstanten Koeffizienten.

Es sind somit auch unsere ursprünglichen Behauptungen vollständig bewiesen.

Verlag von B. G. TEUBNER in LEIPZIG.

FRANZ NEUMANNS
GESAMMELTE WERKE.

Herausgegeben von seinen Schülern.

II. Band.

Mit einem Bildnis Franz Neumanns aus dem 86. Lebensjahre in Heliogravüre.

[XVI u. 620 S.] 4. 1906. geh. n. ℳ 36.—

Die Herausgabe der Neumannschen Werke ist im Ganzen auf drei Bände berechnet. Der vorliegende II. Band enthält vorzugsweise: Wärme und Licht. In nicht allzu langer Zeit werden hoffentlich die beiden andern Bände ebenfalls erscheinen. Und zwar soll der I. Band Neumanns geometrische und krystallographische Arbeiten umfassen. Endlich wird der III. Band eine große optische Abhandlung (aus den Schriften der Berliner Akademie der Wissenschaften von 1841), ferner elektrische und magnetische Untersuchungen, sowie auch eine Untersuchung über die Laplaceschen Ypsilons und deren Anwendung zu Interpolationszwecken enthalten.

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig

Geschichte der Mathematik
im 16. und 17. Jahrhundert

von **H. G. Zeuthen,**
Professor an der Universität Kopenhagen.

Deutsch von **Raphael Meyer**

[VIII u. 434 S.] gr. 8. 1903. geh. n. ℳ 16.—, in Leinwand geb. n. ℳ 17.—

Ähnliche Zwecke wie in seiner früher erschienenen Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter verfolgend, ist der Verfasser besonders bestrebt gewesen, die reiche innere Entwicklung der Mathematik selbst hervorzuheben, die in den behandelten Jahrhunderten stattfand und einen gewissen Abschluß fand.

In diesen wird das Gebiet der Algebra, und zwar vorzüglich durch Vietes Tätigkeit, derart erweitert, daß sie allmählich die Stufe der Entwicklung erreichte, auf der wir sie in der analytischen Geometrie Descartes' stehen sehen. In ihnen wurden die aus dem Altertum ererbten und wieder aufgenommenen Infinitesimaluntersuchungen mit den Hilfsmitteln derselben, welche Kepler, Galilei und Huygens für den Bedarf ihrer astronomischen und physikalischen Untersuchungen einführten, und erreichten nach und nach eine solche Blüte, daß sie einerseits in Leibnizens Differential- und Integralrechnung die noch heute gültige äußere Gestalt annahmen, andererseits ganz unabhängig von dieser Gestalt die Grundlage der *Principia Newtons* bilden konnten. Ferner zeigte im 2. dieser Jahrhunderte *Fermat* bei der Behandlung des verschiedenartigsten mathematischen Themata, daß der große Mathematiker keine entwickelte mathematische Technik nötig hat, um die schwierigsten Verhältnisse klar zu durchschauen; Desargues und Pascal schlugen in der Geometrie neue Bahnen ein, die erst anderthalb Jahrhunderte später fortgesetzt wurden, während Neppers Logarithmen gleich sowohl praktische Anwendung als Einfluß auf die übrige Mathematik erhielten.

Um in der übrigen Darstellung immer die mathematische Entwicklung verfolgen zu können, hat der Verfasser einen ausführlichen literarischen und biographischen Überblick vorausgeschickt.

Mathematische Annalen.

Herausgegeben von F. Klein, W. v. Dyck, D. Hilbert, O. Blumenthal.

Neudruck der vergriffenen Bände.

Durch anastatischen Neudruck der seither vergriffenen Bände 3, 4, 5, 6, 7, 31, 32, 33, 50, 51, 52, 53, bin ich wieder in der Lage komplette Serien liefern zu können. Der Einzelpreis für diese Bände beträgt je 28 Mark.

Leipzig. B. G. Teubner.

INHALT.

	Seite
Über die Verteilung der Primideale in den Idealklassen eines algebraischen Zahlkörpers. Von Edmund Landau in Berlin	445
Zur Theorie allgemeiner Zetafunktionen. II. Von Paul Epstein in Straßburg i/E.	505
Über die Grundlagen der Mengenlehre und das Kontinuumproblem. Von Julius König in Budapest. (Zweite Mitteilung)	517
Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten. Von J. Lüroth in Freiburg i/Br. (Mit 2 Figuren im Text)	322
Einige elementare Bemerkungen über den Prozeß der analytischen Fortsetzung. Von E. Study in Bonn	339
Ein Satz über eindeutige Abbildung und seine Anwendung in der Variationsrechnung. Von Oskar Bolza in Chicago	346
Über die Herleitung der Differentialgleichungen der Variationsrechnung. Von Hans Hahn in Wien	363
Berichtigung von J. Lüroth	388

Wir ersuchen unsere geehrten Herren Mitarbeiter, etwaige, den Abhandlungen beizufügende Figuren — gleichviel ob dieselben im Texte selbst oder auf besonderen Tafeln veröffentlicht werden sollen — im Interesse einer raschen und exakten Ausführung stets auf besonderen Blättern, wenn möglich in der gewünschten Größe und in tunlichst präziser Zeichnung dem Manuskripte beilegen zu wollen. Außerdem wird um möglichst genaue Angabe der Adresse gebeten.

Die Redaktion.

☞ **Jeder Band der Annalen besteht aus 4 Heften und umfaßt ca. 36 Druckbogen. Um jedoch in jedem Heft nur abgeschlossene Artikel zu geben, werden die einzelnen Hefte mitunter von ungleicher Stärke sein.**

Der Preis für den Band von 4 Heften beträgt 20 Mark; jährlich erscheinen etwa 4—6 Hefte. Alle Buchhandlungen und Postanstalten nehmen Bestellungen an.

Verantwortl. Redaktion: **F. Klein**, Göttingen, Wilh.-Weber-Str. 3, **W. v. Dyck**, München, Hildegardstr. 1½, **David Hilbert**, Göttingen, Wilh.-Weber-Str. 28, **Otto Blumenthal**, Aachen, Rütscherstraße 37.

Zusendungen sind zu richten an die Mitglieder der auf der Titelseite genannten Gesamtredaktion.

Hierzu Beilagen von **B. G. Teubner in Leipzig**, welche wir der Beachtung unserer Leser bestens empfehlen.

Stanford Univer
FEB 26 1907

MATHEMATISCHE ANNALEN

BEGRÜNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN.

Unter Mitwirkung der Herren

PAUL GORDAN, ADOLPH MAYER, CARL NEUMANN, MAX NOETHER
KARL VONDERMÜHLL, HEINRICH WEBER

gegenwärtig herausgegeben

von

Felix Klein
in Göttingen

Walther v. Dyck
in München

David Hilbert
in Göttingen

Otto Blumenthal
in Aachen

63. Band. 3. Heft.

Mit 1 Figur im Text.

Ausgegeben am 5. Februar 1907.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1907.

☞ Gesamtregister zu den Mathematischen Annalen. Band 1—50. Zusammengestellt von A. Sommerfeld. Mit einem Bildnis von A. Clebsch in Heliogravüre. [XI u. 202 S.] gr. 8. geh. n. Mk. 7.—

GAUSS' WERKE

Weiterführung der von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen veranstalteten

GESAMTAUSGABE VON C. F. GAUSS' WERKEN

Soeben erschien:

Band VII. Theoria motus und Theoretisch-Astronomischer Nachlaß. (Parabolische Bewegung, Störungen der Ceres und der Pallas, Theorie des Mondes.) 680 S. 4. 1906. . . . . kart. n. 30 Mark.

VERLAG VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG.

Verlag von B. G. TEUBNER in LEIPZIG.

Gino Loria:

Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven.

Theorie und Geschichte.

Autorisierte, nach dem italienischen Manuskript bearb. deutsche Ausgabe von

Fritz Schütte,

Oberlehrer am Königl. Gymnasium zu Danzig.

Mit 174 Figuren auf 17 lithographierten Tafeln.

[XXI u. 744 S.] gr. 8. 1902. In Leinwand geb. n. ℳ 22.—

Während die mathematische Literatur verschiedene Werke aufweist, welche die allgemeine Theorie ebener Kurven, insbesondere der algebraischen, behandeln, fehlt eine Zusammenstellung der bisher bekannten speziellen ebenen Kurven und der an ihnen gewonnenen Resultate. Diese Lücke will das vorliegende Werk auszufüllen versuchen. Es behandelt die Erzeugungsweisen, Gleichungen, Eigenschaften und die wichtigsten Sätze für eine ansehnliche Zahl spezieller Kurven; es berücksichtigt nicht nur ihre Verallgemeinerungen, die Verwandtschaft und den Zusammenhang mit anderen Kurven, sondern bietet auch kurze Darlegungen der Theorie spezieller Kurven-Gruppen. Zahlreiche literarische und historische Quellennachweise ermöglichen es dem Leser, sich in der Literatur einer jeden Kurve zu orientieren; über 200 Figuren dienen nicht nur der Erläuterung des Textes, sondern bilden auch, indem sie in genauer Zeichnung die Gestalt der betrachteten Kurven klarlegen, eine hoffentlich recht wertvolle Beigabe des Werkes.

Bemerkung zu dem Kontinuitätsbeweise für die Lösbarkeit des Riemannschen Problems.

(Auszug aus einem Briefe an Herrn D. Hilbert.)

Von

Ludwig Schlesinger in Klausenburg.

In Ihrem geschätzten Schreiben vom 27. September 1905 bemerken Sie, daß „die Mannigfaltigkeit M*) die Grenzen $b_1 = \infty$, $b_2, b_3, \cdots$ beliebig; $b_2 = \infty$, $b_1, b_3, \cdots$ beliebig; $\cdots$ besitzt, d. h. jedenfalls an diesen Stellen ebenfalls die Kenntnis der analytischen Abhängigkeit der β von den b nötig ist, damit die Kontinuitätsmethode anwendbar wird".

Ich habe mich in meiner Arbeit darauf beschränkt zu sagen, daß die von Herrn Poincaré aufgestellten Prinzipien der méthode de continuité den Schluß gestatten, daß auch jedem Punkte von M ein Punkt von M entsprechen müsse. Mit Rücksicht auf Ihre Bemerkung möchte ich mir aber erlauben, etwas ausführlicher auf die Darlegung der in Betracht kommenden Schlüsse einzugehen, namentlich um zu zeigen, daß sich auch das Verhalten der β, wenn die b in eine der singulären Stellen der Mannigfaltigkeit M einrücken, in sehr einfacher Weise direkt angeben läßt.

Es sei

$$\frac{dy_\varkappa}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{\sigma} \frac{A_{\lambda\varkappa}^{(\nu)}}{x - a_\nu} y_\lambda \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n) \tag{1}$$

ein kanonisches lineares Differentialsystem, für das (wie in meiner erwähnten Abhandlung) der Einfachheit wegen vorausgesetzt werden möge, daß die Wurzeln der zu den singulären Punkten $a_1, \cdots, a_\sigma, a_{\sigma+1} = \infty$ gehörigen determinierenden Fundamentalgleichungen

$$A_{ik}^{(\nu)} - \delta_{ik} r = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, \sigma + 1), \tag{2}$$

wo

$$A_{ik}^{(\sigma+1)} = -\sum_{\nu=1}^{\sigma} A_{ik}^{(\nu)},$$

*) Siehe meine Abhandlung Crelles Journal Bd. 130, S. 43.

:eine ganzzahligen Differenzen aufweisen. Es seien $r_1^{(\nu)}, \cdots, r_n^{(\nu)}$ die Wu ler Gleichung (2). Die zum singulären Punkte a_ν gehörige Integraln hat die Form:

$$(\eta_{ik}^{(\nu)}) = ((x-a_\nu)^{r_i^{(\nu)}} \varphi_{ik}^{(\nu)}),$$

wo die $\varphi_{ik}^{(\nu)}$ Funktionen bedeuten, die in der Umgebung von $x = a_\nu$ holon sind und deren Determinante $\varphi_{ik}^{(\nu)}$ für $x = a_\nu$ von Null verschiede Aus den Gleichungen

$$\left(\sum_{\nu=1}^{\sigma} \frac{A_{ik}^{(\nu)}}{x-a_\nu}\right) = (\eta_{ik}^{(\nu)})^{-1} \left(\frac{d\eta_{ik}^{(\nu)}}{dx}\right)$$

oder, wenn

$$(\varphi_{ik}^{(\nu)})^{-1} = (\psi_{ik}^{(\nu)})$$

gesetzt wird, aus

$$\sum_{\nu=1}^{\sigma} \frac{A_{ik}^{(\nu)}}{x-a_\nu} - \sum_{\lambda=1}^{n} \left(\psi_{i\lambda}^{(\nu)} \frac{d\varphi_{\lambda k}^{(\nu)}}{dx} + \frac{r_\lambda^{(\nu)}}{x-a_\nu} \psi_{i\lambda}^{(\nu)} \varphi_{\lambda k}^{(\nu)}\right)$$

folgt die Darstellung

$$(3) \qquad (A_{ik}^{(\nu)}) = (\varphi_{ik}^{(\nu)})_{a_\nu}^{-1} \begin{pmatrix} r_1^{(\nu)} & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & \cdots & r_n^{(\nu)} \end{pmatrix} (\varphi_{ik}^{(\nu)})_{a_\nu},$$

wo der den Matrizen angehängte Buchstabenindex andeuten soll, d Elemente der Matrix für den betreffenden Wert von x zu nehmer

Es möge nun (y_{ik}) diejenige Integralmatrix bedeuten, die si den regulären Punkt $x = x_0$ auf die Einheitsmatrix (δ_{ik}) reduziert, un

$$(y_{ik}) = (c_{ik}^{(\nu)}) (\eta_{ik}^{(\nu)});$$

dann ist also

$$(c_{ik}^{(\nu)}) = (\eta_{ik}^{(\nu)})_{x_0}^{-1},$$

und folglich ist die Fundamentalsubstitution, die (y_{ik}) bei Umkre Punktes a_ν erfährt, in der Form

$$(\mathsf{A}_{ik}^{(\nu)}) = (\eta_{ik}^{(\nu)})_{x_0}^{-1} \begin{pmatrix} e^{2\pi\sqrt{-1}r_1^{(\nu)}} & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & \cdots & e^{2\pi\sqrt{-1}r_n^{(\nu)}} \end{pmatrix} (\eta_{ik}^{(\nu)})_{x_0}$$

oder in der Form

$$(4) \qquad (\mathsf{A}_{ik}^{(\nu)}) = (\varphi_{ik}^{(\nu)})_{x_0}^{-1} \begin{pmatrix} e^{2\pi\sqrt{-1}r_1^{(\nu)}} & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & \cdots & e^{2\pi\sqrt{-1}r_n^{(\nu)}} \end{pmatrix} (\varphi_{ik}^{(\nu)})_{x_0}$$

dargestellt.

Denken wir uns für ein bestimmtes Differentialsystem (1) die $r_\lambda^{(\nu)}$ ein für alle Male fixiert, so hängen die $A_{ik}^{(\nu)}$ noch von gewissen willkürlichen Parametern $b_1, \cdots, b_N$, wo $N = n^2\sigma - (\sigma+1)n + 1$, ab, deren Mannigfaltigkeit M in dem Sinne als eine geschlossene zu bezeichnen ist, daß sie durch keine Mannigfaltigkeit von um Eins niedrigerer, also $(2N-1)^{\text{ter}}$ Dimension begrenzt wird.*) In der Tat haben als singuläre Stellen von M nur diejenigen Wertesysteme der $b_1, \cdots, b_N$ zu gelten, für die mindestens eines der $A_{ik}^{(\nu)}$ unendlich wird, und diese bilden Mannigfaltigkeiten von höchstens $2N-2$ Dimensionen; wir bezeichnen die Gesamtheit dieser singulären Mannigfaltigkeiten mit S.

Gehen wir andererseits von einem bestimmten System von Fundamentalsubstitutionen $(\mathsf{A}_{ik}^{(\nu)})$ aus, und denken wir uns die Wurzeln der zugehörigen Fundamentalgleichungen fixiert, so hängen die $\mathsf{A}_{ik}^{(\nu)}$ von gewissen willkürlichen Parametern $\beta_1, \cdots, \beta_N$ ab, deren Mannigfaltigkeit M ebenfalls als eine geschlossene bezeichnet werden muß, indem ihre singulären Stellen auch wieder nur diejenigen $\beta_1, \cdots, \beta_N$ sind, für die mindestens eines der $\mathsf{A}_{ik}^{(\nu)}$ unendlich wird, so daß die Gesamtheit dieser Stellen Σ also auch aus höchstens $(2N-2)$-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten besteht.

Legen wir das Differentialsystem (1) der Betrachtung zugrunde, so sind nach einem Satze des Herrn Poincaré die $\mathsf{A}_{ik}^{(\nu)}$ als ganze transzendente Funktionen der $A_{ik}^{(\nu)}$ bestimmt. Die inversen dieser ganzen transzendenten Funktionen, d. h. also die $A_{ik}^{(\nu)}$ als Funktionen der $\mathsf{A}_{ik}^{(\nu)}$ sind im allgemeinen unendlich vieldeutig, wenn wir aber die $r_\lambda^{(\nu)}$ fixieren, so ist nach dem Fundamentalsatze der Nr. XII meiner Arbeit**) ein eindeutiges Zweigsystem dieser inversen Funktionen festgelegt, es sind also die $\beta_1, \cdots, \beta_N$ monogene eindeutige Funktionen der $b_1, \cdots, b_N$

$$\beta_k = E_k(b_1, \cdots, b_N) \qquad (k = 1, 2, \cdots, N), \tag{5}$$

deren inverse Funktionen ebenfalls eindeutig sind. Die singulären Stellen der Funktionen (5) sind die Stellen S. — Um nun das Verhalten der $\mathsf{A}_{ik}^{(\nu)}$ zu untersuchen, wenn die $b_1, \cdots, b_N$ in eine Stelle S einrücken, d. h. wenn eines der $A_{ik}^{(\nu)}$ so unendlich wird, daß die $r_\lambda^{(\nu)}$ festbleiben, greifen wir auf die Gleichungen (3), (4) zurück. Nach (3) ist

$$A_{ik}^{(\nu)} = \sum_{\lambda=1}^{n} r_\lambda^{(\nu)} \left(\psi_{i\lambda}^{(\nu)} \varphi_{\lambda k}^{(\nu)}\right)_{x=a_\nu},$$

soll also $A_{ik}^{(\nu)}$ in der angegebenen Weise unendlich groß werden, so muß mindestens einer der Werte $\left(\psi_{i\lambda}^{(\nu)} \varphi_{\lambda k}^{(\nu)}\right)_{x=a_\nu}$ $(\lambda = 1, 2, \cdots, n)$ unendlich groß

*) Vergl. Poincaré, Acta Mathematica Bd. 4, p. 277 oben.

**) Crelles Journal Bd. 130, p. 35.

werden. Die Funktionen $\psi_{i\lambda}^{(\nu)}\varphi_{\lambda k}^{(\nu)}$ sind aber ihrer Definition gemäß mit Ausnahme der Stellen

$$a_\mu (\mu \neq \nu) \quad \text{und} \quad \infty$$

allenthalben holomorph. Denken wir uns diese Funktionen in der Umgebung von $x = a_\nu$ dargestellt:

$$\psi_{i\lambda}^{(\nu)}\varphi_{\lambda k}^{(\nu)} = E_{i\lambda k\nu}^{(0)} + E_{i\lambda k\nu}^{(1)}(x-a_\nu) + \cdots$$

und dann nach dem Punkte $x = x_0$ hin in der durch die Querschnitte (a_ν, ∞) $(\nu = 1, 2, \cdots, \sigma)$ zerschnittenen Ebene fortgesetzt:

$$\psi_{i\lambda}^{(\nu)}\varphi_{\lambda k}^{(\nu)} = C_{i\lambda k\nu}^{(0)} + C_{i\lambda k\nu}^{(1)}(x-x_0) + \cdots,$$

so kann man $E_{i\lambda k\nu}^{(0)}$ dem absoluten Betrage nach stets so groß wählen, daß $C_{i\lambda k\nu}^{(0)}$ dem absoluten Betrage nach größer wird als eine beliebig große positive Zahl; da aber nach (4)

$$\mathsf{A}_{ik}^{(\nu)} = \sum_{\lambda=1}^{n} e^{2\pi V-1\, r_\lambda^{(\nu)}} C_{i\lambda k\nu}^{(0)}$$

ist, so heißt dies nichts anderes, als daß, wenn ein $A_{ik}^{(\nu)}$ so ins Unendliche rückt, daß die $r_k^{(\nu)}$ fest bleiben, mindestens ein $\mathsf{A}_{ik}^{(\nu)}$ ebenfalls ins Unendliche rückt. Damit ist also gezeigt, daß, wenn die $b_1, \cdots, b_N$ in eine Stelle von S einrücken, die durch die Funktionen (5) gegebenen $\beta_1, \cdots, \beta_N$ in eine Stelle von Σ einrücken müssen. Es kann folglich*) keine Mannigfaltigkeit $(2N-1)^{\text{ter}}$ Dimension geben, die die Mannigfaltigkeit M der $\beta_1, \cdots, \beta_N$ derart in zwei Gebiete zerschneidet, daß in dem einen dieser Gebiete alle diejenigen $\beta_1, \cdots, \beta_N$ enthalten sind, die als Wertsysteme der Funktionen (5) zum Vorschein kommen, wenn die $b_1, \cdots, b_N$ die ganze Mannigfaltigkeit M durchlaufen. Denn ein Punkt dieser hypothetischen Mannigfaltigkeit $(2N-1)^{\text{ter}}$ Dimension könnte nur entweder dadurch erreicht werden, daß die Funktionaldeterminante der β nach den b verschwindet, was ausgeschlossen ist, weil die b sich aus den Gleichungen (5) als eindeutige Funktionen der β ergeben, oder dadurch, daß die b in eine Stelle S einrücken, was aber ebenfalls ausgeschlossen ist, weil dann, wie gezeigt worden ist, die β in eine Stelle Σ einrücken, und Σ höchstens von $(2N-2)^{\text{ter}}$ Dimension ist. Der Wertevorrat der Funktionen (5) muß also die ganze Mannigfaltigkeit M erfüllen, d. h. es entspricht jedem Punkte von M auch ein Punkt von M.

Klausenburg, den 11. Oktober 1905.

*) Vergl. den analogen Schluß bei Poincaré, Acta Mathematica Bd. 4, p. 277, 278.

Über asymptotische Darstellungen der Lösungen linearer Differentialsysteme als Funktionen eines Parameters.

Von

Ludwig Schlesinger in Klausenburg.

Einleitung.

Wenn der Punkt $x = \infty$ eine isolierte Unbestimmtheitsstelle der Lösungen einer linearen Differentialgleichung (oder eines Systems linearer Differentialgleichungen erster Ordnung) mit der unabhängigen Variabeln x ist, so kommt — wie Herr Poincaré gezeigt hat*) — den nach fallenden Potenzen von x fortschreitenden Normalreihen des Herrn Thomé, die den Differentialgleichungen formell genügen, aber im allgemeinen divergent sind, die Bedeutung zu, daß sie für große Werte von x gewisse Integrale asymptotisch darstellen. Hängen die Koeffizienten der Differentialgleichung oder des Differentialsystems von einem Parameter μ so ab, daß der Punkt $\mu = \infty$ eine isolierte Unbestimmtheitsstelle der Integrale ist, so kann man Reihenentwicklungen aufstellen, die in bezug auf μ eine ähnliche Struktur aufweisen, wie die Thoméschen Normalreihen in bezug auf x, und denen die Eigenschaft zukommt, daß sie gewisse Lösungssysteme für große Werte von μ asymptotisch darstellen. — Herr Horn, der ja auch zur Theorie der durch die Thoméschen Normalreihen vermittelten asymptotischen Darstellungen so wertvolle Beiträge geliefert hat, betrachtet in zwei in diesen Annalen**) veröffentlichten Arbeiten für gewisse lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung die nach einem Parameter fortschreitenden formalen Entwicklungen, und weist ihre Eigenschaft, für reale Werte der unabhängigen Variabeln und für große Werte des Parameters die asymptotische Darstellung gewisser Lösungssysteme zu liefern, mit Hilfe der Methode der sukzessiven Annäherungen nach. — Ich nehme in dieser Arbeit die

*) American Journal Bd. VII (1885), S. 203 ff. Acta Mathem. Bd. VIII (1885), S. 275 ff.

**) Bd. 52, S. 271 ff. und S. 340 ff.

Untersuchung für ein beliebiges lineares Differentialsystem und für beliebige komplexe Werte der unabhängigen Variabeln in Angriff. Als mir bemerkenswert erscheinende Ergebnisse hebe ich die folgenden hervor. Der Nachweis der asymptotischen Darstellung läßt sich durch vorübergehende Verschmelzung des Parameters mit der unabhängigen Variabeln auf das fundamentale Lemma des Herrn Poincaré*) gründen, in ähnlicher Weise, wie es Herr Horn**) für den Fall der Thoméschen Normalreihen durchgeführt hat. — Wenn die Koeffizienten des Differentialsystems rationale Funktionen der unabhängigen Variabeln sind, so spielen gewisse algebraische Funktionen und die zu diesen gehörigen Abelschen Integrale eine bedeutsame Rolle, die letzteren reduzieren sich in einem besonders wichtigen Spezialfalle auf Integrale erster Gattung. — Die gefundenen asymptotischen Darstellungen gewähren vollständige Einsicht in die Natur der Grenzfälle, die auftreten, wenn man sich***) der Kontinuitätsmethode bedient, um die Existenz der durch das Riemannsche Problem postulierten Funktionssysteme zu erweisen, und ich möchte bemerken, daß die hier mitzuteilenden Untersuchungen aus dem Streben nach dieser Einsicht erwachsen sind. Ein Auszug aus dieser Arbeit ist in den Comptes rendus der Pariser Akademie†) erschienen.

I.

Formale Aufstellung der nach fallenden Potenzen des Parameters fortschreitenden Reihen. Ihr Charakter als asymptotische Darstellungen gewisser Integralsysteme.

Die Koeffizienten a_{ix} des homogenen linearen Differentialsystems

$$\frac{dy_x}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda a_{\lambda x} \qquad (x = 1, 2, \cdots, n), \tag{A}$$

mögen von einem Parameter μ dergestalt abhängen, daß sie in der Form von Reihen

$$a_{ix} = \mu^r \left(a_{ix}^{(0)} + \frac{1}{\mu} a_{ix}^{(1)} + \cdots \text{ in inf.} \right) \quad (i, x = 1, 2, \cdots, n) \tag{1}$$

dargestellt werden können, wo r eine positive ganze Zahl, die $a_{ix}^{(0)}, a_{ix}^{(1)}, \cdots$ Funktionen von x bedeuten, und die Reihen (1) in einer von x unabhängigen Umgebung von $\mu = \infty$

$$\mu > R, \tag{2}$$

konvergieren. Die a_{ix} werden, um die Vorstellung zu fixieren, als rationale

*) American Journal Bd. VII, S. 204—209.

**) Acta Mathem. Bd. XXIV, S. 259 ff.; Sammlung Schubert L (1905), S. 190 ff.

***) Vergl. die vorhergehende Note.

†) Tome CXLII, p. 1031—1033, 7. Mai 1906.

Funktionen von x vorausgesetzt. Eine Integralmatrix (y_{ix}) des Systems (A), die sich für den regulären Wert $x = x_0$ auf die (von x unabhängige) Matrix (γ_{ix}) reduziert, wo in der durch (2) bestimmten Umgebung von $\mu = \infty$:

$$\gamma_{ix} = \mu^{\lambda}\left(\gamma_{ix}^{(0)} + \frac{\gamma_{ix}^{(1)}}{\mu} + \cdots \text{ in inf.}\right), \tag{3}$$

λ eine positive ganze Zahl, läßt sich bekanntlich*) in der Form

$$y_{ix} = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} y_{ix}^{(\nu)}\mu^{\nu} \tag{4}$$

darstellen, wo die $y_{ix}^{(\nu)}$ Funktionen von x bedeuten, und die Reihen für alle regulären Werte von x und für alle endlichen Werte von μ, die der Ungleichung (2) genügen, unbedingt und gleichmäßig konvergieren. Es handelt sich um die Untersuchung der durch die Reihen (4) definierten Funktionen von μ in der Umgebung der Unbestimmtheitsstelle $\mu = \infty$.

Der Einfachheit wegen beschränken wir uns auf den Fall $\tau = 1$, $\lambda = 0$, bemerken aber, daß die darzulegende Methode mutatis mutandis auch allgemein anwendbar bleibt.

Wir setzen in das Differentialsystem (A) für y_x die Ausdrücke

$$y_x = e^{\mu\omega}\left(y_x^{(0)} + \frac{1}{\mu}y_x^{(1)} + \cdots \text{ in inf.}\right) \qquad (x = 1, 2, \cdots, n) \tag{5}$$

ein und suchen die ω, $y_x^{(0)}$, $y_x^{(1)}$, $\cdots$ als Funktionen von x so zu bestimmen, daß die Ausdrücke (5) formell das System (A) befriedigen. Nach Division durch $e^{\mu\omega}$ ergibt sich:

$$\frac{dy_x^{(0)}}{dx} + \frac{1}{\mu}\frac{dy_x^{(1)}}{dx} + \cdots + \mu\frac{d\omega}{dx}\left(y_x^{(0)} + \frac{1}{\mu}y_x^{(1)} + \cdots\right) = \sum_{\lambda=1}^{n}\mu\left(y_\lambda^{(0)} + \frac{1}{\mu}y_\lambda^{(1)} + \cdots\right)\left(a_{\lambda x}^{(0)} + \frac{1}{\mu}a_{\lambda x}^{(1)} + \cdots\right)$$

und durch Vergleichung der Koeffizienten der Potenzen von μ auf beiden Seiten:

$$\frac{d\omega}{dx}y_x^{(0)} = \sum_{\lambda} y_\lambda^{(0)} a_{\lambda x}^{(0)}, \tag{6}$$

$$\frac{dy_x^{(0)}}{dx} + \frac{d\omega}{dx}y_x^{(1)} = \sum_{\lambda}\left(y_\lambda^{(0)} a_{\lambda x}^{(1)} + y_\lambda^{(1)} a_{\lambda x}^{(0)}\right), \tag{7}$$

. . . . . .

$$\frac{dy_x^{(\nu)}}{dx} + \frac{d\omega}{dx}y_x^{(\nu+1)} = \sum_{\lambda}\left(y_\lambda^{(0)} a_{\lambda x}^{(\nu+1)} + y_\lambda^{(1)} a_{\lambda x}^{(\nu)} + \cdots + y_\lambda^{(\nu+1)} a_{\lambda x}^{(0)}\right) \tag{8}$$

$$(\nu = 1, 2, \cdots).$$

*) Vergl. Horn, Mathem. Annalen Bd. 52, 1899, S. 343.

Die Gleichungen (6) oder

$$\sum_{\lambda}\left(a_{\lambda\varkappa}^{(0)}-\delta_{\lambda\varkappa}\frac{d\omega}{dx}\right)y_{\lambda}^{(0)}=0 \qquad (\varkappa=1,2,\cdots,n) \tag{6a}$$

erfordern, daß

$$\left|a_{i\varkappa}^{(0)}-\delta_{i\varkappa}\frac{d\omega}{dx}\right|=0 \qquad (i,\varkappa=1,2,\cdots,n) \tag{9}$$

sei, was eine Differentialgleichung erster Ordnung und n^{ten} Grades für ω ist; bezeichnet man mit $\bar{\omega}_1,\cdots,\bar{\omega}_n$ die Wurzeln der *charakteristischen Gleichung*

$$\left|a_{i\varkappa}^{(0)}-\delta_{i\varkappa}\bar{\omega}\right|=0, \tag{10}$$

die, sofern man die $a_{i\varkappa}^{(0)}$ als rationale Funktionen von x voraussetzt, $\bar{\omega}$ als algebraische Funktion von x determiniert, so erhält man

$$\omega_i=\int\bar{\omega}_i\,dx \qquad (i=1,2,\cdots,n) \tag{11}$$

und dann vermöge (6a):

$$\sum_{\lambda}\left(a_{\lambda\varkappa}^{(0)}-\delta_{\lambda\varkappa}\,\bar{\omega}_i\right)y_{i\lambda}^{(0)}=0, \qquad (\varkappa=1,2,\cdots,n) \tag{12}$$

woraus sich, allgemein zu reden, die Verhältnisse

$$y_{i1}^{(0)}:y_{i2}^{(0)}:\cdots:y_{in}^{(0)} \tag{13}$$

als algebraische Funktionen von x bestimmen lassen. Wenn die Diskriminante der Gleichung (10), in bezug auf $\bar{\omega}$, in x nicht identisch verschwindet, so sind die $\bar{\omega}_1,\cdots,\bar{\omega}_n$ voneinander verschieden; *wir halten vorläufig an dieser Voraussetzung fest.* — Um die Ausnützung der Rekursionsformeln (8) zur Bestimmung des noch unbekannten Proportionalitätsfaktors der $y_{i1}^{(0)},\cdots,y_{in}^{(0)}$ und der folgenden Koeffizienten in den aus (5) für $\omega=\omega_i$ hervorgehenden Reihenentwicklungen übersichtlich zu gestalten, verfahren wir wie folgt.

Es bedeute $u_{i\lambda}^{(0)}$ irgend ein Lösungssystem der Gleichungen (12). Dann ist

$$\left(u_{i\varkappa}^{(0)}\right)\left(a_{i\varkappa}^{(0)}\right)\left(u_{i\varkappa}^{(0)}\right)^{-1}=\left(\bar{\omega}_i\,\delta_{i\varkappa}\right). \tag{14}$$

Setzen wir nun

$$y_{\varkappa}=\sum_{\lambda=1}^{n}z_{\lambda}\,u_{\lambda\varkappa}^{(0)}, \tag{15}$$

so genügen die $z_1,\cdots,z_n$ dem Differentialsysteme

$$\frac{dz_{\varkappa}}{dx}=\sum_{\lambda=1}^{n}b_{\lambda\varkappa}z_{\lambda}, \qquad (\varkappa=1,2,\cdots,n) \tag{B}$$

wo*) zwischen den (b_{ix}) und den (a_{ix}) die Beziehung:

$$(16) \qquad (a_{ix}) = (u_{ix}^{(0)})^{-1}\,(b_{ix})\,(u_{ix}^{(0)}) + (u_{ix}^{(0)})^{-1}\left(\frac{du_{ix}^{(0)}}{dx}\right)$$

besteht. Hiernach sind mit Rücksicht auf die Gleichung (14) die b_{ix} in der Form

$$(17) \qquad b_{ix} = \mu\left(\delta_{ix}\,\bar{\omega}_i + \frac{b_{ix}^{(1)}}{\mu} + \frac{b_{ix}^{(2)}}{\mu^2} + \cdots\right)$$

als für $|\mu| > R$ konvergente Reihen darstellbar, worin

$$(18) \qquad \begin{cases} (b_{ix}^{(1)}) = (u_{ix}^{(0)})\,(a_{ix}^{(1)})\,(u_{ix}^{(0)})^{-1} - \left(\dfrac{du_{ix}^{(0)}}{dx}\right)(u_{ix}^{(0)})^{-1}, \\ (b_{ix}^{(\nu)}) = (u_{ix}^{(0)})\,(a_{ix}^{(\nu)})\,(u_{i\lambda}^{(0)})^{-1}. \qquad (\nu = 2, 3, \cdots) \end{cases}$$

Setzen wir nun gleich

$$(19) \qquad z_{ix} = e^{\bar{\omega}_i x}\left(z_{ix}^{(0)} + \frac{1}{\mu}\,z_{ix}^{(1)} + \cdots\right), \qquad (i, x = 1, 2, \cdots, n)$$

so lauten die der Gleichung (8) analog gebildeten Rekursionsformeln für die $z_{ix}^{(\nu)}$:

$$(20) \qquad \frac{dz_{ix}^{(\nu)}}{dx} + \bar{\omega}_i\,z_{ix}^{(\nu+1)} = \sum_{\lambda=1}^{n}\left(z_{i\lambda}^{(0)}\,b_{\lambda x}^{(\nu+1)} + \cdots + z_{i\lambda}^{(\nu)}\,b_{\lambda x}^{(1)} + z_{i\lambda}^{(\nu+1)}\,\delta_{\lambda x}\,\bar{\omega}_\lambda\right), \qquad (\nu = 0, 1, 2, \cdots)$$

während sich aus der der Gleichung (6) entsprechenden Gleichung:

$$(21) \qquad \begin{aligned} \bar{\omega}_i\,z_{ix}^{(0)} &= z_{ix}^{(0)}\,\bar{\omega}_x, \\ z_{ix}^{(0)} &= 0, \qquad i \neq x \end{aligned}$$

ergibt. Die Gleichung (20) liefert nun für $\nu = 0$ und $i = x$

$$(22) \qquad \frac{dz_{ii}^{(0)}}{dx} = z_{ii}^{(0)}\,b_{ii}^{(1)}, \quad z_{ii}^{(0)} = \text{const.}\,e^{\int b_{ii}^{(1)}\,dx},$$

und für $i \neq x$

$$(22a) \qquad \bar{\omega}_i\,z_{ix}^{(1)} = z_{ii}^{(0)}\,b_{ix}^{(1)} + \bar{\omega}_x\,z_{ix}^{(1)},$$

woraus sich die $z_{ix}^{(1)}$ $(i \neq x)$ bestimmen. Die $z_{ii}^{(1)}$ ergeben sich dann aus (20) für $\nu = 1$, $i = x$ mittels Quadraturen**) usw. Gehen wir von den

*) Vergl. z. B. die Formel (III.) meiner Arbeit, Crelles Journal, Bd. 128, S. 267.

**) Man findet:

$$\frac{dz_{ii}^{(1)}}{dx} = c_i\,e^{\int b_{ii}^{(1)}\,dx}\left[b_{ii}^{(2)} + \sum_{\lambda \neq i}\frac{b_{i\lambda}^{(1)}\,b_{\lambda i}^{(1)}}{\bar{\omega}_i - \bar{\omega}_\lambda}\right] + z_{ii}^{(1)}\,b_{ii}^{(1)}, \quad (c_i = \text{const.}).$$

Ausdrücken (19) zu den das Differentialsystem (A) befriedigenden Ausdrücken

$$y_{ix} = e^{u\,\omega_i}\left(y_{ix}^{(0)} + \frac{1}{\mu}\,y_{ix}^{(1)} + \cdots\right) \tag{23}$$

zurück, so ist

$$(y_{ix}) = (z_{ix})\,(u_{ix}^{(0)}), \tag{24}$$

also nach (21), (22):

$$y_{ix}^{(0)} = c_i\, e^{\int b_{ii}^{(1)}\,dx}\, u_{ix}^{(0)} \tag{25}$$

usw. — Wir haben somit unter der Voraussetzung, daß die Diskriminante der charakteristischen Gleichung (10) nicht identisch verschwindet, n Systeme von Reihen der Form (5) gefunden, die dem Differentialsystem (A) formell genügen. Wenn die n Wurzeln $\omega_1, \cdots, \omega_n$ nicht voneinander verschieden sind, so treten möglicherweise an die Stelle einiger der Reihen (23) solche von der Form

$$e^{u\,\omega_i^{(0)} + \mu^{\frac{m-1}{m}}\omega_i^{(1)} + \cdots + \mu^{\frac{1}{m}}\omega_i^{(m)}}\left(y_{ix}^{(0)} + \frac{1}{\mu^{\frac{1}{m}}}\,y_{ix}^{(1)} + \cdots\right),$$

wo m eine ganze Zahl bedeutet, die nicht größer ist, als der Grad der Vielfachheit der betreffenden Wurzel ω_i. Die Behandlung dieses Falles, der bekannten Verhältnissen in der Theorie der linearen Differentialgleichungen entspricht (den sogenannten *anormalen* Reihen des Herrn Fabry*)), lassen wir der Einfachheit wegen beiseite.

Natürlich sind die Reihen (23) im allgemeinen für keinen Wert von μ konvergent; ohne auf die an sich und für die Anwendungen nicht uninteressante Frage nach den Bedingungen, unter denen jene Reihen konvergieren können, einzugehen, wenden wir uns gleich zur Erörterung der Bedeutung der in Rede stehenden Reihen als *asymptotischer Darstellungen* gewisser Lösungssysteme des Differentialsystems (A) für große Werte des Parameters μ.

Wir schreiben das Differentialsystem (B) in der Form

$$\frac{dz_x}{dx} = \mu\,\omega_x z_x + \sum_{\lambda=1}^{n} z_\lambda\, Q_{\lambda x}, \tag{Ba}$$

wo also die $Q_{\lambda x}$ Funktionen von x und μ bedeuten, für die

$$\lim_{\mu=\infty} \frac{1}{\mu}\, Q_{\lambda x} = 0 \tag{26}$$

ist. Es sei $x = a$ ein *regulärer* Punkt, d. h. ein Punkt, der weder zu den

*) Thèses de la Faculté des Sciences, Paris, 1885, vergl. Poincaré, Acta Mathematica VIII (1885), S. 304.

Polen der rationalen Funktionen a_{ix} noch zu den Verzweigungspunkten der durch die Gleichung (10) definierten algebraischen Funktion ϖ von x gehört. Wir denken uns von a aus einen *Strahl* gelegt und auf diesem einen Punkt b fixiert von der Beschaffenheit, daß die zwischen a und b gelegenen x Punkte dieses Strahles (b eingeschlossen) ebenfalls reguläre Punkte sind. Der Parameter μ möge mit einem bestimmten Argumente, also auch in einem Strahle, ins Unendliche rücken. Wir setzen

$$\mu(x-a) = \xi e^{\theta i}, \quad (i = \sqrt{-1}) \tag{27}$$

so daß ξ real positiv, θ konstant ist. Die Bezeichnung sei nun so gewählt, daß für alle Werte von x, die auf unserem x-Strahle zwischen a und b liegen,

$$\Re(\varpi_1 e^{\theta i}) > \Re(\varpi_2 e^{\theta i}) > \cdots > \Re(\varpi_n e^{\theta i}), \tag{28}$$

wo $\Re$ den realen Teil der in Klammern folgenden Größen andeuten soll. Der Punkt b ist nötigenfalls so zu regulieren, daß die Ungleichungen (28) statthaben. Verbleibt x zwischen a und b, und rückt μ auf seinem Strahle ins Unendliche, so wird ξ als reale positive Variable unendlich groß; indem wir nun dieses ξ in dem Differentialsysteme (Ba) an Stelle von x als unabhängige Variable einführen, erhalten wir:

$$\frac{dz_x}{d\xi} = e^{\theta i}\varpi_x z_x + \sum_{\lambda=1}^{n} z_\lambda \frac{1}{\mu} Q_{\lambda x} \cdot e^{\theta i}, \qquad (x = 1, 2, \cdots, n) \tag{29}$$

woraus für $x = 2, 3, \cdots, n$:

$$\frac{d \log \frac{z_x}{z_1}}{d\xi} = e^{\theta i}(\varpi_x - \varpi_1) + \frac{1}{\mu} e^{\theta i}\left(Q_{xx} - Q_{11} + \sum_{\lambda \neq x} Q_{\lambda x} \frac{z_\lambda}{z_x} - \sum_{\lambda > 1} Q_{\lambda 1} \frac{z_\lambda}{z_1}\right) \tag{30}$$

folgt. Da nun hierin

$$\Re(e^{\theta i}(\varpi_x - \varpi_1)) < 0, \qquad \lim_{\xi = +\infty} \frac{1}{\mu} e^{\theta i} Q_{\lambda\nu} = 0 \tag{31}$$

ist, läßt sich einerseits eine von x unabhängige negative reale Größe ϱ so angeben, daß in dem betrachteten Intervalle

$$\Re(e^{\theta i}(\varpi_x - \varpi_1)) \leqq \varrho < 0;$$

andererseits ist für hinreichend große ξ

$$\left|\frac{1}{\mu} e^{\theta i} Q_{\lambda\nu}\right| < \delta,$$

wo δ mit wachsendem ξ gegen Null konvergiert. Wenn nun

$$\left|\sum_{\lambda \neq x} \frac{z_\lambda}{z_x}\right| < \frac{1}{\varepsilon}, \qquad \left|\sum_{\lambda > 1} \frac{z_\lambda}{z_1}\right| < \frac{1}{\varepsilon},$$

$$\frac{d \log \left| \frac{z_\varkappa}{z_1} \right|}{d\xi} < \varrho + 2\delta + 2(n-1)\,\delta\,\frac{1}{\varepsilon}\,.$$

Bestimmt man nun für ein gewisses ξ die positive Größe ε aus der Gleichung

$$\varrho + 2\delta + 2(n-1)\,\delta\,\frac{1}{\varepsilon} = -\,g,$$

wo g eine hinreichend kleine positive Größe bedeutet, so wird ε zugleich mit δ unendlich klein, und man schließt wie Herr Poincaré (a. a. O.), daß ein Integralsystem $z_1, \cdots, z_n$, für welches in einem ξ-Punkte

$$\varepsilon < \left| \frac{z_\varkappa}{z_1} \right| < \frac{1}{\varepsilon} \qquad (\varkappa = 2, \cdots, n)$$

ist, die Eigenschaft besitzt, daß

$$\lim_{\xi = +\infty} \frac{z_\varkappa}{z_1} = 0.$$

Solche Integralsysteme sind stets vorhanden. — Dieses Lemma wird nun in ähnlicher Weise weiter benützt, wie das Poincarésche bei Herrn Horn (a. a. O.)

Aus den dem Differentialsysteme (B) formell genügenden Reihen (19) ergeben sich insbesondere für $i = 1$ die Ausdrücke

$$(32) \qquad \frac{z_{1\varkappa}}{z_{11}} = \frac{\frac{1}{\mu}\, z_{1\varkappa}^{(1)} + \frac{1}{\mu^2}\, z_{1\varkappa}^{(2)} + \cdots}{c_1 e^{\int b_{11}^{(1)}\, dx} + \frac{1}{\mu}\, z_{11}^{(1)} + \cdots} = \frac{1}{\mu}\, \xi_\varkappa^{(1)} + \frac{1}{\mu^2}\, \xi_\varkappa^{(2)} + \cdots,$$

die dem Differentialsysteme

$$(C) \quad \frac{d\xi_\varkappa}{dx} + \xi_\varkappa \sum_{\lambda > 1} Q_{\lambda 1}\, \xi_\lambda = \xi_\varkappa \mu\, (\omega_\varkappa - \omega_1) + \sum_{\lambda > 1} (Q_{\lambda\varkappa} - \delta_{\lambda\varkappa}\, Q_{11})\, \xi_\lambda + Q_{1\varkappa},$$
$$(\varkappa = 1, \cdots, n)$$

das sich aus (Ba) für die Quotienten

$$\xi_2 = \frac{z_2}{z_1}, \cdots, \xi_n = \frac{z_n}{z_1}$$

ableiten läßt, formell Genüge leisten. Für das Gleichungssystem (C) haben wir den folgenden Satz bewiesen: Wenn x auf das Intervall

*) Vergl. Poincaré, American Journal VII (1885), p. 204 ff., und Horn, Acta Mathem. XXIV (1900), p. 290, oder „Gewöhnliche Differentialgl." (Samml. Schubert L) 1905, S. 190.

$(a \cdots b)$ beschränkt wird und μ so ins Unendliche rückt, daß sein Argument konstant bleibt, wenn ferner die Gleichungen (26) und die Ungleichungen (28) bestehen für

$$\theta = \operatorname{Arg} \mu + \operatorname{Arg} (x - a),$$

so besitzt das Differentialsystem (C) Lösungssysteme $\zeta_2, \cdots, \zeta_n$, die gegen Null konvergieren, wenn μ in der angegebenen Weise dem Unendlichen zustrebt.

Setzt man in dem Gleichungssystem (C) für $\zeta_2, \cdots, \zeta_n$ die Ausdrücke

$$\zeta_\varkappa = \frac{1}{\mu}\,\zeta_\varkappa^{(1)} + \frac{1}{\mu^2}\,\zeta_\varkappa^{(2)} + \cdots + \frac{1}{\mu^p}\,\zeta_\varkappa^{(p)} + \frac{Z_\varkappa}{\mu^p} \tag{33}$$

ein, so ergibt sich für $Z_2, \cdots, Z_n$ ein Differentialsystem von ähnlicher Form wie (C), nur sind an die Stelle der $Q_{\lambda\varkappa}$ andere Funktionen getreten, die aber auch die Eigenschaft haben, mit $\frac{1}{\mu}$ multipliziert, für ins Unendliche wachsendes μ zu verschwinden. Nach dem für (C) bewiesenen Satze besitzt also das für die $Z_\varkappa$ gültige Differentialsystem ein Lösungssystem, das gegen Null konvergiert, wenn μ in der angegebenen Weise dem Unendlichen zustrebt, und diesem entspricht demnach, für jedes positive ganzzahlige p, ein bestimmtes Lösungssystem von der Form (33) des Differentialsystems (C). Daraus folgt nun weiter*) die Existenz eines Lösungssystems

$$z_{1\varkappa} = e^{\mu \omega_1}\left(z_{1\varkappa}^{(0)} + \cdots + \frac{1}{\mu^p}\,z_{1\varkappa}^{(p)} + \frac{Z_{1\varkappa}}{\mu^p}\right) \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n) \tag{34}$$

für das System (B) und eines Lösungssystems

$$y_{1\varkappa} = e^{\mu \omega_1}\left(y_{1\varkappa}^{(0)} + \cdots + \frac{1}{\mu^p}\,y_{1\varkappa}^{(p)} + \frac{Y_{1\varkappa}}{\mu^p}\right) \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n) \tag{35}$$

für das System (A), wo, wenn μ in der angegebenen Weise ins Unendliche rückt und x zwischen a und b liegt,

$$\lim_{\mu=\infty} Z_{1\varkappa} = 0, \qquad \lim_{\mu=\infty} Y_{1\varkappa} = 0. \tag{36}$$

Man benutzt nun das Lösungssystem (35) zur Reduktion des Differentialsystems mit n Unbekannten (A) auf ein ebensolches Differentialsystem mit

---

*) Indem man beachtet, daß nach (B)

$$\frac{d \log z_\varkappa}{dx} = \mu \omega_\varkappa + \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{z_\lambda}{z_\varkappa}\,Q_{\lambda\varkappa} = \mu \omega_\varkappa + Q_{\varkappa\varkappa} + \sum_{\lambda \neq \varkappa} \frac{\zeta_\lambda}{\zeta_\varkappa}\,Q_{\lambda\varkappa}$$

$$(\varkappa = 1, 2, \cdots, n;\ \zeta_1 = 1)$$

ist, und dann die Gleichungen (22), (22a), (32) zu Rate zieht.

$n-1$ Unbekannten*) und schließt durch vollständige Induktion — genau so wie es Herr Horn**) tut — auf die Existenz von weiteren $n-1$ Lösungssystemen des Systems (A) von der Form

$$(35a) \qquad y_{ix} = e^{\mu\omega_i}\left(y_{ix}^{(0)} + \cdots + \frac{1}{\mu^p}\, y_{ix}^{(p)} + \frac{Y_{ix}}{\mu^p}\right), \qquad (i = 2, \cdots n),$$

für die, im selben Sinne wie bei den Gleichungen (36)

$$\lim_{\mu=\infty} Y_{ix} = 0.$$

Über die in den ω_i, $y_{ix}^{(\lambda)}$ enthaltenen willkürlichen Integrationskonstanten denken wir uns auf irgend eine Weise verfügt; die ω_i mögen etwa als

$$(37) \qquad \omega_i = \int_{x_0}^{x} \varpi_i\, dx$$

erklärt sein, wo x_0 einen zwischen a und b gelegenen Wert von x bedeutet. Führen wir in dem Integrale (37), das natürlich den x-Strahl entlang zu nehmen ist, die durch (27) definierte Größe als neue Variabele ein, so ist

$$\mu\omega_i = \int_{\xi_0}^{\xi} \varpi_i\, e^{\vartheta\sqrt{-1}}\, d\xi,$$

wir haben also, wenn $\xi > \xi_0$, d. h.

$$(38) \qquad |x - a| > |x_0 - a|,$$

gemäß den Ungleichungen (28) die Ungleichungen

$$(39) \qquad \Re(\mu\omega_1) > \Re(\mu\omega_2) > \cdots > \Re(\mu\omega_n).$$

In bezug auf die $y_{ix}^{(0)}$ können wir z. B. festsetzen, daß (vergl. die Gl. (25))

$$y_{ix}^{(0)} = e^{\int_{x_0}^{x} b_{ii}^{(1)}\, dx}\, u_{ix}^{(0)};$$

dann ist jedenfalls die Determinante

$$(40) \qquad \left|y_{ix}^{(0)}\right|_{(i,x=1,2,\cdots,n)} \neq 0.$$

Wir behaupten dann, daß die durch die Formeln (35a) dargestellten n Integralsysteme eine *Integralmatrix* ausmachen, d. h. daß ihre Determinante nicht identisch verschwindet. In der Tat ist:

*) Vergl. z. B. Koenigsberger, Lehrbuch d. Theorie d. Differentialgleichungen, (1889) S. 122.

**) Acta Mathematica, XXIV, S. 299.

$$(41) \qquad \underset{(i,\varkappa=1,2,\cdots,n)}{|y_{i\varkappa}|} = \Gamma \cdot e^{\int_{x_0}^{x} \sum_{\varkappa=1}^{n} a_{\varkappa\varkappa}\, dx},$$

wo Γ eine von x unabhängige Größe bedeutet, von der gezeigt werden muß, daß sie nicht in μ identisch verschwindet. Beachtet man, daß nach (10)

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} \omega_i = \sum_{\varkappa=1}^{n} a_{\varkappa\varkappa}^{(0)},$$

so folgt aus (1), (35a), (37), (41) die Gleichung

$$(42) \qquad \left| y_{i\varkappa}^{(0)} + \frac{1}{\mu} y_{i\varkappa}^{(1)} + \cdots + \frac{1}{\mu^p} y_{i\varkappa}^{(p)} + \frac{1}{\mu^p} Y_{i\varkappa} \right| = \Gamma \cdot e^{\sum_{\varkappa} \int_{x_0}^{x} a_{\varkappa\varkappa}^{(1)}\, dx + \frac{1}{\mu} \sum_{\varkappa} \int_{x_0}^{x} a_{\varkappa\varkappa}^{(2)}\, dx + \cdots}.$$

Hieraus ist Γ jedenfalls in der Form

$$\Gamma = \Gamma_0 + \frac{1}{\mu} \Gamma_1 + \cdots + \frac{1}{\mu^p} \Gamma_p + \frac{1}{\mu^p} \mathsf{E}$$

darstellbar, wo $\Gamma_0, \Gamma_1, \cdots, \Gamma_p$ von μ unabhängig, und

$$\lim_{\mu=\infty} \mathsf{E} = 0.$$

Läßt man aber in (42) den Parameter μ in der wiederholt bezeichneten Weise ins Unendliche rücken, so folgt

$$\left| y_{i\varkappa}^{(0)} \right| = \Gamma_0 e^{\sum_{\varkappa} \int_{x_0}^{x} a_{\varkappa\varkappa}^{(1)}\, dx},$$

es ist also nach (40) Γ_0 von Null verschieden und folglich auch Γ nicht identisch gleich Null.

Es bedeute nun $\bar{y}_{i\varkappa}$ für einen festen Index i und $\varkappa = 1, 2, \cdots, n$ ein Integralsystem von der Form

$$(43) \qquad \bar{y}_{i\varkappa} = e^{\mu \omega_i} \left(\bar{y}_{i\varkappa}^{(0)} + \cdots + \frac{1}{\mu^p} \bar{y}_{i\varkappa}^{(p)} + \frac{1}{\mu^p} \bar{Y}_{i\varkappa} \right),$$

wo die in den $\bar{y}_{i\varkappa}^{(0)}, \cdots, \bar{y}_{i\varkappa}^{(p)}$ enthaltenen Integrationskonstanten als *willkürliche Konstanten* zu denken sind und

$$\lim_{\mu=\infty} \bar{Y}_{i\varkappa} = 0.$$

Dann lassen sich die $c_1, \cdots, c_n$ als von x unabhängige Größen derart bestimmen, daß

$$(44) \qquad \bar{y}_{i\varkappa} = c_1 y_{1\varkappa} + \cdots + c_n y_{n\varkappa} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n).$$

Aus den Gleichungen (44) ergibt sich

$$c_\lambda = e^{\mu(\omega_i - \omega_\lambda)}\left(c_\lambda^{(0)} + \cdots + \frac{1}{\mu^p}\, c_\lambda^{(p)} + \frac{C_\lambda}{\mu^p}\right), \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots, n),$$

wo die $c_\lambda^{(0)}, \cdots, c_\lambda^{(p)}$ von μ unabhängig und die

$$\lim_{\mu=\infty} C_\lambda = 0$$

sind. Die Gleichungen

$$\frac{dc_\lambda}{dx} = 0$$

ergeben für $i = \lambda$

$$\frac{dc_i^{(0)}}{dx} = 0, \quad \frac{dc_i^{(1)}}{dx} = 0, \cdots, \frac{dc_i^{(p)}}{dx} = 0, \quad \frac{dC_i}{dx} = 0,$$

und für $i \neq \lambda$

$$c_\lambda^{(0)} = 0, \quad c_\lambda^{(1)} = 0, \cdots, c_\lambda^{(p)} = 0,$$

$$C_\lambda = \text{const.}\, e^{\mu(\omega_\lambda - \omega_i)}.$$

Es ist folglich für $\lambda \neq i$

$$c_\lambda y_{\lambda x} = e^{\mu\omega_i}\frac{\Gamma_{\lambda x}}{\mu^p}, \qquad \Gamma_{\lambda x} = C_\lambda\left(y_{\lambda x}^{(0)} + \cdots + \frac{1}{\mu^p}\, y_{\lambda x}^{(p)} + \frac{1}{\mu^p}\, Y_{\lambda x}\right),$$

$$\lim_{\mu=\infty} \Gamma_{\lambda x} = 0,$$

und somit

$$\bar{y}_{ix} = \left(c_i^{(0)} + \cdots + \frac{c_i^{(p)}}{\mu^p} + \frac{1}{\mu^p}\, C_i\right) y_{ix} + e^{\mu\omega_i}\frac{\Gamma_x}{\mu^p}, \tag{45}$$

$$\lim_{\mu=\infty} \Gamma_x = \lim_{\mu=\infty} \sum_{\lambda \neq x} \Gamma_{\lambda x} = 0,$$

wo die $c_i^{(0)}, \cdots, c_i^{(p)}$, C_i von x unabhängige Größen bedeuten. Wir e halten sonach:

$$\begin{cases} \bar{y}_{ix}^{(0)} = y_{ix}^{(0)} c_i^{(0)}, \\ \bar{y}_{ix}^{(1)} = y_{ix}^{(0)} c_i^{(1)} + y_{ix}^{(1)} c_i^{(0)}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \bar{y}_{ix}^{(p)} = y_{ix}^{(0)} c_i^{(p)} + \cdots + y_{ix}^{(p)} c_i^{(0)}; \end{cases} \tag{46}$$

durch diese Gleichungen ist die Art, wie die allgemeinen Lösungen d Differentialgleichungen (6)—(8) von den willkürlichen Konstanten $c_i^{(0)}, \cdots, c$ abhängen, in Evidenz gesetzt.

Es bedeute nun $y_1, \cdots, y_n$ ein Lösungssystem des Differentialsyste (A), dessen Anfangswerte für $x = x_0$ in der Form

$$y_x(x_0) = e^{\mu\gamma}\left(\gamma_x^{(0)} + \frac{1}{\mu}\,\gamma_x^{(1)} + \frac{1}{\mu^2}\,\gamma_x^{(2)} + \cdots \text{ in inf.}\right) \tag{47}$$

darstellbar sind, wo γ, $\gamma_\varkappa^{(0)}$, $\gamma_\varkappa^{(1)}$, $\cdots$ von μ unabhängige Konstanten bedeuten und die rechter Hand stehenden unendlichen Reihen entweder für $|\mu| > R$ konvergent sind, oder die betreffenden Anfangswerte asymptotisch darstellen, wenn μ seinen Strahl entlang ins Unendliche rückt. Dann lassen sich von x unabhängige Größen $c_1, \cdots, c_n$ so bestimmen, daß

$$y_\varkappa = c_1 y_{1\varkappa} + \cdots + c_n y_{n\varkappa}, \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n). \tag{48}$$

Zur Bestimmung dieser Konstanten setzen wir in (48) für x den Wert x_0 ein; dann ergibt sich

$$c_i = e^{\mu\gamma}\left(c_i^{(0)} + \cdots + \frac{c_i^{(p)}}{\mu^p} + \frac{C_i}{\mu^p}\right),$$

wo die $c_i^{(0)}, \cdots, c_i^{(p)}$ von μ unabhängige Größen bedeuten, die sich gemäß den Gleichungen (46) aus den Gleichungen:

$$\left\{\begin{aligned}
&\gamma_\varkappa^{(0)} = \sum_{i=1}^{n} y_{i\varkappa}^{(0)}(x_0)\, c_i^{(0)},\\
&\gamma_\varkappa^{(0)} = \sum_{i=1}^{n} \left(y_{i\varkappa}^{(0)}(x_0)\, c_i^{(1)} + y_{i\varkappa}^{(1)}(x_0)\, c_i^{(0)}\right),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\gamma_\varkappa^{(p)} = \sum_{i=1}^{n} \left(y_{i\varkappa}^{(0)}(x_0)\, c_i^{(p)} + \cdots + y_{i\varkappa}^{(p)}(x_0)\, c_i^{(0)}\right)
\end{aligned}\right. \tag{49}$$

und zwar — mit Rücksicht darauf, daß die Determinante

$$y_{i\varkappa}^{(0)}(x_0) \neq 0$$

ist — in *eindeutiger* Weise bestimmen; für das noch von μ abhängige C_i ist:

$$\lim_{\mu=\infty} C_i = 0.$$

Setzen wir nunmehr: $\bar{\omega}_i = \omega_i + \gamma$ und ferner

$$\left\{\begin{aligned}
&y_{i\varkappa}^{(0)} c_i^{(0)} = \bar{y}_{i\varkappa}^{(0)},\\
&y_{i\varkappa}^{(0)} c_i^{(1)} + y_{i\varkappa}^{(1)} c_i^{(0)} = \bar{y}_{i\varkappa}^{(1)},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&y_{i\varkappa}^{(0)} c_i^{(p)} + \cdots + y_{i\varkappa}^{(p)} c_i^{(0)} = \bar{y}_{i\varkappa}^{(p)},
\end{aligned}\right. \tag{50}$$

so ergibt sich die Darstellung:

$$\begin{aligned}
y_\varkappa = {} & e^{\mu\bar{\omega}_1}\left(\bar{y}_{1\varkappa}^{(0)} + \cdots + \frac{1}{\mu^p}\,\bar{y}_{1\varkappa}^{(p)}\right) + \cdots + e^{\mu\bar{\omega}_n}\left(\bar{y}_{n\varkappa}^{(0)} + \cdots + \frac{1}{\mu^p}\,\bar{y}_{n\varkappa}^{(p)}\right)\\
& + \frac{1}{\mu^p}\left(e^{\mu\bar{\omega}_1}\bar{Y}_{1\varkappa} + \cdots + e^{\mu\bar{\omega}_n}\bar{Y}_{n\varkappa}\right),\\
& \lim_{\mu=\infty}\bar{Y}_{1\varkappa} = \cdots = \lim_{\mu=\infty}\bar{Y}_{n\varkappa} = 0, \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n),
\end{aligned}$$

die für jeden positiven ganzzahligen Wert von p gültig ist.

Mit Rücksicht auf die Ungleichungen (39) können wir somit das folgende Theorem aussprechen:

Jedes Integralsystem des Differentialsystems (A), *dessen Anfangswerte im Punkte* x_0 *in der Form* (47) *darstellbar sind, läßt für die zwischen* x_0 *und* x *gelegenen Punkte des* x*-Strahls und für ein den* μ*-Strahl entlang ins Unendliche wachsendes* μ *eine asymptotische Darstellung zu, und zwar im allgemeinen, d. h. wenn die sich aus den Gleichungen* (49), (50) *ergebenden* $\bar{y}_{1\varkappa}^{(\nu)}$ *nicht sämtlich identisch verschwinden, in der Form*

$$y_\varkappa \sim e^{\mu \bar{\omega}_1} \left(\bar{y}_{1\varkappa}^{(0)} + \frac{1}{\mu} \bar{y}_{1\varkappa}^{(1)} + \frac{1}{\mu^2} \bar{y}_{1\varkappa}^{(2)} + \cdots \text{ in inf.} \right). \tag{51}$$

Für spezielle Wahlen der Anfangswerte (47) kann es sich ereignen, daß gewisse der aus den Gleichungen (49), (50) zu bestimmenden $\bar{y}_{i\varkappa}^{(\nu)}$ identisch verschwinden. Wenn

$$\bar{y}_{i\varkappa}^{(\nu)} = 0, \qquad (i = 1, 2, \cdots, \lambda - 1;\ \nu = 0, 1, 2, \cdots),$$

aber unter den $\bar{y}_{\lambda\varkappa}^{(\nu)}$ welche vorhanden sind, die nicht identisch verschwinden, so haben wir

$$y_\varkappa \sim e^{\mu \bar{\omega}_\lambda} \left(\bar{y}_{\lambda\varkappa}^{(0)} + \frac{1}{\mu} \bar{y}_{\lambda\varkappa}^{(1)} + \cdots \right); \tag{52}$$

dabei ist jedoch zu bemerken, daß für alle Elemente eines Integralsystems, d. h. für alle Werte des Index $\varkappa = 1, 2, \cdots, n$, der Index λ immer derselbe sein muß, wie aus den zur Berechnung der $\bar{y}_{i\varkappa}^{(0)}, \bar{y}_{i\varkappa}^{(1)}, \cdots$ dienenden Formeln (siehe namentlich Gl. (50)) hervorgeht.

II.

Anwendung auf den Fall eines schlechthin kanonischen Differentialsystems, für das die Wurzeln der determinierenden Gleichungen von dem Parameter unabhängig sind.

Es möge nun der Fall besonders behandelt werden, wo das Differentialsystem (A) ein *schlechthin kanonisches* ist, d. h. die Form hat

$$\frac{dy_\varkappa}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{g_{\lambda\varkappa}(x)}{\varphi(x)} y_\lambda, \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n); \tag{A}$$

dabei bedeuten die $g_{\lambda\varkappa}(x)$ ganze rationale Funktionen von nicht höherem als dem $(\sigma - 1)^{\text{ten}}$ Grade in x, während

$$\varphi(x) = (x - a_1) \cdots (x - a_\sigma). \tag{1}$$

Die singulären Punkte $a_1, \cdots, a_\sigma$ seien von μ unabhängig, dagegen sei:

$$g_{i\varkappa}(x) = \mu \left(g_{i\varkappa}^{(0)} + \frac{1}{\mu} g_{i\varkappa}^{(1)} + \cdots \right). \tag{2}$$

Diese Reihen mögen für $|\mu| > R$ (wo R von x und den $a_1, \cdots, a_\sigma$ un-

abhängig ist) konvergieren, und der Einfachheit wegen wollen wir auch voraussetzen, daß die Entwickelungskoeffizienten $g_{ix}^{(\lambda)}$ $(\lambda = 0, 1, \cdots)$ rationale ganze Funktionen von x sind.

Wir betrachten die algebraische Gleichung n^{ten} Grades*)

$$(3) \qquad \left| \frac{g_{ix}(x)}{\varphi(x)} - \delta_{ix}\Omega \right| = 0, \qquad (i, k = 1, 2, \cdots, n);$$

sie definiert uns Ω als algebraische Funktion von x und als in der Umgebung von $\mu = \infty$ n-deutige Funktion von μ. Für diese Funktion sind die Punkte $a_1, \cdots, a_\sigma$ einfache Pole; setzt man

$$(4) \qquad \mathrm{Res}_{a_\nu} \frac{g_{ix}(x)}{\varphi(x)} = A_{ix}^{(\nu)}, \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, \sigma),$$

so ist

$$(5) \qquad \left| A_{ix}^{(\nu)} - \delta_{ix} \mathrm{Res}_{a_\nu} \Omega \right| = 0, \qquad (i, x = 1, 2, \cdots, n).$$

Bezeichnen wir also die Wurzeln der Gleichung (3) mit $\Omega_1, \cdots, \Omega_n$, so sind die

$$(6) \qquad \mathrm{Res}_{a_\nu} \Omega_i = r_i^{(\nu)}, \qquad (i = 1, 2, \cdots, n; \quad \nu = 1, 2, \cdots, \sigma)$$

nichts anderes als die Wurzeln der zu $x = a_\nu$ gehörigen determinierenden Fundamentalgleichungen des Systems (A), und ebenso sind für $x = \infty$ die

$$(7) \qquad \mathrm{Res}_\infty \Omega_i = r_i^{(\sigma+1)}$$

die Wurzeln der zu $x = \infty$ gehörigen determinierenden Fundamentalgleichung. Wir setzen im folgenden stets voraus, daß die Differenzen der $r_i^{(\nu)}$ weder verschwinden noch ganze Zahlen sind, so daß also die zu den singulären Punkten $a_1, \cdots, a_\sigma, a_{\sigma+1} (= \infty)$ gehörigen Integralmatrizen $\eta_{ix}^{(\nu)}$ in der Form

$$(8) \qquad \eta_{ix}^{(\nu)} = (x - a_\nu)^{r_i^{(\nu)}} \cdot \varphi_{ix}^{(\nu)}$$

darstellbar sind, wo die $\varphi_{ix}^{(\nu)}$ in der Umgebung von $x = a_\nu$ holomorphe Funktionen bedeuten, deren Determinante $\left|\varphi_{ix}^{(\nu)}\right|$ für $x = a_\nu$ nicht verschwindet. Für $\nu = \sigma + 1$ ist $x - a_\nu$ durch $\frac{1}{x}$ zu ersetzen. — Aus dieser Annahme folgt, daß die Diskriminante der Gleichung (3) in bezug auf Ω nicht identisch verschwindet, und daß die Punkte $a_1, \cdots, a_\sigma, \infty$ nicht zu den Verzweigungspunkten der algebraischen Funktion Ω von x gehören, solange μ einen endlichen Wert besitzt.

*) Diese für die Theorie der linearen Differentialsysteme wichtige Gleichung wurde unsere Wissens zuerst von Herrn Volterra (Memorie della Soc. Ital. delle Scienze 1899), allerdings bei Fragen anderer Art, als die, mit denen wir es hier zu tun haben, in Betracht gezogen.

Denkt man sich in (3) für g_{ix} die Entwickelung (2) eingesetzt, so ist in Übereinstimmung mit den Bezeichnungen der vorigen Nummer

$$\lim_{\mu=\infty} \frac{1}{\mu} \Omega = \varpi \tag{9}$$

durch die charakteristische Gleichung

$$\left| \frac{g_{ix}^{(0)}}{\varphi(x)} - \delta_{ix} \varpi \right| = 0 \qquad (i, x = 1, 2, \cdots, n) \tag{10}$$

bestimmt. Wenn die Diskriminante dieser Gleichung nicht identisch verschwindet, d. h. wenn ihre Wurzeln $\varpi_1, \cdots, \varpi_n$ für ein unbestimmtes x voneinander verschieden sind, so ist also in der Umgebung von $\mu = \infty$

$$\Omega_i = \mu \left(\varpi_i + \frac{1}{\mu} \Omega_i^{(1)} + \cdots \right), \qquad (i = 1, 2, \cdots, n). \tag{11}$$

Wir machen nun die weitere Voraussetzung, *daß die Wurzeln $r_i^{(\nu)}$ der zu den singulären Punkten $a_1, \cdots, a_\sigma, \infty$ gehörigen determinierenden Fundamentalgleichungen des Systems* (A) *von dem Parameter μ unabhängig sind.*

Dann ist also nach (6) und (7)

$$\operatorname{Res}_{a_\nu} \Omega_i = \operatorname{Res}_{a_\nu} \Omega_i^{(1)}, \quad (\nu = 1, 2, \cdots, \sigma, \sigma + 1),$$

dagegen

$$\operatorname{Res}_{a_\nu} \varpi_i = 0, \tag{12}$$

$$\operatorname{Res}_{a_\nu} \Omega_i^{(\lambda)} = 0, \qquad (\lambda = 2, 3, \cdots).$$

Wir wollen hieraus auf den Charakter der ϖ_i schließen, Analoges gilt dann natürlich auch für die $\Omega_i^{(2)}, \Omega_i^{(3)}, \cdots$.

Die algebraische Funktion ϖ besitzt keine anderen Pole als $a_1, \cdots, a_\sigma$ u. z. kann ϖ in diesen Punkten von nicht höherer als der ersten Ordnung unendlich werden. Zufolge der Gleichungen (12) ist aber ein Unendlichwerden von erster Ordnung auch ausgeschlossen; die $a_1, \cdots, a_\sigma$ und ebenso $x = \infty$ gehören folglich zu den Verzweigungspunkten der algebraischen Gleichung (10) und die ϖ_i werden in diesen Punkten von niedrigerer als der ersten Ordnung unendlich. Hieraus folgt, daß die

$$\omega_i = \int \varpi_i \, dx$$

für keinen endlichen oder unendlich großen Wert von x unendlich werden können, *daß sie also den Charakter von Integralen erster Gattung haben.**)

*) Man überzeugt sich an Beispielen (etwa $n = 2$, $\sigma = 3$), daß die ω_i nicht etwa identisch verschwinden müssen.

Rückwärts ergibt sich aus dieser Tatsache, daß die $a_1, \cdots, a_\sigma, \infty$ auch die einzigen Verzweigungspunkte von (10) sind.

Der Koeffizient von $\bar{\omega}^{n-1}$ in der Gleichung (10) lautet

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{g_{ii}^{(0)}(x)}{\varphi(x)}; \tag{13}$$

da für diese rationale Funktion von x die Residuen in bezug auf $a_1, \cdots, a_\sigma, \infty$ verschwinden müssen und der Zähler von nicht höherem als dem $(\sigma-1)^{\text{ten}}$ Grade ist, verschwindet die Funktion (13) identisch, wir haben also — in Übereinstimmung mit einem bekannten Theorem*) — die Gleichung

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{\omega}_i = 0. \tag{14}$$

Wir definieren durch die Gleichungen

$$\sum_{\lambda=1}^{n} u_{i\lambda}\left(\frac{g_{\lambda\varkappa}}{\varphi(x)} - \delta_{\lambda\varkappa}\Omega_i\right) = 0, \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots, n) \tag{15}$$

Größen $u_{i1}, \cdots, u_{in}$, deren Verhältnisse sich aus (15) als algebraische — mit Ω_i gleichverzweigte — Funktionen von x ergeben. Für ein endliches μ sind folglich die $u_{i\lambda}$ in der Umgebung von $x = a_\nu$ holomorph und die $u_{i\lambda}(a_\nu)$ genügen den Gleichungen

$$\sum_{\lambda=1}^{n} u_{i\lambda}(a_\nu)\left(A_{\lambda\varkappa}^{(\nu)} - \delta_{\lambda\varkappa}\,r_i^{(\nu)}\right) = 0. \tag{16}$$

Aus den Gleichungen (15) ergibt sich, indem man für $g_{\lambda\varkappa}$, Ω_i die Entwickelungen (2), (11) einsetzt, für ein von den $a_1, \cdots, a_\sigma, \infty$ verschiedenes x:

$$u_{i\lambda} = u_{i\lambda}^{(0)} + \frac{1}{\mu}\,u_{i\lambda}^{(1)} + \cdots \text{ in inf.}, \tag{17}$$

wo diese Gleichungen so zu verstehen sind, daß sich ihre beiden Seiten nur durch einen von dem Index λ unabhängigen Proportionalitätsfaktor unterscheiden. Die $u_{i\lambda}^{(0)}$ sind, in Übereinstimmung mit der Bezeichnungsweise des vorigen Abschnittes, durch die Gleichungen

$$\sum_{\lambda} u_{i\lambda}^{(0)}\left(\frac{g_{\lambda\varkappa}^{(0)}}{\varphi(x)} - \delta_{\lambda\varkappa}\bar{\omega}_i\right) = 0 \tag{18}$$

*) Siehe etwa Appell et Goursat, Théorie des fonctions algébriques (1895), S. 301.

bestimmt. Setzen wir ferner

$$A_{i\varkappa}^{(\nu)} = \mu\left(\alpha_{i\varkappa}^{(\nu)} + \frac{1}{\mu}\beta_{i\varkappa}^{(\nu)} + \cdots\right), \tag{19}$$

so daß also

$$\alpha_{i\varkappa}^{(\nu)} = \lim_{x=a_\nu}(x-a_\nu)\frac{g_{i\varkappa}^{(0)}}{\varphi(x)} = \mathrm{Res}_{a_\nu}\frac{g_{i\varkappa}^{(0)}}{\varphi(x)}, \tag{19a}$$

so folgt aus (16), mit Rücksicht auf den Umstand, daß die $r_i^{(\nu)}$ von x unabhängig sein sollten:

$$u_{i\lambda}(a_\nu) = u_{i\lambda}^{(0)}(a_\nu) + \frac{1}{\mu}u_{i\lambda}^{(1)}(a_\nu) + \cdots \text{ in inf.}, \tag{20}$$

wo in Übereinstimmung mit (18)

$$\sum_\lambda u_{i\lambda}^{(0)}(a_\nu)\alpha_{\lambda\varkappa}^{(\nu)} = 0 \tag{21}$$

ist. — Wenn wir die Gleichung (10) in der Form

$$\left|\frac{g_{i\varkappa}^{(0)}}{\varphi(x)}(x-a_\nu) - \delta_{i\varkappa}\bar{\omega}\cdot(x-a_\nu)\right| = 0$$

schreiben und darin $x = a_\nu$ setzen, so erkennen wir mit Rücksicht auf (19a) und (12), daß die zu der Matrix $(\alpha_{i\varkappa}^{(\nu)})$ gehörige charakteristische Gleichung die n-fache Wurzel Null besitzt, so daß also die aus den Hauptsubdeterminanten dieser Matrix gebildeten Summen sämtlich verschwinden. Insbesondere ist demnach $\alpha_{i\varkappa}^{(\nu)} = 0$, so daß die Gleichungen

$$\sum_\lambda v_\lambda^{(\nu)}\alpha_{\lambda\varkappa}^{(\nu)} = 0 \tag{22}$$

auflösbar sind. Mit Rücksicht auf (21) haben wir folglich

$$u_{i\lambda}^{(0)}(a_\nu) = v_\lambda^{(0)}, \tag{23}$$

d. h. die Werte der Funktionen $u_{i\lambda}^{(0)}$ im Punkte a_ν sind von dem Index i unabhängig, was mit der Tatsache in Übereinstimmung steht, daß $x = a_\nu$ ein Verzweigungspunkt der algebraischen Funktion $\bar{\omega}$ ist. Nach (20) haben wir also

$$u_{i\lambda}(a_\nu) = v_\lambda^{(\nu)} + \frac{1}{\mu}u_{i\lambda}^{(1)}(a_\nu) + \cdots \text{ in inf.}, \tag{24}$$

wo diese Gleichungen, ebenso wie (23), (20) in demselben Sinne zu verstehen sind, wie wir es für die Gleichungen (17) festgesetzt haben. Wir bemerken, daß für die durch die Gleichungen (8) erklärten Funktionen $\varphi_{i\varkappa}^{(\nu)}$ die Gleichungen

$$\sum_\lambda \varphi_{i\lambda}^{(\nu)}(a_\nu)\left(A_{\lambda\varkappa}^{(\nu)} - \delta_{\lambda\varkappa}r_i^{(\nu)}\right) = 0$$

bestehen*), so daß also mit Rücksicht auf (16) und (24)

$$\varphi_{i2}^{(\nu)}(a_\nu) = v_2^{(\nu)} + \frac{1}{\mu} u_{i2}^{(1)}(a_\nu) + \cdots \text{ in inf.} \tag{25}$$

Nach diesen vorbereitenden Bemerkungen wenden wir uns zur asymptotischen Darstellung der Integrale in dem jetzt vorliegenden Falle.

Im I. Abschnitte hatten wir einen x-Punkt *regulär* genannt, wenn er weder zu den singulären Punkten des Differentialsystems (A) noch zu den Verzweigungspunkten der algebraischen Funktion ϖ gehörte. Da in dem jetzt behandelten Falle die Punkte $a_1, \cdots, a_n, \infty$ die einzigen Verzweigungspunkte von ϖ sind, wird ein *regulärer* Punkt einfach ein solcher sein, in dessen Umgebung sich die Integrale des Systems (A) regulär verhalten. Legen wir also von einem regulären Punkte x_0 aus einen Strahl, und lassen wir μ mit festem Argumente ins Unendliche gehen, so wird ein Integralsystem $y_1, \cdots, y_n$ des Differentialsystems (A), dessen Anfangswerte in x_0 in der Form

$$e^{\mu\gamma}\left(\gamma_x^{(0)} + \frac{1}{\mu}\gamma_x^{(1)} + \cdots \text{ in inf.}\right) \tag{26}$$

asymptotisch (oder für $|\mu| > R$ konvergent) darstellbar sind, allgemein zu reden, in der Form

$$y_x \sim e^{\mu\omega_1+\gamma}\left(\bar{y}_{1x}^{(0)} + \frac{1}{\mu}\bar{y}_{1x}^{(1)} + \cdots \text{ in inf.}\right) \tag{27}$$

darstellbar sein, u. z. gilt diese asymptotische Darstellung für alle Punkte des x-Strahles, die zwischen x_0 und dem nächsten auf jenem Strahle befindlichen singulären Punkte liegen. Dabei bedeutet ω_1 dasjenige

$$\omega_i = \int_{x_0}^{x} \varpi_i dx, \tag{28}$$

für das, wenn

$$\theta = \operatorname{Arg}\mu + \operatorname{Arg}(x - x_0)$$

gesetzt wird,

$$\Re\left(\varpi_1 e^{\theta\sqrt{-1}}\right) > \Re\left(\varpi_x e^{\theta\sqrt{-1}}\right), \qquad (x = 2, 3, \cdots, n) \tag{29}$$

ist. Da aber nach (14)

$$\sum_{i=1}^{n} \Re\left(\varpi_i e^{\theta\sqrt{-1}}\right) = 0$$

ist, so folgt, daß $\Re\left(\varpi_1 e^{\theta\sqrt{-1}}\right)$ und folglich $\Re(\mu\omega_1)$ *positiv* ist für alle x-Werte, die auf dem x-Strahle zwischen x_0 und dem nächsten singulären Punkte gelegen sind. Eine Veränderung des x-Strahles und des Arguments von μ kann bewirken, daß in der Ungleichung (29) nicht mehr ϖ_1, sondern ein anderes ϖ_i die *erste Stelle* einnimmt; dann werden in der

*) Siehe die vorhergehende Note, Gl. (3), S. 274.

asymptotischen Darstellung (27), allgemein zu reden, ω_i und die entsprechenden $\bar{y}_{ix}^{(\lambda)}$ an die Stelle der ω_1, $\bar{y}_{1x}^{(\lambda)}$ treten, und für die in Betracht kommenden x- und μ-Werte wird $\Re(\mu\omega_i)$ einen positiven Wert haben. Wir erhalten somit das

Theorem I. *Die Elemente eines Integralsystems, dessen Anfangswerte in dem regulären Punkte x_0 in der Form*

$$\gamma_x^{(0)} + \frac{1}{\mu}\gamma_x^{(1)} + \cdots \text{ in inf.} \tag{26a}$$

asymptotisch darstellbar sind, werden, wenn der Parameter μ in beliebiger Richtung ins Unendliche geht, allgemein zu reden, für jeden x-Wert, der innerhalb des zum Punkte x_0 gehörigen Mittag-Lefflerschen Sternes) gelegen ist, unendlich. Nur solche Integralsysteme, deren asymptotische Darstellung nicht zu demjenigen $\bar{\omega}_i$ gehört, für das $\Re(\mu\bar{\omega}_i)$ den größten Wert hat, können dem Grenzwerte Null zustreben, oder auch für spezielle Argumente von μ völlig unbestimmt werden.*

Wir betrachten nun den Fall, daß x sich auf einer von x_0 ausgehenden *gebrochenen Linie* bewegt; es genügt offenbar, den Fall näher zu untersuchen, wo jene Linie nur *einen* Knickpunkt aufweist. Es möge also von x_0 ein erster Strahl ausgehen, an den sich in einem seiner Punkte, etwa x_1, ein zweiter Strahl anschließt; das Argument von μ bleibe ein für alle Male fixiert. Das Integralsystem $y_1, \cdots, y_n$, dessen Anfangswerte in x_0 in der Form (26a) darstellbar sind, besitzt längs des ersten Strahles eine asymptotische Darstellung von der Form (27), wo $\gamma = 0$ zu setzen ist, wir haben also für $x = x_1$

$$y_x(x_1) \sim e^{\mu\omega_1(x_1)}\left(\bar{y}_{1x}^{(0)}(x_1) + \frac{1}{\mu}\bar{y}_{1x}^{(1)}(x_1) + \cdots \text{ in inf.}\right), \tag{30}$$

wo, allgemein zu reden, ω_1 so beschaffen ist, daß längs des ersten Strahles $\Re(\mu\omega_1)$ am größten, also positiv ist. Es sei nun längs des zweiten Strahles

$$\omega_i' = \int_{x_1}^{x} \bar{\omega}_i dx$$

und ω_2' dasjenige, für welches $\Re(\mu\omega_2')$ den größten Wert unter allen $\Re(\mu\omega_i')$ hat, dann ist, allgemein zu reden, für jeden Punkt x des zweiten Strahles, der zwischen x_1 und dem nächsten singulären Punkte gelegen ist,

$$y_x(x) \sim e^{\mu(\omega_2'(x) + \omega_1(x_1))}\left(\bar{\bar{y}}_{2x}^{(0)}(x) + \frac{1}{\mu}\bar{\bar{y}}_{2x}^{(1)}(x) + \cdots \text{ in inf.}\right),$$

wo die $\bar{\bar{y}}_{2x}^{(\lambda)}$ gemäß den durch (30) gegebenen asymptotischen Darstellungen der Anfangswerte im Punkte x_1 zu bestimmen sind. — Wenn also

*) Siehe Mittag-Leffler, Acta Mathematica, Bd. XXIII, p. 43 ff.

der Punkt x mit dem Punkte x_0 durch eine, keinen singulären Punkt enthaltende gebrochene Linie verbunden ist, so werden diejenigen Werte des Integralsystems $y_1, \cdots, y_n$, die durch analytische Fortsetzung längs dieser Linie im Punkte x zum Vorschein kommen, in der Form

$$y_x(x) \sim e^{\mu(\omega_i(x)+p)}\left(y_{ix}^{(0)}(x) + \frac{1}{\mu}\, y_{ix}^{(1)}(x) + \cdots \text{ in inf.}\right)$$

asymptotisch darstellbar sein, wo p eine Konstante bedeutet, und wo, allgemein zu reden,

$$\Re[\mu(\omega_i(x)+p)] > 0$$

ist; die $\omega_i(x)$, $y_{ix}^{(\nu)}$ sind so zu bestimmen, daß in einem jeden Knickpunkte der gebrochenen Linie die asymptotische Darstellung für den daselbst *ausgehenden* Strahl denjenigen Anfangswerten gemäß herzustellen ist, die durch die längs des in jenem Knickpunkte *endenden* Strahles gültige asymptotische Darstellung gegeben werden.

Wir sehen also, daß ein Integralsystem, das in *einem* regulären Punkte x_0 einer asymptotischen Darstellung von der Form (26) fähig ist, die Eigenschaft hat, daß jeder Zweig dieses Integralsystems in jedem regulären Punkte x eine asymptotische Darstellung von derselben Form zuläßt, und wir erhalten diese Darstellung, indem wir den von x_0 nach x führenden Fortsetzungsweg durch eine ihm äquivalente gebrochene Linie ersetzen und für diese auf die oben angegebene Weise verfahren. Da eine Funktion nur auf eine Weise asymptotisch dargestellt werden kann, erkennen wir zugleich, daß die in x gültige asymptotische Darstellung von der Wahl der zu ihrer Herstellung benutzten gebrochenen Linie unabhängig ist, vorausgesetzt, daß nur solche gebrochene Linien zugelassen werden, die einander und dem Fortsetzungswege äquivalent sind.

Es sei nun die von x_0 ausgehende gebrochene Linie eine *geschlossene*, d. h. also ein geradliniges Polygon, dessen eine Ecke x_0 ist. Es möge im Inneren dieses Polygons ein einziger singulärer Punkt, etwa a_ν, gelegen sein. Dabei verstehen wir unter dem Inneren des Polygons denjenigen Teil der x-Ebene, der, beim Durchlaufen des Polygons in einem bestimmten Sinne, zur Linken bleibt. Die Zahl ν kann dann einen der Werte $1, 2, \cdots, \sigma + 1$ annehmen. Es sei ferner (η_{ik}) diejenige Integralmatrix, die sich für $x = x_0$ auf die Einheitsmatrix (δ_{ik}) reduziert, so daß also diejenigen Werte der η_{ix}, die in x_0 zum Vorschein kommen, wenn wir längs des Polygons analytisch fortsetzen, nichts anderes sind, als die Elemente der einer Umkreisung von a_ν entsprechenden Fundamentalsubstitution $(A_{ix}^{(\nu)})$. Da die Anfangswerte δ_{ix} der η_{ix} im Punkte x_0 von μ unabhängig, also jedenfalls in der Form (26a) darstellbar sind, folgt, daß die $A_{ix}^{(\nu)}$ jedenfalls in der Form

$$\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(\nu)} \sim e^{\mu p_i}\left(\mathfrak{a}_{i\varkappa}^{(\nu)} + \frac{1}{\mu}\,\mathfrak{b}_{i\varkappa}^{(\nu)} + \cdots \text{ in inf.}\right) \tag{31}$$

asymptotisch dargestellt werden können, wo, allgemein zu reden,

$$\Re(\mu p_i) > 0$$

ist, während die $\mathfrak{a}_{i\varkappa}^{(\nu)}$ die Werte gewisser $y_{\lambda\varkappa}^{(0)}$ im Punkte x_0 bedeuten, wo der Index λ von i unabhängig ist. Wir erkennen hieraus fürs erste, daß *im allgemeinen die sämtlichen* $\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(\nu)}$ *unendlich werden, wenn der Parameter* μ *mit einem beliebigen Argumente ins Unendliche rückt.* Des weiteren können wir aus der Darstellung (31) noch einen bemerkenswerten Schluß ziehen.

Bezeichnen wir die Wurzeln der zu a_ν gehörigen Fundamentalgleichung

$$\left|\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(\nu)} - \delta_{i\varkappa}\varrho\right| = 0 \tag{32}$$

mit

$$e^{2\pi\sqrt{-1}\,r_i^{(\nu)}} = \varrho_i^{(\nu)},$$

so sind diese Größen von μ unabhängig. Daraus folgt, mit Rücksicht auf (31), daß die durch die linearen Gleichungen

$$\sum_{\lambda=1}^{n} v_{i\lambda}^{(\nu)}\left(\mathsf{A}_{\lambda\varkappa}^{(\nu)} - \delta_{\lambda\varkappa}\varrho_i^{(\nu)}\right) = 0, \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

bestimmten Verhältnisse

$$v_{i1}^{(\nu)} : v_{i2}^{(\nu)} : \cdots : v_{in}^{(\nu)} \tag{33}$$

einer asymptotischen Darstellung von der Form

$$\alpha_0 + \frac{1}{\mu}\,\alpha_1 + \cdots \text{ in inf.} \tag{34}$$

fähig sind. Diese Verhältnisse sind aber*) nichts anderes, als die Verhältnisse der Werte, die die durch die Gleichungen (8) definierten Funktionen $\varphi_{i\varkappa}^{(\nu)}$ im Punkte x_0 annehmen, wir sehen also, daß diese Verhältnisse oder, was auf dasselbe hinauskommt, die Verhältnisse

$$\eta_{i1}^{(\nu)} : \eta_{i2}^{(\nu)} : \cdots : \eta_{in}^{(\nu)} \tag{35}$$

der Elemente der zu a_ν gehörigen Integralmatrix im Punkte x_0 asymptotische Darstellungen von der Form (34) zulassen. Denken wir uns den Punkt x_0 mit a_ν durch einen ganz innerhalb unseres Polygons verlaufenden Strahl, oder, wenn dies nicht möglich ist, durch eine im Inneren des Polygons verbleibende gebrochene Linie verbunden, so sind nach dem Vorhergehenden die Verhältnisse (35) längs jener Linie bis in jede beliebige Nähe des Punktes a_ν asymptotischer Darstellungen fähig, da ja ihre Anfangswerte im Punkte x_0 eine solche Darstellung zulassen. Die längs des in a_ν mündenden Strahles gültigen Darstellungen gehen aber, wenn

*) Vergl. die vorhergehende Note, Gl. (4), S. 274.

x in den Punkt a_ν einrückt, formell in die Verhältnisse der auf der rechten Seite der Gleichungen (25) auftretenden Reihen über; da diese Reihen die Werte $\varphi_{i\lambda}^{(\nu)}(a_\nu)$ — von einem Proportionalitätsfaktor abgesehen — in einer gewissen Umgebung von $\mu = \infty$ konvergent darstellen, so können wir sagen:

Theorem II. *Die Verhältnisse der Elemente der zu einem singulären Punkte a_ν gehörigen Integralmatrix sind längs eines jeden in diesem Punkte einmündenden Strahles einer asymptotischen Darstellung fähig, und diese Darstellung bleibt in jenem singulären Punkte selbst gültig, indem sie daselbst in eine konvergente Reihenentwicklung übergeht.**)

Wir haben bereits angemerkt, daß *im allgemeinen* die sämtlichen $A_{i\varkappa}^{(\nu)}$ unendlich werden, wenn μ in beliebiger Richtung ins Unendliche rückt. Diese Bemerkung kann noch schärfer gefaßt werden. Denken wir uns in der zum Punkte a_ν gehörigen Fundamentalgleichung (32) für die $A_{i\varkappa}^{(\nu)}$ ihre asymptotischen Darstellungen (31) eingesetzt, so folgt, wenn μ mit bestimmtem Argumente ins Unendliche rückt:

$$\alpha_{i\varkappa}^{(\nu)} - \delta_{i\varkappa}\varrho_\lambda^{(\nu)} \lim_{\mu=\infty} e^{-\mu p_i} = 0, \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots, n).$$

Es sind nun folgende Fälle denkbar:

1. $\lim_{\mu=\infty} e^{-\mu p_i} = 0$ für $i = 1, 2, \cdots, n$. In diesem Falle ist also $\lim_{\mu=\infty} A_{i\varkappa}^{(\nu)} = \infty$, und die Wurzeln der zu der Matrix $(\alpha_{i\varkappa}^{(\nu)})$ gehörigen charakteristischen Gleichung sind sämtlich gleich Null. Dieser Fall ist der „allgemeine", wo nämlich die asymptotischen Darstellungen aller $A_{i\varkappa}^{(\nu)}$ zu demjenigen ω_1 gehören, für das $\Re(\mu\omega_1)$ am größten, also positiv ist, und wo demnach die

$$\alpha_{i\varkappa}^{(\nu)} = y_{1\varkappa}^{(0)}(x_0)$$

von dem Index i unabhängige Werte besitzen.

2. $\lim_{\mu=\infty} e^{-\mu p_i} = \infty$; dieser Fall ist ausgeschlossen, da die zu der Matrix $(\alpha_{i\varkappa}^{(\nu)})$ gehörige charakteristische Gleichung keine unendlich große Wurzel besitzen kann.

3. $\lim_{\mu=\infty} e^{-\mu p_i} = 0$ wenigstens für einen Wert der Index i; dann sind die Grenzwerte der zu diesem Index i gehörigen $A_{i\varkappa}^{(\nu)}$ unendlich groß.

4. $\lim_{\mu=\infty} e^{-\mu p_i} = 1$, also $p_i = 0$ für jedes $i = 1, 2, \cdots, n$. Wenn dieser Fall für einen oder mehrere der Werte $\nu = 1, 2, \cdots, \sigma + 1$ eintritt, aber nicht für alle, so können die entsprechenden $A_{i\varkappa}^{(\nu)}$ den endlichen Grenz-

*) Man vergl. hiermit die von Herrn Böcher, Encyklopädie der math. Wissensch. IIA7a, p. 447 angegebenen Bedingungen, unter denen die sogenannten Oszillationstheoreme in einem singulären Punkte, der kein Punkt der Unbestimmtheit ist, bestehen bleiben.

werten $\alpha_{ix}^{(\nu)}$ zustreben, und die $\varrho_\lambda^{(\nu)}$ sind die Wurzeln der zu der Matrix $(\alpha_{ix}^{(\nu)})$ gehörigen charakteristischen Gleichung

$$|\alpha_{ix}^{(\nu)} - \delta_{ix}\varrho| = 0. \tag{35}$$

In diesem Falle muß also die Determinante $|\alpha_{ix}^{(\nu)}|$ von Null verschieden sein, die Matrix $(\alpha_{ix}^{(\nu)})$ muß folglich mit der Matrix $(y_{ix}^{(0)}(x_0))$ übereinstimmen, so daß die asymptotischen Darstellungen der $A_{ix}^{(\nu)}$ für $i = 1, 2, \cdots, n$ zu den n verschiedenen ω_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ gehören. Dann sind unter denjenigen $A_{ix}^{(\nu)}$, für deren oberen Index ν der eben besprochene Fall nicht eintritt, noch immer welche vorhanden, deren Grenzwert unendlich wird. Es bleibt also noch der Fall:

5. Wo die unter 4. besprochenen Verhältnisse für *alle* $n = 1, 2, \cdots, \sigma+1$ stattfinden. In diesem Falle verschwinden die sämtlichen Periodizitätsmoduln der Integrale erster Gattung ω_i, es sind also die ω_i selbst sämtlich identisch gleich Null.

Wir hatten unsere ganze Untersuchung unter der Voraussetzung geführt, daß die $\bar{\omega}_1, \cdots, \bar{\omega}_n$ voneinander verschieden sind. Wenn die sämtlichen Wurzeln der Gleichung (10) zusammenfallen, also rational sind, so müssen sie identisch verschwinden. Alsdann wäre die durch die Gleichung (3) definierte Funktion Ω im allgemeinen nicht in der Form (11) nach ganzen, sondern nach gebrochenen Potenzen von μ, nämlich nach ganzen Potenzen von $\mu^{\frac{1}{n}}$ entwickelbar, und auch die Potenzen von μ, die in den formalen, dem Differentialsysteme genügenden Entwicklungen auftreten, würden ganze Potenzen von $\mu^{\frac{1}{n}}$ werden.*)

Sollten diese Entwicklungen doch nach ganzen Potenzen von μ fortschreiten, so müßten die sämtlichen $g_{ix}^{(0)}$ in Wegfall gebracht werden können, es wäre also $\mu = \infty$ überhaupt kein wesentlich singulärer Punkt der Integrale. Dieser Fall scheidet demnach aus.

Es wird somit allemal wenigstens eines der $A_{ix}^{(\nu)}$ unendlich, wenn μ mit einem beliebigen Argumente ins Unendliche rückt — nur für spezielle Argumente von μ kann es sich ereignen, daß die $A_{ix}^{(\nu)}$ nicht unendlich, sondern völlig unbestimmt werden — damit ist der in der vorhergehenden Note gemachte Schluß**) erhärtet.

Klausenburg, 26. April 1906.

*) Vergl. die Bemerkung in der No. I, S. 282.

**) Siehe S. 276 dieses Annalenbandes.

Über lineare homogene Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit drei im Endlichen gelegenen wesentlich singulären Stellen.*)

Von

Richard Fuchs in Halensee bei Berlin.

In der vorliegenden Notiz erlaube ich mir einige Untersuchungen vorzulegen, die aus folgender Überlegung hervorgegangen sind:

Bekanntlich lassen sich die Größen α, β, γ der Gaußschen Differentialgleichung

$$x(x-1)\frac{d^2y}{dx^2} + [(\alpha+\beta+1)x - \gamma]\frac{dy}{dx} + \alpha\beta y = 0$$

so bestimmen, daß für ein Fundamentalsystem y_1, y_2 von Integralen derselben die Koeffizienten der Substitutionen, die y_1, y_2 bei Umläufen der unabhängigen Variablen um die singulären Stellen $x = 0$ und $x = 1$ erleiden, beliebig vorgeschriebene Werte besitzen. Ich habe mir nun die Frage vorgelegt, welche Gestalt eine lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung mit drei im Endlichen gelegenen und dem unendlich fernen Punkt als wesentlich singulären Stellen haben muß, damit die Koeffizienten der Substitutionen, die ein Fundamentalsystem von Integralen bei Umläufen der unabhängigen Variablen um die im Endlichen gelegenen singulären Stellen erleidet, beliebig vorgeschriebene, also insbesondere von der Wahl der singulären Stellen unabhängige Werte besitzen.

Hierbei konnte ich die Resultate, die mein Vater (L. Fuchs, Sitzungsberichte der Berliner Akademie der Wissenschaften, 1888, S. 1115 u. 1273; 1889, S. 713; 1890, S. 21; 1892, S. 157; 1893, S. 975; 1894, S. 1117; 1895, S. 905; 1897, S. 608; 1898, S. 477) „über lineare Differentialgleichungen, deren Substitutionsgruppe von einem in den Koeffizienten auftretenden Parameter unabhängig ist", veröffentlicht hat, benutzen und ebenso die Abhandlungen des Herrn Schlesinger (Crelles Journal, Bd. 123, S. 138; Bd. 124, S. 292; Bd. 130, S. 26) „Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen im Anschluß an das Riemannsche Problem".

*) Ein Auszug aus dieser Arbeit ist in den Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris (Séance du 2 Octobre 1905), t. 141, p. 555, von Herrn Poincaré vorgelegt, erschienen.

Es zeigt sich zunächst (Nr. I), daß neben den vier wesentlich singulären Stellen, als welche $0, 1, t, \infty$ genommen werden, mindestens eine scheinbar singuläre Stelle vorhanden sein muß. Dann werden (Nr. II und III) die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die in den Koeffizienten vorhandenen Konstanten aufgestellt, damit die Differentialgleichung die oben angegebenen Eigenschaften besitzt, und gezeigt (Nr. IV), daß diese Bedingungsgleichungen miteinander verträglich sind. Es zeigt sich, daß der Wert λ der scheinbaren singulären Stelle als Funktion von t einer Differentialgleichung genügt, die in eine eigentümliche Form übergeführt werden kann (Nr. V, VI). Hierauf wird (VII) der Zusammenhang der hier gegebenen Untersuchungen mit dem Riemannschen Problem klargestellt und dann (Nr. VIII) ein Spezialfall hervorgehoben, der zu unserer Differentialgleichung in einer ähnlichen Beziehung steht, wie die sogenannte Legendresche Differentialgleichung, die die Grundlage der Theorie der Modulfunktion bildet, zur allgemeinen Gaußschen Differentialgleichung. Schließlich wird dann noch gezeigt (IX), daß in besonderen Fällen die Differentialgleichung reduktibel sein und bei gewissen Spezialisierungen der Konstanten (Nr. X) in Gaußsche Differentialgleichungen übergeführt werden kann.

I.

Wenn die Substitutionsgruppe der Differentialgleichung

$$\text{(A)} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = py$$

der Fuchsschen Klasse — wir nehmen hier immer den Koeffizienten der ersten Ableitung von y nach x als gleich Null an, weil dies ja bekanntlich durch eine einfache Transformation der abhängigen Variablen stets zu erreichen ist — von einem in p auftretenden Parameter unabhängig sein soll, als welchen wir im folgenden stets einen der singulären Punkte ansehen werden, so muß für ein Fundamentalsystem y_1, y_2 von Integralen das Gleichungssystem erfüllt sein*)

$$(1) \qquad \frac{\partial y_i}{\partial t} = By_i + A\frac{\partial y_i}{\partial x},$$

wo B und A rationale Funktionen von x sind.

Über die rationale Funktion A hat mein Vater (Sitz.-Ber. d. Berl. Ak. 1893, S. 986, 987, Nr. 4 und 1894, S. 1117—1121, Nr. 5) einige Eigenschaften hergeleitet, welche wir, soweit wir sie im folgenden brauchen,

*) L. Fuchs, Sitz.-Ber. der Berl. Ak. 1888, S. 1278—1282, Nr. 11 u. 12. Vgl. auch meine Programmarbeit (Bismarckgymnasium, Wilmersdorf-Berlin 1902).

für Differentialgleichungen zweiter Ordnung hier kurz zusammenstellen wollen:

1. Ist $x = a_i$ eine wesentlich singuläre Stelle von (A), so verschwindet A an dieser Stelle mindestens von erster Ordnung.

2. Für die wesentlich singuläre Stelle $x = t$ wird A nicht unendlich.

3. Für eine scheinbar singuläre Stelle, d. h. für eine solche, für die die Wurzeln der determinierenden Fundamentalgleichung sich um eine ganze Zahl unterscheiden, ohne daß in den Integralen Logarithmen auftreten, kann A unendlich werden.

Nehmen wir also an, daß unsere Differentialgleichung außer $x = t$ noch die wesentlich singulären Stellen $a_1, a_2, \cdots, a_n, a_{n+1} = \infty$ besitzt, so muß A die Gestalt haben

$$A = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n) A_1.$$

Setzt man nun $x = \frac{1}{z}$, so geht (1) über in

$$\frac{\partial y_i}{\partial t} = B y_i - A z^2 \frac{\partial y_i}{\partial z}.$$

Soll also $x = \infty$ oder $z = 0$ auch eine wesentlich singuläre Stelle sein, so muß $A z^2$ für $z = 0$ mindestens von erster Ordnung verschwinden. Es muß also A_1 für $x = \infty$ von der Ordnung $n - 1$ verschwinden, d. h. es muß der Grad seines Zählers um $n - 1$ kleiner sein als der seines Nenners. Da aber A nur für scheinbar singuläre Stellen unendlich werden kann, *so müssen also neben den $n + 2$ wesentlich singulären Stellen mindestens $n - 1$ scheinbar singuläre Stellen vorhanden sein*, was mit den auf andere Weise gefundenen Resultaten von Herrn Poincaré*) und Herrn Schlesinger**) übereinstimmt.

Es soll nun im folgenden zunächst angenommen werden, daß, außer $x = t$, noch die singulären Stellen $x = 0$, $x = 1$ und $x = \infty$ für die Differentialgleichung (A) vorhanden sind. Sollten die im Endlichen gelegenen von t verschiedenen singulären Stellen andere Werte a_1 und a_2 haben, so kann man es bekanntlich durch eine einfache Transformation der unabhängigen Veränderlichen dahin bringen, daß diese Werte bezw. in 0 und 1 übergehen. Dann muß also neben den vier wesentlich singulären Stellen mindestens noch eine scheinbar singuläre Stelle $x = \lambda$ für die Differentialgleichung angenommen werden, und wir fragen uns nun: Läßt sich λ so bestimmen, daß die Koeffizienten der Substitutionen, die ein Fundamentalsystem y_1, y_2 der Differentialgleichung bei Umläufen um die singulären Stellen erleidet, beliebige von t unabhängige Werte besitzen?

*) Acta Math., Bd. IV, S. 217—219.

**) Crelles Journal, Bd. 123, S. 168 und Handbuch der Theorie der lin. Differentialgl., Bd. II_1, S. 383 und 388.

II.

Wir gehen also nunmehr aus von folgender Differentialgleichu

(A) $$\frac{d^2y}{dx^2} = py,$$

wo

(1) $$p = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{(x-t)^2} + \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x-1} + \frac{\gamma}{x-t} + \frac{e}{(x-\lambda)^2} + \frac{}{x}$$

Damit die Differentialgleichung zur Fuchsschen Klasse gehö Integrale also auch im Unendlichen nicht von unendlich hoher O unendlich werden, muß noch angenommen werden, daß

(2) $$\alpha + \beta + \gamma + \varepsilon = 0$$

sei. Wegen der über die Substitutionsgruppe gemachten Vorauss müssen die Konstanten $a, b, c, e,$ welche die Wurzeln der determinie Fundamentalgleichungen bestimmen, von t unabhängig sein.*) Di nale Funktion A der Gleichung (1) I wird dann bei der Annahn einer einfachen scheinbar singulären Stelle die Gestalt haben:

(3) $$A = \frac{x(x-1)}{x-\lambda} M,$$

wo M eine von x unabhängige Größe bedeutet. Damit A für $x =$ von erster Ordnung verschwinde, muß, wie schon gesagt, λ eine e scheinbar singuläre Stelle sein, d. h. es müssen sich die Wurze determinierenden Fundamentalgleichung für $x = \lambda$ um 2 unterschei

Es ist nämlich zufolge (1) Nr. I

(4) $$A = C \begin{vmatrix} y_1 & \frac{\partial y_1}{\partial t} \\ y_2 & \frac{\partial y_2}{\partial t} \end{vmatrix};$$

weil der Koeffizient von $\frac{dy}{dx}$ in (A) gleich Null angenommen wor muß

(5) $$\frac{1}{C} = \begin{vmatrix} y_1 & \frac{\partial y_1}{\partial x} \\ y_2 & \frac{\partial y_2}{\partial x} \end{vmatrix}$$

eine Konstante in bezug auf x sein. Es sei nun die Differenz der W der determinierenden Fundamentalgleichung für $x = \lambda$

(6) $$r(r-1) = e$$

eine ganze Zahl g, so sind diese Werte, da ihre Summe gleich 1 $\frac{1-g}{2}$ und $\frac{1+g}{2}$.

*) Vgl. L. Fuchs, S.-B. d. Berl. Ak. 1892, Nr. 3, S. 162, Satz I.

Ist nun η_{11} das zu $\frac{1-g}{2}$ und η_{12} das zu $\frac{1+g}{2}$ gehörige Integral und ist

$$y_1 = c_{11}\eta_{11} + c_{12}\eta_{12},$$
$$y_2 = c_{21}\eta_{11} + c_{22}\eta_{12},$$

so ergibt sich

$$A = C\left\{y_1^2\left(c_{11}\frac{\partial c_{21}}{\partial t} - c_{21}\frac{\partial c_{11}}{\partial t}\right) + y_1 y_2\left(c_{11}\frac{\partial c_{22}}{\partial t} - c_{21}\frac{\partial c_{12}}{\partial t} + c_{12}\frac{\partial c_{21}}{\partial t} - c_{22}\frac{\partial c_{11}}{\partial t}\right)\right.$$
$$\left. + y_2^2\left(c_{12}\frac{\partial c_{22}}{\partial t} - c_{22}\frac{\partial c_{12}}{\partial t}\right) + (c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21})\left(y_1\frac{\partial y_2}{\partial t} - y_2\frac{\partial y_1}{\partial t}\right)\right\}. \tag{7}$$

Das einzige Glied, welches hier zu einem negativen Exponenten gehören kann, ist das mit y_1^2; dieses gehört zum Exponenten $1-g$. Soll also

$$1 - g = -1$$

sein, so folgt $g = 2$.

Wenn aber die Wurzeln von (6)

$$\frac{1-2}{2} = -\frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$$

sein sollen, so muß

$$e = \frac{3}{4} \tag{8}$$

sein.

III.

Für die rationale Funktion A ergibt sich noch die partielle Differentialgleichung*)

$$\frac{\partial p}{\partial t} = A\frac{\partial p}{\partial x} + 2p\frac{\partial A}{\partial x} - \frac{1}{2}\frac{\partial^3 A}{\partial x^3}, \tag{B}$$

und man sieht also, daß sich unser Problem auf das folgende zurückführt:

Lassen sich λ und M in (3) II *so bestimmen, daß die Gleichung* (B) *durch eine rationale Funktion p der Form* (1) II *befriedigt wird?*

Vergleicht man zunächst die Koeffizienten von $(x-t)^{-3}$ auf beiden Seiten von (B), so ergibt sich

$$2c = -M\frac{t(t-1)}{t-\lambda}2c$$

oder

$$M = -\frac{t-\lambda}{t(t-1)}, \tag{1}$$

so daß also nun A die Gestalt hat

$$A = -\frac{x(x-1)}{x-\lambda}\frac{t-\lambda}{t(t-1)}. \tag{2}$$

*) L. Fuchs, S.-B. d. Berl. Ak. 1894, Nr. 7, S. 1124, Gl. (5).

Beide Seiten der Gleichung (B) werden nach Einsetzen dieses Wertes von A und der rationalen Funktion p (siehe (1) I) echt gebrochene rationale Funktionen; zerlegt man diese in Partialbrüche, so gibt die Vergleichung entsprechender Koeffizienten das folgende System von Gleichungen:

$$\alpha + \beta + \gamma + \varepsilon = 0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} = -\frac{\lambda - t}{t(t-1)}\{2\lambda - 1 + 2\varepsilon\lambda(\lambda - 1)\}, \tag{4}$$

$$\frac{a}{\lambda^2} + \frac{b}{(\lambda-1)^2} + \frac{c}{(\lambda - t)^2} + \frac{\alpha}{\lambda} + \frac{\beta}{\lambda - 1} + \frac{\gamma}{\lambda - t} = \varepsilon^2, \tag{5}$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = -\frac{\lambda - t}{t(t-1)}\left\{-\frac{\alpha}{\lambda} + 2a\frac{\lambda - 1}{\lambda^2}\right\}, \tag{6}$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial t} = -\frac{\lambda - t}{t(t-1)}\left\{\frac{\beta}{\lambda - 1} + 2b\frac{\lambda}{(\lambda-1)^2}\right\}, \tag{7}$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} = -\frac{\lambda - t}{t(t-1)}\left\{\gamma\frac{\lambda(\lambda-1) - (\lambda - t)^2}{(\lambda - t)^2} + 2c\frac{\lambda(\lambda-1)}{(\lambda - t)^2}\right\}. \tag{8}$$

Die Gleichung (5) besagt, daß in der Umgebung von $x = \lambda$, wie es für eine scheinbar singuläre Stelle notwendig ist, die Integrale der Differentialgleichung (A) keinen Logarithmus enthalten. Sind nämlich, wie oben gezeigt, die Wurzeln der determinierenden Fundamentalgleichung für $x = \lambda$, $\gamma_1 = \frac{3}{2}$ und $\gamma_2 = -\frac{1}{2}$, so gehört zum Exponenten $\frac{3}{2}$ ein logarithmenfreies Integral

$$y_1 = (x - \lambda)^{\frac{3}{2}}\{c_0 + c_1(x - \lambda) + c_2(x - \lambda)^2 + \cdots\},$$

und es ist dann bekanntlich

$$y_2 = y_1 \int \frac{c\,dx}{y_1^2},$$

wo c eine willkürliche von Null verschiedene Konstante bezeichnet, ein mit y_1 ein Fundamentalsystem bildendes Integral. Soll y_2 bei $x = \lambda$ keinen Logarithmus enthalten, so ergibt sich

$$3c_1^2 = 2c_0c_2. \tag{9}$$

Außerdem bestehen zufolge (A) zwischen c_0, c_1, c_2, wenn

$$q = \frac{a}{\lambda^2} + \frac{b}{(\lambda-1)^2} + \frac{c}{(\lambda - t)^2} + \frac{\alpha}{\lambda} + \frac{\beta}{\lambda - 1} + \frac{\gamma}{\lambda - t}$$

gesetzt wird, die Gleichungen

$$\begin{cases} 3c_1 = \varepsilon c_0, \\ 8c_2 = \varepsilon c_1 + q c_0. \end{cases} \tag{10}$$

Aus (9) und (10) folgt aber

$$q = \varepsilon^2,$$

was mit der Gleichung (5) übereinstimmt.

IV.

Es ist nunmehr zu untersuchen, ob die Gleichungen (3) bis (8) voriger Nummer miteinander verträglich sind.

Zunächst ergibt sich, daß

$$(1) \qquad \alpha\lambda + \beta(\lambda - 1) + \gamma(\lambda - t) = \varkappa$$

sein muß, wo $\varkappa$ eine von t unabhängige Konstante bedeutet. Diese Gleichung besagt, daß auch die Wurzeln der determinierenden Fundamentalgleichung von (A) für $x = \infty$ von t unabhängig sein müssen. Diese determinierende Gleichung für $x = \infty$ oder $\varepsilon = 0$ lautet nämlich

$$(2) \qquad r(r-1) + 2r = a + b + c + \frac{3}{4} - \alpha\lambda - \beta(\lambda - 1) - \gamma(\lambda - t),$$

und ihre Wurzeln sind dann und nur dann von t unabhängig, wenn $\alpha\lambda + \beta(\lambda - 1) + \gamma(\lambda - t) = \varkappa$ von t unabhängig ist.

Die Behandlung der Bedingungsgleichungen kann nun weiter folgendermaßen erfolgen:

Setzt man

$$(3) \qquad \varrho = \frac{a}{\lambda^2} + \frac{b}{(\lambda-1)^2} + \frac{c}{(\lambda - t)^2},$$

so folgt aus (1) dieser und (3), (5) voriger Nummer

$$\begin{aligned} \alpha\lambda + \beta(\lambda - 1) + \gamma(\lambda - t) &= \varkappa, \\ \alpha + \beta + \gamma &= -\varepsilon, \\ \frac{\alpha}{\lambda} + \frac{\beta}{\lambda - 1} + \frac{\gamma}{\lambda - t} &= \varepsilon^2 - \varrho, \end{aligned}$$

und hieraus berechnet man:

$$(4) \qquad \alpha = \frac{\varkappa\lambda}{t} + \frac{\lambda}{t}[1+\varepsilon(\lambda-1)][1+\varepsilon(\lambda-t)] - \varrho\frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}{t},$$

$$(5) \qquad \beta = -\frac{\varkappa(\lambda-1)}{t-1} - \frac{\lambda-1}{t-1}[1+\varepsilon\lambda][1+\varepsilon(\lambda-t)] + \varrho\frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}{t-1},$$

$$(6) \qquad \gamma = \frac{\varkappa(\lambda-t)}{t(t-1)} + \frac{\lambda-t}{t(t-1)}[1+\varepsilon\lambda][1+\varepsilon(\lambda-1)] - \varrho\frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}{t(t-1)}.$$

Setzt man in diese Ausdrücke für ε seinen Wert aus (4) III ein, so ergibt sich:

$$(P) \qquad \alpha = \frac{\varkappa\lambda}{t} - \frac{\lambda(2\lambda-t-1)^2}{4t(\lambda-1)(\lambda-t)} - \varrho\frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}{t} + \frac{1}{4}\frac{t(t-1)^2}{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}\left\{\frac{d\lambda}{dt} - \frac{\lambda-1}{t-1}\right\}^2,$$

$$(Q) \qquad \beta = -\frac{\varkappa(\lambda-1)}{t-1} + \frac{(\lambda-1)(2\lambda-t)^2}{4(t-1)\lambda(\lambda-t)} + \varrho\frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}{t-1} - \frac{1}{4}\frac{t^2(t-1)}{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}\left\{\frac{d\lambda}{dt} - \frac{\lambda}{t}\right\}^2,$$

$$(R) \qquad \gamma = \frac{\varkappa(\lambda-t)}{t(t-1)} - \frac{(\lambda-t)(2\lambda-1)^2}{4t(t-1)\lambda(\lambda-1)} - \varrho\frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}{t(t-1)} + \frac{1}{4}\frac{t(t-1)}{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}\left\{\frac{d\lambda}{dt}\right\}^2.$$

Die Entscheidung der Frage, ob die Bedingungsgleichungen (3) bis (8) Nr. III miteinander verträglich sind, kann nun in der Weise erfolgen, daß diese Werte für α, β, γ in (6) bis (8) Nr. III eingesetzt werden. Das Ergebnis dieser Substitutionen ist:

aus (6) III

$$\left(\frac{d\lambda}{dt} - \frac{\lambda-1}{t-1}\right) D(\lambda) = 0, \tag{7}$$

aus (7) III

$$\left(\frac{d\lambda}{dt} - \frac{\lambda}{t}\right) D(\lambda) = 0, \tag{8}$$

aus (8) III

$$\frac{d\lambda}{dt} D(\lambda) = 0. \tag{9}$$

Hierbei bedeutet:

$$\begin{aligned}(S)\quad D(\lambda) = {} & \frac{d^2\lambda}{dt^2} + \left[\frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} + \frac{1}{\lambda-t}\right]\frac{d\lambda}{dt} - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda-1} + \frac{1}{\lambda-t}\right]\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2 \\ & - 2\frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}{t^2(t-1)^2}\left\{-(\varkappa-1) + a + b + c - \left(a+\frac{1}{4}\right)\frac{t}{\lambda^2}\right. \\ & \left. + \left(b+\frac{1}{4}\right)\frac{t-1}{(\lambda-1)^2} - c\frac{t(t-1)}{(\lambda-t)^2}\right\}.\end{aligned}$$

Die Gleichungen (7), (8), (9) werden gleichzeitig erfüllt, wenn

$$D(\lambda) = 0 \tag{L}$$

ist.

Die Gleichungen (3)—(8) *Nr.* III *lassen also eine Auflösung zu:* λ *als Funktion von* t *muß Integral der Gleichung* (L) *sein und* α, β, γ *müssen durch ihre Ausdrücke* (P), (Q), (R) *berechnet werden. Dabei ergeben sich die folgenden sechs willkürlichen Konstanten:* $a, b, c, \varkappa$ *und die beiden zu der Differentialgleichung* 2^{ter} *Ordnung* (L) *gehörigen Integrationskonstanten.*

V.

Setzt man nun:

$$(1)\quad \begin{cases} -4(\varkappa-1) + 4a + 4b + 4c = k_\infty, \\ 4\left(a+\frac{1}{4}\right) = k_0, \\ 4\left(b+\frac{1}{4}\right) = k_1, \\ 4\left(c+\frac{1}{4}\right) = k_t, \end{cases}$$

so lautet die Gleichung (L)

$$\begin{aligned}(L')\quad & \frac{d^2\lambda}{dt^2} + \left[\frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} + \frac{1}{\lambda-t}\right]\frac{d\lambda}{dt} - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda-1} + \frac{1}{\lambda-t}\right]\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2 \\ & = \frac{1}{2}\frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}{t^2(t-1)^2}\left[k_\infty - k_0\frac{t}{\lambda^2} + k_1\frac{t-1}{(\lambda-1)^2} - (k_t-1)\frac{t(t-1)}{(\lambda-t)^2}\right]^*).\end{aligned}$$

*) Die Differentialgleichung (L') besitzt, worauf ich bei anderer Gelegenheit eingehen möchte, die festen Verzweigungspunkte 0, 1, t, ∞. In der Tat findet sie sich in dem speziellen Fall $k_0 = k_1 = k_t = k_\infty = 0$ in den von Herrn Painlevé für Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit festen Verzweigungspunkten aufgestellten Tableaux (Acta Math. Bd. 25 z. B. Tabl. III). Darauf, daß diese Tableaux noch nach

Die Bedeutung der Größen k_∞, k_0, k_1, k_t ist dabei folgende:

Lautet die determinierende Fundamentalgleichung für $x = 0$

$$r(r-1) = a,$$

und ist r_1 eine Wurzel dieser Gleichung, so ist auch $1 - r_1$ eine solche, und $2r_1 - 1$ ist die Differenz der Wurzeln. Nun ist aber

$$(2r_1-1)^2 = 4a + 1 = k_0.$$

Demnach ist k_0 das Quadrat der Differenz der Wurzeln der determinierenden Fundamentalgleichung für $x = 0$, und ebenso sind k_1, k_t bezw. die Quadrate der Wurzeldifferenzen für $x = 1$ und $x = t$.

Weiter lautet nach (2) IV die determinierende Fundamentalgleichung für $x = \infty$

$$r(r-1) + 2r = a + b + c + \tfrac{3}{4} - x,$$

also

$$(2r+1)^2 = 4a + 4b + 4c - 4(x-1) = k_\infty.$$

Da aber $2r + 1$ die Wurzeldifferenz ist, so ist also k_∞ das Quadrat dieser Wurzeldifferenz für $x = \infty$. Die Differentialgleichung (L′) für λ läßt sich nun in merkwürdiger Weise umgestalten:

Setzt man:

$$u = \int_\infty^\lambda \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}}, \tag{2}$$

so ist

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{\sqrt{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}} \frac{d\lambda}{dt} + \frac{\partial u}{\partial t},$$

wo $\frac{\partial u}{\partial t}$ bedeutet, daß bei dieser Differentiation λ als Konstante in bezug auf t anzusehen ist. Weiter folgt:

$$\frac{d^2u}{dt^2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}}\left[\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda-1} + \frac{1}{\lambda-t}\right]\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2 + \frac{1}{\sqrt{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}} \frac{1}{\lambda-t} \frac{d\lambda}{dt} + \frac{1}{\sqrt{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}} \frac{d^2\lambda}{dt^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Also ist

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{2t-1}{t(t-1)} \frac{du}{dt} + \frac{1}{4t(t-1)} u$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}}\left[\frac{d^2\lambda}{dt^2} + \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} + \frac{1}{\lambda-t}\right)\frac{d\lambda}{dt} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda-1} + \frac{1}{\lambda-t}\right)\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2\right] + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{2t-1}{t(t-1)} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{4t(t-1)} u,$$

also wegen (L′):

einigen Richtungen hin zu ergänzen sind, hat schon Herr Gambier (C. R. de l'Ac. des Sc. de Paris 1906, t. 142, p. 268) hingewiesen; siehe auch seine weiteren Veröffentlichungen C. R. 1906, t. 142, p. 1403 u. 1497, t. 143, p. 741.

$$\frac{d^2u}{dt^2}+\frac{2t-1}{t(t-1)}\frac{du}{dt}+\frac{1}{4t(t-1)}u=\frac{\partial^2u}{\partial t^2}+\frac{2t-1}{t(t-1)}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{4t(t-1)}u$$
$$+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}}{t^2(t-1)^2}\Big[k_\infty-k_0\frac{t}{\lambda^2}+k_1\frac{t-1}{(\lambda-1)^2}-(k_t-1)\frac{t(t-1)}{(\lambda-t)^2}\Big].$$

besteht aber, wie leicht durch die Rechnung zu bestätigen, für das
ptische Integral

$$v=\int_\infty^x\frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-t)}}$$

)

ie Beziehung

$$\frac{d^2v}{\partial t}+\frac{2t-1}{t(t-1)}\frac{dv}{dt}+\frac{1}{4t(t-1)}v=-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{x(x-1)(x-t)}}{t(t-1)}\frac{1}{(x-t)^2};\tag{4}$$

also ergibt sich, wenn, wie oben, bei den Differentiationen λ als Konstante angesehen wird:

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}+\frac{2t-1}{t(t-1)}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{4t(t-1)}u=-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}}{t(t-1)}\frac{1}{(\lambda-t)^2}.\tag{5}$$

Daher folgt

$$\frac{d^2u}{dt^2}+\frac{2t-1}{t(t-1)}\frac{du}{dt}+\frac{u}{4t(t-1)}$$
$$=\frac{\sqrt{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}}{2t^2(t-1)^2}\Big[k_\infty-k_0\frac{t}{\lambda^2}+k_1\frac{t-1}{(\lambda-1)^2}-k_t\frac{t(t-1)}{(\lambda-t)^2}\Big].\tag{L''}$$

Bezeichnet man die durch Umkehrung des elliptischen Integrals

$$u=\int_\infty^\lambda\frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}}$$

entstehende elliptische Funktion durch

$$\lambda=f(u,t),$$

so daß also

$$\frac{\partial\lambda}{\partial u}=\sqrt{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}\tag{6}$$

und setzt

$$\psi(u,t)=k_\infty f(u)+k_0\frac{t}{f(u)}+k_1\frac{1-t}{f(u)-1}+k_t\frac{t(t-1)}{f(u)-t},\tag{7}$$

wo hier der Einfachheit wegen das zweite Argument bei f wegg
so daß also $\psi(u,t)$ in bezug auf u eine eindeutige doppelt
Funktion ist, die für solche Werte von u unendlich wird, für

$$f(u)=\infty,\quad f(u)=0,\quad f(u)=1\quad\text{oder}\quad f(u)=t$$

wird; so lautet (L'')

$$\frac{d^2u}{\quad}+\frac{2t-1}{t(t-1)}\frac{du}{dt}+\frac{u}{4t(t-1)}=\frac{1}{2t^2(t-1)^2}\frac{\partial\psi(u,t)}{\partial u}$$

VI.

Man kann sich die Frage vorlegen, für welche rationale Transformationen der abhängigen und der unabhängigen Variablen die Differentialgleichung (A) in eine Gleichung derselben Form mit denselben wesentlich singulären Stellen 0, 1, t, ∞ übergeht. Das Ergebnis dieser Untersuchung ist, daß folgende Transformationen von x möglich sind:

$$\xi_1 = \frac{t}{x}, \quad \xi_2 = \frac{x-t}{x-1}, \quad \xi_3 = \frac{(x-1)t}{x-t}. \tag{9}$$

Und zwar geht über, bei ξ_1:

$$\begin{aligned} x &= 0 \quad \text{in} \quad \xi_1 = \infty, \\ x &= 1 \quad \text{in} \quad \xi_1 = t, \\ x &= t \quad \text{in} \quad \xi_1 = 1, \\ x &= \infty \quad \text{in} \quad \xi_1 = 0; \end{aligned}$$

bei ξ_2:

$$\begin{aligned} x &= 0 \quad \text{in} \quad \xi_2 = t, \\ x &= 1 \quad \text{in} \quad \xi_2 = \infty, \\ x &= t \quad \text{in} \quad \xi_2 = 0, \\ x &= \infty \quad \text{in} \quad \xi_2 = 1; \end{aligned}$$

bei ξ_3:

$$\begin{aligned} x &= 0 \quad \text{in} \quad \xi_3 = 1, \\ x &= 1 \quad \text{in} \quad \xi_3 = 0, \\ x &= t \quad \text{in} \quad \xi_3 = \infty, \\ x &= \infty \quad \text{in} \quad \xi_3 = t. \end{aligned}$$

Die abhängige Variable y muß dann jedesmal noch so transformiert werden, daß wieder der Koeffizient der ersten Ableitung nach der neuen unabhängigen Veränderlichen gleich Null wird. Die scheinbar singuläre Stelle λ geht dabei über bezw. in

$$\lambda_1 = \frac{t}{\lambda}, \quad \lambda_2 = \frac{\lambda - t}{\lambda - 1}, \quad \lambda_3 = \frac{(\lambda-1)t}{\lambda - t}. \tag{10}$$

Die Größen λ_1, λ_2, λ_3 müssen demnach genau ebenso gebildeten Differentialgleichungen genügen wie λ selbst, was auch die Rechnung unmittelbar liefert, wenn man in (L') statt λ die Werte λ_1, λ_2, λ_3 substituiert. In diesen Gleichungen ist nur entsprechend der Vertauschung der singulären Stellen untereinander zu setzen für

$$k_0, \quad k_1, \quad k_t, \quad k_\infty:$$

in der Gleichung für λ_1 bezw.:

$$k_\infty, \quad k_t, \quad k_1, \quad k_0;$$

in der Gleichung für λ_2 bezw.:

$$k_t, \quad k_\infty, \quad k_0, \quad k_1;$$

in der Gleichung für λ_3 bezw.:

$$k_1, \quad k_0, \quad k_\infty, \quad k_t.$$

In den Gleichungen (L″) und (L‴) ist dann an Stelle von u zu setzen

$$(11) \qquad u_i = \int_0^{\lambda_i} \frac{d\lambda_i}{\sqrt{\lambda_i(\lambda_i-1)(\lambda_i-t)}}, \quad i = 1, 2, 3,$$

welche Ausdrücke wegen

$$\frac{d\lambda_i}{\sqrt{\lambda_i(\lambda_i-1)(\lambda_i-t)}} = \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}}, \quad i = 1, 2, 3$$

übergeführt werden können in

$$(12) \quad u_1 = \int_0^{\lambda} \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}}, \quad u_2 = \int_1^{\frac{\lambda-t}{\lambda-1}} \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}}, \quad u_3 = \int_t^{\frac{(\lambda-1)t}{\lambda-t}} \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}}.$$

VII.

Das in der neueren Literatur vielfach behandelte sogenannte *Riemannsche Problem* gründet sich auf die Fragmente einer aus dem Nachlasse Riemanns veröffentlichten Arbeit: Zwei allgemeine Sätze über lineare Differentialgleichungen mit algebraischen Koeffizienten (Riemanns Werke II. Auflage, S. 379). Auf die Bedeutung der in diesen Fragmenten enthaltenen Problemstellungen hat zuerst Herr Klein (vgl. Math. Ann. Bd. 46, S. 83) hingewiesen. Später hat dann Herr Schlesinger in einer Reihe von Abhandlungen*) dieses Problem in Angriff genommen und seine Lösbarkeit gezeigt, wenn die sogenannten Konvergenzbedingungen**) erfüllt sind. Neuerdings hat Herr Hilbert (Grundzüge einer allgemeinen Theorie der Integralgleichungen III, Göttinger Nachrichten 1905, p. 330—337) das Problem für Differentialgleichungen zweiter Ordnung erledigt. Dieses Problem ist das folgende:

Es soll ein System von n Funktionen $y_1, y_2, y_3, \cdots, y_n$ gesucht werden, die in der ganzen Ebene mit Ausnahme der Stellen $a_1, a_2, \cdots, a_\sigma, a_{\sigma+1} = \infty$ eindeutig, endlich und stetig sind. An den singulären Stellen sollen die

*) L. Schlesinger: Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen im Anschluß an das Riemannsche Problem, I, Crelles Journal Bd. 123, S. 138 ff.; II, Bd. 124, S. 292 ff.; Bd. 130, S. 26 ff.

**) a. a. O. Bd. 123, S. 147.

Funktionen nicht von unendlich hoher Ordnung unendlich werden und sollen bei Umläufen der unabhängigen Veränderlichen um $a_1, a_2, \cdots, a_\sigma$ bezw. die vorgeschriebenen Substitutionen $A_1, A_2, \cdots, A_\sigma$, also bei $a_{\sigma+1} = \infty$ dann die Substitution

$$A_1^{-1} A_2^{-1} A_3^{-1} \cdots A_\sigma^{-1}$$

erleiden.

Da die singulären Stellen $a_1, a_2, \cdots, a_\sigma$ willkürlich vorgeschrieben werden sollen und ebenso die Koeffizienten der Substitutionen $A_1, A_2, \cdots, A_\sigma$, die also auch von $a_1, a_2, \cdots, a_\sigma$ unabhängig sind, so genügen, wie Herr Schlesinger in den angegebenen Abhandlungen zeigt, die $y_1, y_2, \cdots, y_n$ einer linearen homogenen Differentialgleichung der Fuchsschen Klasse, deren Substitutionsgruppe von der Wahl der singulären Stellen unabhängig ist.

Die vorstehenden Untersuchungen geben nun diese Differentialgleichung für zwei Funktionen und drei im Endlichen gelegene singuläre Stellen $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = t$. Wir wollen zeigen, daß die Anzahl der willkürlich gebliebenen Konstanten mit der für das Riemannsche Problem erforderlichen übereinstimmt.

Die Anzahl der in A_1, A_2, A_3 vorkommenden Konstanten ist 12. Da man es aber stets durch eine Transformation des Funktionssystems so einrichten kann, daß die Determinanten der Substitutionen gleich 1 sind, was darauf hinauskommt, daß, wie wir angenommen haben, der Koeffizient der ersten Ableitung in der Differentialgleichung, der das Funktionssystem genügt, den Wert Null hat, so reduziert sich die Zahl dieser Konstanten auf 9, wenn wir von vorneherein annehmen, daß die Determinanten von A_1, A_2, A_3 den Wert 1 haben. Nun hatte sich die Zahl der direkt verfügbaren Konstanten unserer Differentialgleichung gleich 6 ergeben. Hierzu kommen aber noch drei Konstante dadurch, daß man von einem Fundamentalsystem y_1, y_2 zu einem anderen

$$\eta_1 = c_{11} y_1 + c_{12} y_2,$$
$$\eta_2 = c_{21} y_1 + c_{22} y_2$$

übergehen kann. Die Zahl der hier hinzutretenden Konstanten ist deshalb nur 3, weil ein den Elementen eines Fundamentalsystems hinzugefügter gemeinsamer konstanter Faktor die Substitutionsgruppe unverändert läßt. Wir haben also, wie es sein muß, im ganzen neun Konstanten zur Verfügung.

Bei dieser Gelegenheit möchte ich eine Bemerkung zu einer von meinem Vater (L. Fuchs, Sitzungsber. der Berl. Ak. 1894, S. 1125, Nr. 8) aufgestellten Differentialgleichung machen. Die dort aufgestellte lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit drei im Endlichen gelegenen

singulären Stellen, deren Substitutionsgruppe von der Wahl einer singulären Stelle t unabhängig ist, hat keine scheinbar singuläre Stelle; es kann also der unendlich ferne Punkt keine wesentlich singuläre Stelle sein. In der Tat läßt sich diese Differentialgleichung in folgender Form schreiben:

$$(1) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\alpha_2 x^2(t-1)^2 - (\alpha_1+\alpha_2-\alpha')\,x(x-1)\,t(t-1) + \alpha_1(x-1)^2t^2}{x^2(x-1)^2(x-t)^2}\,y,$$

wo die konstanten Größen α dieselbe Bedeutung haben wie in der Arbeit meines Vaters.

Die Gleichung (1) kann nun durch eine einfache Transformation in eine andere mit zwei im Endlichen gelegenen Punkten und dem unendlich fernen Punkt als wesentlich singulären Stellen übergeführt werden.

Setzt man nämlich

$$(2) \qquad \left| \begin{array}{l} x = \dfrac{t}{t + z(1-t)}, \\ y = xu, \end{array} \right.$$

so geht (1) über in

$$(3) \qquad \frac{d^2u}{dz^2} = \frac{\alpha_2 - (\alpha_1+\alpha_2-\alpha')z + \alpha_1 z^2}{z^2(z-1)^2}\,u,$$

welche Gleichung leicht in eine Gaußsche Differentialgleichung übergeführt werden kann.

VIII.

Wir wollen nun einen besonders interessanten Spezialfall hervorheben, der von der allgemeinen von uns behandelten Differentialgleichung eine ähnliche Spezialisierung bildet, wie die sogenannte Legendresche Differentialgleichung von der allgemeinen Gaußschen.

Die Wurzeln der determinierenden Fundamentalgleichungen der Gaußschen Differentialgleichung

$$(1) \qquad x(x-1)\frac{d^2y}{dx^2} + [(\alpha+\beta+1)x - \gamma]\frac{dy}{dx} + \alpha\beta y = 0,$$

die ja bekanntlich die Lösung des oben angegebenen Riemannschen Problems für zwei im Endlichen gelegene singuläre Stellen 0, 1 und zwei Funktionen y_1, y_2 enthält, sind

$$\begin{array}{ll} \text{bei } x = 0 & : 0,\ 1-\gamma, \\ \text{bei } x = 1 & : 0,\ \gamma-\alpha-\beta, \\ \text{bei } x = \infty & : \alpha,\ \beta. \end{array}$$

Fragt man sich, wie α, β, γ gewählt werden müssen, damit die Wurzeln für jede singuläre Stelle einander gleich werden, so ergibt sich

$$\gamma = 1, \quad \alpha+\beta = \gamma, \quad \alpha = \beta,$$

d. h. also

$$\gamma = 1, \quad \alpha = \beta = \frac{1}{2}.$$

Die Differentialgleichung (1) lautet dann

$$x(x-1)\frac{d^2y}{dx^2} + (2x-1)\frac{dy}{dx} + \frac{1}{4}y = 0. \tag{2}$$

Es ist dies die sogenannte Legendresche Differentialgleichung, die von Legendre*) zuerst aufgestellt worden ist. Diese Gleichung wird befriedigt durch die Periodizitätsmoduln des elliptischen Integrals

$$u = \int_{\infty}^{z} \frac{dz}{\sqrt{z(z-1)(z-x)}};$$

sie spielt bekanntlich in der Theorie der Modulfunktion eine bedeutsame Rolle.

Wir fragen uns nun ebenso, welche Form unsere Differentialgleichung (A) annimmt, wenn die Wurzeln der determinierenden Fundamentalgleichungen für alle wesentlich singulären Stellen 0, 1, t, ∞ einander gleich werden.

Damit die Wurzeln der Gleichung

$$r(r-1) = a$$

einander gleich werden, muß $a = -\frac{1}{4}$ sein; und ebenso folgt: $b = -\frac{1}{4}$, $c = -\frac{1}{4}$. Damit ferner die Wurzeln der determinierenden Fundamentalgleichung für $x = \infty$ ((2) IV)

$$r(r+1) = a + b + c + \frac{3}{4} - \varkappa$$

einander gleich werden, muß $\varkappa = \frac{1}{4}$ sein.

Da ferner nach Nr. V k_0, k_1, k_t, k_∞ die Quadrate der Differenzen der Wurzeln der determinierenden Fundamentalgleichungen bezw. für $x = 0$, $x = 1$, $x = t$, $x = \infty$ sind, so müssen diese Größen hier den Wert Null haben.

Dann geht aber zufolge (L″) die Differentialgleichung, der λ als Funktion von t genügt, wenn wieder

$$u = \int_{\infty}^{\lambda} \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}} \tag{3}$$

gesetzt wird, über in

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{2t-1}{t(t-1)}\frac{du}{dt} + \frac{1}{4t(t-1)}u = 0, \tag{4}$$

*) Legendre, Traité des fonctions elliptiques, Bd. I (1825), S. 62 ff.

d. h. in die Legendresche Differentialgleichung, die durch die Periodizitätsmoduln des Integrals (3) befriedigt wird.

Bezeichnet man also die durch Umkehrung von (3) entstehende elliptische Funktion mit $f(u)$ und ihre der Differentialgleichung (4) genügenden Perioden mit u_1 und u_2, so ist

$$\lambda = f(c_1 u_1 + c_2 u_2), \tag{5}$$

wo c_1, c_2 zwei willkürliche Konstanten sind, so daß $c_1 u_1 + c_2 u_2$ das allgemeine Integral von (4) darstellt.

Wir erhalten also das folgende Ergebnis:

Die Differentialgleichung lautet:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \Big[-\frac{1}{4}\frac{1}{x^2} - \frac{1}{4}\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{4}\frac{1}{(x-t)^2} + \frac{3}{4}\frac{1}{(x-\lambda)^2} + \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x-1} + \frac{\gamma}{x-t} + \frac{\varepsilon}{x-\lambda}\Big] y. \tag{A'}$$

Dabei ist

$$\alpha = \frac{1}{4}\Big[\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{t} - 1\Big] + \frac{t(t-1)^2}{4\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}\Big[\frac{d\lambda}{dt} - \frac{\lambda-1}{t-1}\Big]^2,$$

$$\beta = \frac{1}{4}\Big[\frac{1}{\lambda-1} - \frac{1}{t-1} + 1\Big] - \frac{t^2(t-1)}{4\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}\Big[\frac{d\lambda}{dt} - \frac{\lambda}{t}\Big]^2,$$

$$\gamma = \frac{1}{4}\Big[\frac{1}{\lambda-t} + \frac{1}{t} + \frac{1}{t-1}\Big] + \frac{1}{4}\frac{t(t-1)}{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}\Big[\frac{d\lambda}{dt}\Big]^2,$$

$$\varepsilon = -\frac{1}{2}\Big[\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda-1}\Big] - \frac{1}{2}\frac{t(t-1)}{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}\frac{d\lambda}{dt},$$

$$\lambda = f(c_1 u_1 + c_2 u_2),$$

wenn $f(u)$ die durch Umkehrung des Integrals

$$u = \int_{\infty}^{\lambda} \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}}$$

entstehende elliptische Funktion bedeutet und u_1 und u_2 die Perioden dieser elliptischen Funktion

$$u_1 = \frac{1}{2}\int_{t}^{0} \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}}, \qquad u_2 = \frac{1}{2}\int_{t}^{1} \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}},$$

die der Legendreschen Differentialgleichung

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{2t-1}{t(t-1)}\frac{du}{dt} + \frac{1}{4t(t-1)}u = 0$$

als ein Fundamentalsystem genügen.

Natürlich kann die Differentialgleichung (A') leicht durch die Transformation

$$y = x^{\frac{1}{2}}(x-1)^{\frac{1}{2}}(x-t)^{\frac{1}{2}}(x-\lambda)^{-\frac{1}{2}}u \tag{6}$$

so umgewandelt werden, daß die Wurzeln der determinierenden Fundamentalgleichungen für $x = 0, 1, t$ beide den Wert Null haben (für $x = \lambda$ die Werte 0 und 2), wie dies bei der Legendreschen Differentialgleichung bei 0 und 1 der Fall ist. Für $x = \infty$ werden die Wurzeln dann beide wie bei der Legendreschen Gleichung $\frac{1}{2}$. Ebenso kann auch die allgemeine Gleichung (A) so umgewandelt werden, daß von den Wurzeln der determinierenden Fundamentalgleichungen für die im Endlichen gelegenen singulären Punkte, wie bei der Gaußschen Differentialgleichung, eine den Wert Null hat.

IX.

Die Differentialgleichung für λ kann reduktibel sein und zwar kann sie mit einer Riccatischen Differentialgleichung ein Integral gemeinsam haben.

Ist nämlich r_1 eine Wurzel der determinierenden Fundamentalgleichung für $x = 0$, r_2 eine solche für $x = 1$ und r_3 für $x = t$, so genügt jedes Integral von

$$(1) \quad \frac{d\lambda}{dt} = (1-2r_2)\frac{\lambda}{t} + (1-2r_1)\frac{\lambda-1}{t-1} + 2(r_1+r_2+r_3-1)\frac{\lambda(\lambda-1)}{t(t-1)}$$

der Differentialgleichung für λ, wenn

$$(2) \qquad \varkappa = r_1 + r_2 + r_3 - 2(r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3),$$

d. h., wegen (2) IV, wenn

$$r = r_1 + r_2 + r_3 - \frac{3}{2}$$

eine Wurzel der determinierenden Fundamentalgleichung für $x = \infty$ wird.

Eine einfache Rechnung zeigt, daß in diesem Falle die Differentialgleichung für y (A) lautet:

$$(3) \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \left[\left(\frac{r_1}{x} + \frac{r_2}{x-1} + \frac{r_3}{x-t} - \frac{\frac{1}{2}}{x-\lambda}\right)^2 - \left(\frac{r_1}{x^2} + \frac{r_2}{(x-1)^2} + \frac{r_3}{(x-t)^2} - \frac{\frac{1}{2}}{(x-\lambda)^2}\right)\right] y.$$

Diese Gleichung ist reduktibel, sie wird befriedigt durch jedes Integral von

$$(4) \qquad \frac{dy}{dx} = \left[\frac{r_1}{x} + \frac{r_2}{x-1} + \frac{r_3}{x-t} - \frac{\frac{1}{2}}{x-\lambda}\right] y.$$

Da aus (4)

$$y = \text{const.}\, x^{r_1}(x-1)^{r_2}(x-t)^{r_3}(x-\lambda)^{-\frac{1}{2}}$$

folgt, so ist, wenn c_1, c_2 willkürliche Konstanten bedeuten,

$$(5)\qquad y = c_1 x^{r_1}(x-1)^{r_2}(x-t)^{r_3}(x-\lambda)^{-\frac{1}{2}}$$
$$+ c_2 x^{r_1}(x-1)^{r_2}(x-t)^{r_3}(x-\lambda)^{-\frac{1}{2}}$$
$$\int_0^x (x-\lambda)\, x^{-2r_1}(x-1)^{-2r_2}(x-t)^{-2r_3}\, dx$$

das allgemeine Integral von (3).

Es muß nun zufolge der Grundlage unserer Untersuchungen ein Fundamentalsystem von (3) so angegeben werden können, daß die Koeffizienten der Substitutionsgruppe von t unabhängig werden. Dieses Fundamentalsystem sei η_1, η_2.

Setzt man nun

$$y_1 = x^{r_1}(x-1)^{r_2}(x-t)^{r_3}(x-\lambda)^{-\frac{1}{2}},$$
$$y_2 = y_1 \int_0^x (x-\lambda)\, x^{-2r_1}(x-1)^{-2r_2}(x-t)^{-2r_3},$$

so gehen bei einem beliebigen Umlauf von x y_1, y_2 bezw. über in

$$\bar{y}_1 = \omega y_1,$$
$$\bar{y}_2 = \omega y_2 + \omega y_1 \int_L (x-\lambda)\, x^{-2r_1}(x-1)^{-2r_2}(x-t)^{-2r_3}\, dx,$$

wo das Integral über den geschlossenen Weg L zu erstrecken ist, den x bei dem Umlauf beschrieben hat, und ω eine von x und t unabhängige Konstante bedeutet.

Es sei nun

$$\eta_1 = c_{11} y_1 + c_{12} y_2,$$
$$\eta_2 = c_{21} y_1 + c_{22} y_2,$$

wo c_{ix} von x unabhängige Größen sind, dann gehen bei dem Umlaufe L, wenn

$$\int_L (x-\lambda) x^{-2r_1}(x-1)^{-2r_2}(x-t)^{-2r_3}\, dx = P$$

gesetzt wird, η_1, η_2 über in

$$\bar{\eta}_1 = \omega \eta_1 + c_{12}\omega y_1 P,$$
$$\bar{\eta}_2 = \omega \eta_2 + c_{22}\omega y_1 P,$$

oder

$$\bar{\eta}_1 = \omega \eta_1 + c_{12}\omega P(c_{22}\eta_1 - c_{12}\eta_2),$$
$$\bar{\eta}_2 = \omega \eta_2 + c_{22}\omega P(c_{22}\eta_1 - c_{12}\eta_2),$$

da man es stets durch Multiplikation von η_1, η_2 mit einem gemeinsamen Faktor so einrichten kann, daß die Determinante der c_{ix} gleich 1 wird.

Sollen also die Koeffizienten der Substitutionen, die η_1, η_2 bei dem Umlauf erfahren, von t unabhängig sein, so müssen c_{12}, c_{22} so gewählt werden, daß

$$c_{12} P c_{22} = \gamma_1, \quad c_{12} P c_{12} = \gamma_2,$$
$$c_{22} P c_{22} = \gamma_3, \quad c_{22} P c_{12} = \gamma_4$$

wird, wo γ_1, γ_2, γ_3, γ_4 von t unabhängige Größen sind. Daraus folgt aber, daß sich c_{12} und c_{22} nur durch einen von t unabhängigen Faktor unterscheiden dürfen, und daraus, daß die Funktion von t:

$$P = \int_L (x-\lambda) x^{-2\nu_1} (x-1)^{-2\nu_2} (x-t)^{-2\nu_3} dx$$

für jeden beliebigen geschlossenen Weg, abgesehen von einem konstanten Faktor, stets denselben Wert haben muß.

Es ist also die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß das Integral

$$\int_L (x-\lambda) x^{\varepsilon_1} (x-1)^{\varepsilon_2} (x-t)^{\varepsilon_3} dx$$

über irgend einen geschlossenen Weg der x-Ebene erstreckt, abgesehen von einem konstanten Faktor, immer denselben Wert hat, die, daß λ der Differentialgleichung

$$\frac{d\lambda}{dt} = (1+\varepsilon_1)\frac{\lambda}{t} + (1+\varepsilon_2)\frac{\lambda-1}{t-1} - (\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+2)\frac{\lambda(\lambda-1)}{t(t-1)}$$

genügt.

Wenn $\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+2=0$ ist, so ist diese Differentialgleichung linear. Ist dies nicht der Fall, so setze man:

$$\lambda = \frac{t(t-1)}{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+2}\frac{u'}{u} + t,$$

dann erhält man für u die Gaußsche Differentialgleichung

$$t(t-1)\frac{d^2u}{dt^2} + [(\alpha+\beta+\gamma)t-\gamma]\frac{du}{dt} + \alpha\beta u = 0,$$

wenn

$$\alpha = \varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+2,$$
$$\beta = 1+\varepsilon_3,$$
$$\gamma = 2+\varepsilon_1+\varepsilon_3$$

gesetzt wird.*)

*) Hieraus folgt z. B. die bekannte Tatsache, daß die Integrale

$$\int_L x^{\varepsilon_1+1}(x-1)^{\varepsilon_2}(x-t)^{\varepsilon_3} dx \quad \text{und} \quad \int_L x^{\varepsilon_1}(x-1)^{\varepsilon_2}(x-t)^{\varepsilon_3} dx$$

linearen Differentialgleichungen derselben Klasse genügen.

Z. B. für $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\frac{1}{2}$ erhält man:

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß sich die Periodizitätsmoduln des elliptischen Integrals zweiter Gattung

$$\int \frac{x-\lambda}{\sqrt{x(x-1)(x-t)}}\,dx$$

nur durch einen von t unabhängigen Faktor unterscheiden, ist die, daß

$$\lambda = 2t(t-1)\frac{u'}{u} + t,$$

wo u ein beliebiges Integral der Legendreschen Gleichung

$$t(t-1)\frac{d^2u}{dt^2} + (2t-1)\frac{du}{dt} + \frac{1}{4}u = 0$$

ist.

X.

Es soll nun noch gezeigt werden, daß durch gewisse Spezialisierung der Konstanten die Differentialgleichung (A) in die Gaußsche Differentialgleichung übergeführt werden kann.

Wenn $k_t = 0$ ist, so folgt aus der Gleichung (L″) S. 310, daß $\lambda = t$ gewählt werden kann. In der Tat werden dann beide Seiten von (L″) gleich Null, da

$$u = \int_{\infty}^{t} \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}}$$

der Legendreschen Differentialgleichung, deren linke Seite mit der linken Seite von (L″) übereinstimmt, genügt. Die Ausdrücke (P), (Q), (R) Nr. IV, S. 307, geben dann, daß für $\lambda = t$

$$[\alpha]_{\lambda=t} = \varkappa - \frac{1}{2},$$

$$[\beta]_{\lambda=t} = -\varkappa + \frac{1}{2},$$

$$[\gamma(\lambda-t)]_{\lambda=t} = \frac{1}{2}$$

ist. Da nun $\varepsilon = -\alpha - \beta - \gamma$, also der Koeffizient von (A)

$$p = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{(x-t)^2} + \frac{\frac{3}{4}}{(x-\lambda)^2} + \frac{\alpha}{x} - \frac{\alpha}{x-\lambda}$$

$$\beta \quad - \frac{\beta}{\quad} - \frac{\gamma(\lambda-t)}{\quad},$$

so ergibt sich, da, wie schon früher gezeigt, aus $k_t = 0$ $c = -\frac{1}{4}$ folgt, für $\lambda = t$:

$$p = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{\frac{1}{2} - \varkappa}{x(x-1)} - \frac{\frac{1}{4}}{(x-t)^2} + \frac{\frac{3}{4}}{(x-t)^2} - \frac{\frac{1}{2}}{(x-t)^2}.$$

Die Differentialgleichung (A) lautet also

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left[\frac{a}{x^2} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{\frac{1}{2} - \varkappa}{x(x-1)}\right] y$$

und kann durch eine einfache Transformation in die Gaußsche Differentialgleichung übergeführt werden.

Ebenso kann für $k_1 = 0$ das Integral $\lambda = 1$ gewählt werden, wobei dann eine Differentialgleichung mit den wesentlich singulären Stellen

$$0,\ t,\ \infty \quad \text{und nicht } 1,$$

für $k_0 = 0$, $\lambda = 0$ eine Differentialgleichung mit den singulären Stellen

$$1,\ t,\ \infty \quad \text{und nicht } 0$$

entsteht. Endlich ergibt sich für $k_\infty = 0$ das Integral $\lambda = \infty$ und daraus eine Differentialgleichung mit den singulären Stellen

$$0,\ 1,\ t \quad \text{und nicht } \infty.$$

Diese Gleichung stimmt mit der in VII, S. 313—314 behandelten Gleichung meines Vaters überein und kann also ebenfalls leicht, wie dort gezeigt, in eine Gaußsche Differentialgleichung übergeführt werden.

Über die Abhängigkeit der Konvergenz einer Potenzreihe von der Konvergenz ihrer reellen oder imaginären Komponente.

Von

EUGEN KÁLMÁN in Göttingen.

In den folgenden Zeilen werden wir feststellen, wie aus den Konvergenzverhältnissen der einen Komponente einer Potenzreihe auf die Konvergenz der Potenzreihe selbst geschlossen werden kann.

Daß überhaupt die Konvergenz einer Potenzreihe aus der Konvergenz der einen ihrer Komponenten folgen kann, das sieht man deutlich aus folgendem Satze:

Es sei AB ein Kurvenstück, das nicht in seinem ganzen Verlaufe auf einer durch den Nullpunkt gehenden geraden Linie liegt, und R der Abstand desjenigen Punktes des Kurvenstücks AB vom Nullpunkte, welcher diesem am nächsten liegt. Ist nun eine der Komponenten einer Potenzreihe auf dem Kurvenstück AB überall konvergent, so konvergiert auch die Potenzreihe selbst innerhalb eines Kreises um den Nullpunkt, dessen Radius mindestens R ist.

Der Beweis des Satzes ist sehr einfach. Ist nämlich z. B. die imaginäre Komponente der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + i b_n) r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi),$$

d. h. die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n (a_n \sin n\varphi + b_n \cos n\varphi) = f(r, \varphi)$$

in jedem Punkte des Kurvenstücks AB konvergent, und sind $\bar{r}, \bar{\varphi}$ die Polarkoordinaten eines beliebigen Punktes P auf dem Kurvenstücke, so ist speziell auch die Reihe

$$f(\bar{r}, \bar{\varphi}) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{r}^n (a_n \sin n\bar{\varphi} + b_n \cos n\bar{\varphi})$$

konvergent. Diese Reihe ist aber nichts anderes, als der Wert der Potenzreihe $f(r, \bar{\varphi})$ an der Stelle $r = \bar{r}$, so daß also die Potenzreihe $f(r, \bar{\varphi})$ auch an jeder Stelle konvergiert, wo $r < \bar{r}$ ist. D. h. geometrisch: Die Reihe $f(r, \varphi)$ konvergiert in jedem Punkte der Strecke $\overline{OP}$. Auf dieser Strecke ist nämlich $\varphi = \bar{\varphi}$, $r \leqq \bar{r}$. Der Punkt P kann aber, wie gesagt, auf der Kurve beliebig gewählt werden. Verbinden wir also jeden Punkt des Kurvenstückes AB durch gerade Linien mit dem Nullpunkte, so konvergiert $f(r, \varphi)$ in jedem Punkte des so erhaltenen zweidimensionalen Bereiches (der schraffierte Flächenteil in Fig. 1). Daß man tatsächlich mit einem zweidimensionalen Bereiche zu tun hat, dafür bürgt die Voraussetzung, daß AB nicht in seinem ganzen Verlauf auf einer durch den Nullpunkt gehenden geraden Linie liegt.

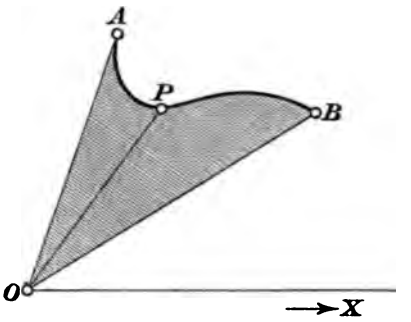


Fig. 1.

Daraus folgt aber, daß auf dem Teile des Kreisbogens mit dem Radius R um den Nullpunkt, der im schraffierten Bereich liegt, zwei Punkte C und D zu finden sind, die eine endliche Entfernung voneinander haben. Bezeichnen wir nun die Winkel der Strahlen CO und DO gegen die positive x-Achse mit α und β, so können wir also folgendes behaupten:

Für jeden φ-Wert zwischen α und β ist

$$\lim_{n=\infty} (R^n a_n \sin n\varphi + R^n b_n \cos n\varphi) = 0.$$

Das folgt offenbar aus der Konvergenz der Reihe $f(r, \varphi)$ auf dem Kreise mit dem Radius R.

Wir können jetzt von einem Satze des Herrn G. Cantor Anwendung machen, den er in Bd. 4 der Math. Annalen auf folgende Weise ausgesprochen hat:

„Ist für jeden x-Wert zwischen α und β

$$\lim_{n=\infty} (a_n \sin n\lambda + b_n \cos n\lambda) = 0,$$

so ist auch

$$\lim_{n=\infty} a_n = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{n=\infty} b_n = 0.“$$

Es ist also in unserem Falle

$$\lim_{n=\infty} R^n a_n = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{n=\infty} R^n b_n = 0.$$

Somit konvergieren die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ gewiß innerhalb des Kreises mit dem Radius R um den Nullpunkt. Innerhalb dieses Kreises konvergiert also auch die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + ib_n)z^n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n,$$

was zu beweisen war.

Es ist auch leicht zu sehen, daß der Radius des Konvergenzkreises unserer Potenzreihe, wenn nur das Kurvenstück AB kein Kreisbogen ist, oder allgemeiner keine Figur, die aus lauter Kurvenstücken mit den Gleichungen $r = \text{const.}$ oder $\varphi = \text{const.}$ zusammengesetzt ist, immer größer ist als R.

Ist $\bar{R}$ der Abstand desjenigen Punktes einer Kurve von der genannten Eigenschaft — von der also kein Teil eine der Gleichungen $r = \text{const.}$, $\varphi = \text{const.}$ hat — vom Nullpunkte, welcher von diesem am weitesten liegt, so ist leicht zu sehen, daß die Potenzreihe in jedem Kreis konvergiert, dessen Radius kleiner als $\bar{R}$ ist.

Es liegt nun die Frage nahe, ob die Konvergenz der Potenzreihe nicht schon dann bewiesen werden kann, wenn über die Komponente weniger vorausgesetzt wird, als in unserem Satze, also wenn etwa nur vorausgesetzt wird, daß $f(r, \varphi)$ in einer überalldichten Punktmenge auf dem Kurvenstücke konvergiert; oder wenn sie auf dem Kurvenstücke zwar nirgends konvergiert, aber in jedem Punkte derselben die Bedingung

$$\lim_{n=\infty} r^n(a_n \sin n\varphi + b_n \cos \varphi) = 0$$

erfüllt ist.

Wie wir gesehen, konvergiert die Potenzreihe innerhalb des Kreises mit dem Radius R um den Nullpunkt, wenn ein Kurvenstück, mag es auch noch so klein sein, existiert, auf welchem die imaginäre Komponente überall konvergiert. Ist aber nur bekannt, daß die imaginäre Komponente in überalldicht liegenden Punkten eines Kurvenstückes konvergiert, so braucht die Potenzreihe im Kreise mit dem Radius R nicht zu konvergieren. Auf diese Tatsache hat mich Herr L. Fejér aufmerksam gemacht und zwar durch das folgende Beispiel:

Die imaginäre Komponente der Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} z^{n!}$, d. h. die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} r^{n!} \sin n!\,\varphi$ konvergiert auf jedem beliebigen Kurvenstück in den Punkten, für welche $n = \frac{\mu}{\nu}\pi$ ist (μ und ν ganze Zahlen), die also auf dem Kurvenstücke überalldicht liegen.

Die Potenzreihe selbst konvergiert aber keinesfalls im Kreise mit dem Radius R, wenn dieser Radius > 1 ist, weil der Einheitskreis für die Potenzreihe eine natürliche Grenze ist.

Was nun die Voraussetzung anbelangt, daß in jedem Punkte eines Kurvenstückes wenn auch nicht die Konvergenz der imaginären Komponente, so doch die Bedingung

$$\lim_{n=\infty} r^n(a_n \sin n\varphi + b_n \cos n\varphi) = 0$$

stattfindet, so unterscheidet sich diese Voraussetzung von der, daß die Reihe $f(r, \varphi)$ in jedem Punkte des Kurvenstückes tatsächlich konvergiert, bloß formal.

Hier stehen wir nämlich einer merkwürdigen Eigenschaft der Reihe $f(r, \varphi)$ gegenüber.

Im allgemeinen folgt aus dem Verschwinden des Grenzwertes des allgemeinen Gliedes einer Reihe noch gar nicht die Konvergenz der Reihe, und zwar weder in einem einzelnen Punkte noch auf einem Kurvenstücke.

Ist aber für die Reihe $f(r, \varphi)$ in jedem Punkte eines Kurvenstückes der Grenzwert ihres allgemeinen Gliedes, d. h. von

$$r^n a_n \sin n\varphi + r^n b_n \cos n\varphi$$

gleich Null, so folgt daraus, daß die Reihe $f(r, \varphi)$ auf dem Kurvenstücke konvergiert.

Aus der Voraussetzung, daß auf dem Kurvenstück AB überall

$$\lim_{n=\infty} r^n(a_n \sin n\varphi + b_n \cos n\varphi) = 0$$

ist, folgt nämlich schon die Konvergenz der Reihe $f(r, \varphi)$ in einem Kreise, dessen Radius ϱ sich von $\bar{R}$ beliebig wenig unterscheidet, wenn er nur kleiner ist als $\bar{R}$.

Wenn wir also ϱ groß genug wählen, so liegen so viele Punkte des Kurvenstückes AB im Konvergenzkreise, wie wir wollen.

Somit konvergiert $f(r, \varphi)$ in jedem Punkte des Kurvenstückes, höchstens mit Ausnahme desjenigen, der vom Nullpunkte am weitesten liegt.

Keszthely in Ungarn.

Sur les fonctions dérivées.

Par

D. POMPEIU à Jassy.

Dans un Mémoire *Sur la continuité des fonctions de variables complexes* [inséré dans les Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 2e série, t. VII (1905)] j'ai été amené à me servir d'une fonction dérivée réelle, dépendant d'une variable réelle, bornée et s'annulant dans tout intervalle. J'ai admis, dans mon Mémoire, l'existence d'une pareille fonction que j'ai appelée fonction de M. Köpcke, car c'est M. Köpcke qui le premier (Mathematische Annalen 29, 34 et 35) en a donné un exemple.

Dans cette Note je me propose de montrer comment on peut definir simplement une fonction d'une variable réelle dont la dérivée soit bornée et s'annule dans tout intervalle.

§ 1.

Définition de la fonction $G(t)$.

Je considère la série

$$F(x) = \sum_{1}^{\infty} A_n (x - a_n)^{\frac{1}{3}} \tag{1}$$

dans laquelle tous les nombres sont réels et je suppose:

1° que la série $\sum A_n$ est convergente, les A_n étant des nombres positifs;

2° les a_n forment, dans un certain intervalle (x', x''), un ensemble dénombrable partout dense.

Il est clair que, dans ces conditions, la série (1) est uniformément convergente, dans l'intervalle (x', x'') et sa somme $F(x)$ est, dans le même intervalle, une fonction continue.

Mais $F(x)$ est, en outre, une fonction *croissante*. Cela résulte de ce que toutes les fonctions

$$A_n (x - a_n)^{\frac{1}{3}}$$

sont croissantes.

Posons, maintenant

$$t = F(x)$$

et

$$t' = F(x'), \quad t'' = F(x'').$$

A chaque point t de l'intervalle (t', t'') correspond un point x, de l'intervalle (x', x''), et un seul. On peut donc considérer x comme une fonction de t, définie dans l'intervalle (t', t''): nous appellerons $G(t)$ cette fonction inverse:

$$x = G(t).$$

§ 2.

Convergence d'une série dérivée.

Considérons la série

$$f(x) = \frac{1}{3}\sum_{1}^{\infty} \frac{A_n}{(x-a_n)^{\frac{2}{3}}} \tag{2}$$

obtenue en dérivant terme à terme la série (1). Je me propose d'étudier la convergence de cette série pour les points x de l'intervalle (x', x'') qui ne coïncident avec aucun des points a_n. Les a_n forment, d'après nos hypothèses, dans l'intervalle (x', x'') un ensemble dénombrable partout dense.

Nous ferons une hypothèse supplémentaire relative aux A_n, pour pouvoir utiliser un résultat dû à M. Borel. M. Borel a étudié, dans son livre bien connu: *Leçons sur la théorie des fonctions* (pages 62—69) la convergence de la série

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{A_n}{r_n}, \qquad r_n = |x - a_n| \tag{3}$$

les coefficients A_n étant des nombres positifs et les a_n formant dans un certain intervalle (x', x'') un ensemble dénombrable partout dense. Voici le résultat de M. Borel:

Si l'on suppose convergente la série $\sum\sqrt{A_n}$, *la série* (3) *converge pour un ensemble de points*) dont la longueur est égale à* $|x'-x''|$. Ou encore: *l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles la série* (3) *n'est pas convergente a pour longueur zéro.*

Je dis maintenant que si l'on admet la convergence de la série

$$\sum\sqrt{A_n}$$

la série (2) converge pour un ensemble de points, pris dans l'intervalle (x', x''), dont la longueur est égale à $|x'-x''|$.

*) pris dans l'intervalle $(x'\ x'')$.

n effet, soit x un point, pris dans l'intervalle (x', x''), pour lequel
ie (3) est convergente. Je vais montrer que la série (2) converge
ême point.
Décomposons la série $\sum \frac{A_n}{r_n^{\frac{2}{3}}}$

une somme de deux séries partielles

$$\sum \frac{A_h}{r_h^{\frac{2}{3}}} + \sum \frac{A_k}{r_k^{\frac{2}{3}}} = \sum \frac{A_n}{r_n^{\frac{2}{3}}},$$

la première contenant tous les termes pour lesquels

$$r_h < 1,$$

et la seconde tous les termes pour lesquels

$$r_k \geqq 1$$

La série $\sum_1^\infty \frac{A_k}{r_k^{\frac{2}{3}}}$

est convergente, car ses termes sont respectivement inférieurs à ce
série convergente $\sum A_k$, puisque, quel que soit k, on a

$$r_k^{\frac{2}{3}} \geqq 1.$$

Quant à la série $\sum_1^\infty \frac{A_h}{r_h^{\frac{2}{3}}}$

elle est aussi convergente, car ses termes sont respectivem
aux termes de la série convergente

$$\sum \frac{A_h}{r_h}.$$

En effet, en vertu de l'hypothèse faite sur les r_h, on a,

$$r_h < r_h^{\frac{2}{3}}$$

d'où l'on conclut $\frac{A_h}{r_h} > \frac{A_h}{r_h^{\frac{2}{3}}}$

...gence de la série $\sum \frac{A_h}{r_h^{\frac{2}{3}}}$.

À l'aide de notre hypothèse supplémentaire: que la série $\sum\sqrt{A_n}$ est convergente, nous avons donc démontré que la série

$$f(x) = \frac{1}{3}\sum \frac{A_n}{(x-a_n)^{\frac{2}{3}}} \tag{2}$$

converge pour un ensemble de points, pris dans (x', x'') dont la longueur est $|x'-x''|$.

§ 3.

Dérivée de la fonction $F(x)$.

Je vais démontrer maintenant qu'en tout point où la série (2) converge, $f(x)$ est égal à la dérivée de $F(x)$ en ce point.

Considérons l'expression

$$\frac{F(x+y)-F(x)}{y} = \sum_1^\infty A_n \cdot \frac{(x+y-a_n)^{\frac{1}{3}} - (x-a_n)^{\frac{1}{3}}}{y}.$$

On peut l'écrire encore

$$\frac{F(x+y)-F(x)}{y} = \sum_1^\infty \frac{A_n}{(x+y-a_n)^{\frac{2}{3}} + (x+y-a_n)^{\frac{1}{3}}(x-a_n)^{\frac{1}{3}} + (x-a_n)^{\frac{2}{3}}}, \tag{2'}$$

en vertu d'une identité élémentaire.

Je dis que la série du second membre, où la variable est y, est uniformément convergente dans l'intervalle

$$-\eta, \quad +\eta$$

η étant un nombre positif.

En effet, posons

$$\alpha_n = \left(\frac{x+y-a_n}{x-a_n}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

On aura

$$\frac{F(x+y)-F(x)}{y} = \sum_1^\infty \frac{1}{1+\alpha_n+\alpha_n^2} \cdot \frac{A_n}{(x-a_n)^{\frac{2}{3}}}.$$

Mais le trinôme $1+\alpha_n+\alpha_n^2$ ne s'annule jamais et son minimum est égal à $\frac{3}{4}$; donc la fraction

$$\frac{1}{1+\alpha_n+\alpha_n^2}$$

admet une limite supérieure égale à $\frac{4}{3}$. Par suite, quel que soit y, on aura

$$\frac{A_n}{(x+y-a_n)^{\frac{2}{3}} + (x+y-a_n)^{\frac{1}{3}}(x-a_n)^{\frac{1}{3}} + (x-a_n)^{\frac{2}{3}}} \leqq \frac{4}{3} \cdot \frac{A_n}{(x-a_n)^{\frac{2}{3}}}$$

que soit l'indice n, ce qui prouve que la série (2′) est uniformément
ergente.

Donc $F(x)$ admet $f(x)$ comme dérivée au point x où la série (2)
iverge.

Considérons maintenant un point ξ où la série (2) diverge. Je vais
démontrer que si l'on se donne un nombre positif M, aussi grand que
l'on voudra, on peut lui faire correspondre un entier m et un nombre
positif ε tels que l'on ait

$$\text{(m)} \qquad \sum_{n=1}^{n=m} \frac{A_n}{(\xi+y-a_n)^{\frac{2}{3}} + (\xi+y-a_n)^{\frac{1}{3}}(\xi-a_n)^{\frac{1}{3}} + (\xi-a_n)^{\frac{2}{3}}} \geqq M$$

dès que

$$|y| \leqq \varepsilon.$$

En effet, la série à termes positifs

$$\frac{1}{3}\sum_{1}^{\infty} \frac{A_n}{(\xi-a_n)^{\frac{2}{3}}}$$

étant divergente on peut trouver un entier m tel que

$$\frac{1}{3}\sum_{1}^{m} \frac{A_n}{(x-a_n)^{\frac{2}{3}}} > M.$$

D'autre part, la fonction de y

$$\varphi(y) = \sum_{1}^{m} \frac{A_n}{(\xi+y-a_n)^{\frac{2}{3}} + (\xi+y-a_n)^{\frac{1}{3}}(\xi-a_n)^{\frac{1}{3}} + (\xi-a_n)^{\frac{2}{3}}}$$

étant continue au point $y=0$, on peut délimiter autour de ce p
intervalle $(-\varepsilon, +\varepsilon)$ tel que pour toute valeur de y comprise
intervalle on ait

$$\varphi(y) \geqq M$$

ce qui est justement l'inégalité (m).

Cela étant, puisque les termes de la série (2′) sont tous
peut écrire

$$\frac{F(\xi+y)-F(\xi)}{y} \geqq M$$

dès que

$$0 < |y| \leqq \varepsilon.$$

Donc le rapport $\frac{F(\xi+y)-F(\xi)}{y}$

d vers zéro.

Ce résultat est capital pour notre objet: il nous prouve, en effet, que courbe (C), définie par l'équation

$$t = F(x)$$

ssède une tangente même pour les points (τ, ξ), ξ étant un point où série (2) diverge: mais cette tangente est perpendiculaire à l'axe des x. courbe (C) possède évidemment une tangente pour les points (t, x), étant un point où la série (2) converge.

Donc la courbe $t = F(x)$ possède partout une tangente. Nous avons issé de côté le cas où x est égal à l'un quelconque des points a_n; mais cas rentre, comme on le voit facilement, dans le cas des points ξ: x points (t_n, a_n) la courbe (C) admet une tangente perpendiculaire à xe des x.

Si l'on adopte les définitions posées par M. Baire dans ses *Leçons sur fonctions discontinues* (page 220) on peut dire, en résumant les résultats ce paragraphe: *la fonction $F(x)$ admet, dans l'intervalle (x', x''), la nction $f(x)$ comme dérivée; mais pour un certain ensemble de points la nction $f(x)$ prend la valeur $+\infty$.*

§ 4.

La fonction $G(t)$ et sa dérivée $g(t)$.

Considérons maintenant la fonction inverse

$$x = G(t).$$

Elle admet, d'après ce qui précède, une dérivée $x' = g(t)$ et, aux ints $t_n = F(a_n)$ et $\tau = F(\xi)$ cette dérivée s'annule.

Il importe d'insister sur l'existence des points τ, autres que les t_n. n sait, aujourd'hui, d'après les travaux de M. Baire qu'une fonction rivée est ponctuellement discontinue; en d'autres termes: elle possède, ns toute intervalle, des points de continuité. D'autre part, on sait que, ur toute fonction ponctuellement discontinue, l'ensemble des points de ntinuité est de *seconde catégorie**): il n'est pas constitué par la réunion ne infinité dénombrable d'ensembles non denses; en particulier il n'est s dénombrable.

Si l'on considère maintenant la fonction dérivée $g(t)$, on voit facile- ent que l'ensemble des points t_n est partout dense et, dans ces conditions, est aisé de montrer que $g(t)$ ne peut être continue que pour les points elle s'annule. Or, l'ensemble des points t_n est dénombrable: donc il iste des points τ, autres que les t_n pour lesquels la fonction $g(t)$ s'annule.

*) Baire, Ouvrage cité (page 78).

Et, revenant à la série

$$f(x) = \frac{1}{3}\sum_{1}^{\infty} \frac{A_n}{(x-a_n)^{\frac{2}{3}}}$$

nous pouvons affirmer qu'il existe, certainement, des points (en infinité non dénombrable) autres que les a_n pour lesquels la série diverge. Mais nous savons, grâce à l'hypothèse sur la convergence de la série

$$\sum \sqrt{A_n},$$

que la longueur de l'ensemble des points, pour lesquels la série $f(x)$ diverge, est zéro.

Remarquons enfin, pour terminer, que la fonction positive $f(x)$ admet comme limite inférieure le nombre

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{\sum A_n}{|x'-x''|^{\frac{2}{3}}}.$$

Donc la fonction dérivée $g(t)$ est bornée.

Jassy, le 2 février 1906.

Bericht über den Stand der Herausgabe von Gauß' Werken.

Siebenter Bericht.*)

Von

Felix Klein in Göttingen.

Der nachstehende Bericht knüpft an den Umstand an, daß soeben (Nov. 1906) der *Band VII der Gesamtausgabe* ausgegeben werden konnte. Der Bearbeiter, Herr Brendel, berichtet darüber folgendermaßen:

„Band VII enthält außer der Theoria motus den gesamten theoretisch-astronomischen Nachlaß; da er schon sehr viel stärker ausgefallen ist, als die früher erschienenen Bände, so konnten die noch restierenden kleineren Stücke des Nachlasses über Gegenstände der praktischen und stellaren Astronomie nicht mehr darin Platz finden; sie sollen zugleich mit einigen physikalischen Nachträgen auf Band X verschoben werden."

„Die *Theoria motus* ist bekanntlich bereits 1871 von Schering im Verlage von F. A. Perthes in einer der Gesamtausgabe entsprechenden Ausstattung herausgegeben und mit einigen kleineren Notizen aus dem Nachlaß versehen worden; die Gesellschaft der Wissenschaften hat aber immer an der Ansicht festgehalten, daß hiermit der spätern Aufnahme der Theoria motus in die Gesamtausgabe nicht vorgegriffen sein könne. Bei dem neuen Abdruck, der dementsprechend den Band VII einleitet, wurde das ganze Werk einer nochmaligen genauen Durchsicht unterworfen, wobei eine Reihe von bisher nicht bemerkten Druckfehlern und anderen Unrichtigkeiten aufgefunden und verbessert wurde. Die von Gauß gegebenen numerischen Beispiele zur Bahnbestimmung (Ceres, Pallas, Juno, Vesta) sind klassisch geworden und werden häufig in Lehrbüchern und zur Prüfung neuer Methoden herangezogen. Eine genaue Nachrechnung

*) Abgedruckt aus den Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Geschäftliche Mitteilungen, 1906, Heft 2. — Vergl. den sechsten Bericht in den Nachrichten d. K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Geschäftliche Mitteilungen, 1904, pag. 15—19. Abgedruckt in Bd. 61 der Mathematischen Annalen.

derselben erschien schon aus diesem Grunde keine überflüssige Arbeit; hierbei fanden sich nun mehrere Rechenfehler und andere Stellen, bei denen die Zahlen der Natur der Sache nach etwas unsicher waren. Es wird wertvoll für den Leser sein, diese Stellen, da wo es anging, verbessert und wo dies nicht möglich war, ohne die ganze folgende Rechnung zu ändern, wenigstens genau angegeben zu finden. Für die Einzelheiten muß ich auf meine ausführlichen Bemerkungen hinweisen, die dem Abdruck im siebenten Bande (S. 281) folgen."

„Der *zweite Abschnitt* des Bandes bringt kleinere „Zusätze zur Theoria motus und andere Nachträge zur elliptischen Bewegung". Die letzteren betreffen hauptsächlich die Zodiaken der Himmelskörper; so bezeichnet Gauß den Teil der Himmelskugel, innerhalb dessen ein Himmelskörper, von der Erde gesehen, überhaupt erscheinen kann. Verschiedenes darüber hat er bereits selbst veröffentlicht. Gauß bezeichnet in seinem späteren Alter (vgl. Bd. VII, Seite 314) diese Frage als eine nicht uninteressante mathematische Aufgabe und scheint sich darüber zu wundern, daß niemand anderes sich inzwischen damit beschäftigt hat; auch bis heute scheint dies nicht der Fall zu sein. Die abgedruckten Nachlaßnotizen enthalten einige interessante Ergänzungen der Gaußschen Veröffentlichungen."

„Der *dritte Abschnitt* handelt von der parabolischen Bewegung. Gauß beabsichtigte, als Supplement zur Theoria motus eine Theorie der parabolischen Bahnen herauszugeben; er schrieb darüber 1815 an Olbers und Bessel (vgl. Bd. VII, Seite 350). Die abgedruckten Stellen geben das, was sich im Nachlaß darüber vorgefunden hat. Speziell interessant sind einige Kunstgriffe, die er anwandte, sowie die Idee, durch Herstellung von Hilfstafeln die Bestimmung einer Bahn zu erleichtern (vgl. Bd. VII, Seite 331). Ein Aufsatz über die Entwerfung einer der Barkerschen ähnlichen Tafel fand sich vollkommen druckfertig im Nachlaß vor, ebenso die Tafel selbst, bei der Gauß nur noch die Interpolation auf das halbe Intervall auszuführen beabsichtigte."

„Sodann folgen als *vierter Abschnitt* die ersten Störungsrechnungen von Gauß; sie betreffen die Ceres und datieren von 1802 bis 1805. Gauß schließt sich zunächst an Laplace an und rechnet Koordinatenstörungen, wobei er jedoch die säkularen Störungen in solche der Elemente umwandelt; auch entwirft er Tafeln zur leichteren Berechnung der Störungen. Die Resultate der ersten Untersuchung hat Gauß selbst, ohne die Rechnung, kurz veröffentlicht (vgl. Bd. VI). Die späteren Untersuchungen von 1805 sind dann nach einer gänzlich neuen Methode ausgeführt. Auch sie betreffen Koordinatenstörungen; aber die Entwicklung der Störungsfunktion hat Gauß schon damals im Anschluß an seine Theoria interpolationis (die sich ebenfalls druckfertig im Nachlaß vorfand, und Band III, Seite 265ff.

abgedruckt ist) auf interpolatorischem Wege ausgeführt, also dieselbe Methode angewandt, die Hansen über 30 Jahre später neu auffand. Indessen war das Verfahren, das Gauß hier zunächst brauchte, noch etwas umständlich und wurde von ihm erst zur höchsten Vollkommenheit entwickelt bei Gelegenheit der Berechnung der Pallasstörungen."

„Die Veröffentlichung der Gaußschen Arbeiten über die Störungen der Pallas, welche den *fünften* und wichtigsten Abschnitt des Bandes bilden, wurden seit Jahrzehnten von den Astronomen mit Spannung erwartet, da viele Einzelheiten darüber, im speziellen seine Entdeckung des rationalen Verhältnisses der Umlaufszeiten von Pallas und Jupiter, bereits in die Öffentlichkeit gedrungen waren. Zwar sind die Aufzeichnungen über diese Entdeckung im Nachlaß äußerst spärlich; indessen geht aus ihnen doch hervor, wie Gauß die Störungsglieder mit verschwindendem Divisor behandelte. Nur konnte nicht festgestellt werden, wie Gauß zuerst im Jahre 1812 auf dies Resultat geführt wurde. Es dürfte sich kaum in aller Strenge aufrecht erhalten lassen, schon weil die Störungen höherer Ordnung nicht in Rücksicht gezogen sind. Die Ausführungen, welche ich Herrn F. Klein für den sechsten Bericht zur Verfügung gestellt hatte über die Art und Weise, wie Gauß anfangs auf die Kommensurabilität der mittleren Bewegungen beider Planeten geschlossen hat, habe ich später als nicht zutreffend erkannt, und ich muß deswegen auf die Bemerkungen im siebenten Bande selbst (Seite 607—608) verweisen."

„Gauß hat seiner Rechnung eine ganz außerordentliche Ausdehnung gegeben und die Störungsfunktion auf dem bereits erwähnten interpolatorischen Wege bis zur 18-fachen Anomalie Jupiters und bis zur 21-fachen der Pallas entwickelt. Über diese Entwicklung hat er auch Tagebuch geführt (Bd. VII, Seite 605), woraus hervorgeht, daß er zu dieser Entwicklung allein in etwas über drei Monaten circa 340 000 Ziffern gerechnet hat. In den Ausdrücken für die Störungen der Elemente hat er dann über 3000 Sinus- und ebenso viele Cosinusglieder. Die Vergleichung mit den Beobachtungen zeigte eine recht gute Übereinstimmung (bis auf wenige Bogensekunden) und führte sogar zu einer Verbesserung der Jupitermasse, welche Gauß schließlich überraschend genau gleich $\frac{1}{1050}$ fand. Von der Pariser Akademie war damals ein hoher Preis ausgesetzt auf die Berechnung der Pallasstörungen; man nahm an, daß er Gauß zufallen würde, und dieser beabsichtigte auch sich darum zu bewerben. Da die Vollendung der Gaußschen Untersuchungen sich aber immer länger hinzog, so wurde auch die Verteilung des Preises mehrfach weiter hinausgeschoben und schließlich verlief die Angelegenheit im Sande, obwohl Gauß' Rechnungen eigentlich als vollendet angesehen werden konnten.

Er wollte indessen, wie immer, so auch hier, etwas ganz Vollkommenes liefern und hatte auch Nikolai veranlaßt, die Saturnstörungen zu berechnen, sowie selbst die Berechnung der Marsstörungen übernommen; nur diese letzteren sind nicht ganz fertig geworden; für die Jupiterstörungen hat Gauß sogar fertige Tafeln hergestellt. Er fand nicht mehr die Zeit, die Arbeit zum Abschluß zu bringen und druckfertig zu machen; er sagt 1834 in einem Briefe an Gerling (Bd. VII, Seite 432): „Es ist mir ein schmerzlicher Gedanke, daß meine vor mehr als 20 Jahren gemachte Arbeit über die Pallasstörungen ohne Fortsetzung, Entwicklung und Bekanntmachung bisher hat bleiben müssen, auch wahrscheinlich, wie vieles Andere, einst mit mir untergehen wird. Sie glauben nicht, wie schwer es mir durch so vielfache Zersplitterung der Zeit sowie unter dem Druck so mancher Verhältnisse wird, eine wissenschaftliche Arbeit durchzuführen." Übrigens fand sich im Nachlaß ein Anfang zur Drucklegung seiner Untersuchungen, nämlich ein begonnenes Manuskript (abgedruckt Bd. VII, Seite 439ff.): „Exposition d'une nouvelle méthode de calculer les perturbations planétaires, avec l'application au calcul numérique des perturbations du mouvement de Pallas". Dasselbe enthält die Ableitung der Differentialgleichungen für die Variationen der Elemente, welche bald nachher auch von Lagrange veröffentlicht wurden; auch ein interessantes Kapitel über die Entwicklung periodischer Funktionen in Reihen findet sich darin."

„Der *letzte Abschnitt* des Bandes endlich bringt eine Theorie des Mondes, die wegen der Behandlung der Differentialgleichungen der Mondbewegung Interesse verdient. Die Methode ist ähnlich der Laplaceschen, die dieser veröffentlichte, während Gauß vermutlich noch mit seinen Untersuchungen beschäftigt war; er hat sie ziemlich plötzlich abgebrochen. Die Resultate erhalten dieselbe Form wie später bei Plana."

„Da die Bände VII und IX der Gesamtausgabe bereits 1900, bezw. 1903, erschienen sind, soll nunmehr an die Bearbeitung des letzten Bandes (X) unmittelbar herangegangen werden; er wird die noch fehlenden Nachlaßstücke über Gegenstände der praktischen und stellaren Astronomie, Chronologie, theoretische Physik und Optik bringen; sodann Biographisches, Mitteilungen allgemeinen Interesses, insbesondere aus dem Briefwechsel, einen Bericht über die Herausgabe der Gaußschen Werke, einen solchen über das Gauß-Archiv und ein ausführliches Generalregister."

Die Fokaltheorie der linearen Strahlenkongruenzen.

Von

Stanislaus Jolles in Berlin.

1. Die Fokaltheorie der linearen Strahlenkongruenzen fehlt bisher. Man weiß nur, daß eine elliptische lineare Kongruenz in zwei reellen Geraden — ihren Fokalachsen — zirkulare Ebeneninvolutionen hervorruft, hingegen eine hyperbolische lineare Kongruenz keine reellen Fokalachsen besitzt.*) Ich wurde anfangs durch diese merkwürdige Eigenschaft der sonst so leicht zugänglichen hyperbolischen linearen Kongruenz abgeschreckt, nach allgemeinen Fokaleigenschaften der linearen Kongruenzen zu suchen. Später jedoch führten mich Fragen über die in einer linearen Kongruenz enthaltenen rotatorischen Regelscharen zu einigen allgemein gültigen Fokaleigenschaften und diese endlich zur Fokaltheorie der linearen Kongruenzen.

Eng verknüpft mit der Fokaltheorie der linearen Kongruenzen erweist sich die Theorie des Zylindroides. Synthetisch sind Grundeigenschaften dieser Fläche schon von Herrn Schoenflies**) und Herrn Sturm***) abgeleitet worden, doch erzeugt dieser die Regelschar der Fläche durch zwei ein-zweideutig aufeinander bezogene Punktreihen, während jener von kinematischen Überlegungen ausgeht. Da die Untersuchungen in dieser Arbeit rein synthetisch geführt werden, so war zunächst eine rein synthetische Theorie des Zylindroides aufzustellen. — Ein Zylindroid ist bekanntlich das Hauptachsenzylindroid von ∞^1 linearen Kongruenzen. Ihre drei gemeinschaftlichen Symmetrieachsen sind natürlich Symmetrieachsen ihres Hauptachsenzylindroides und des jene ∞^1 linearen Kongruenzen umfassenden quadratischen Komplexes. Mit Hilfe dieser

*) Reye, Die Geometrie der Lage. 2. Abteilung. 3. Auflage. Leipzig 1892, S. 259, N. 15.

**) Schoenflies, Geometrie der Bewegung in synthetischer Darstellung. Leipzig 1886, S. 157, N. 10.

***) Sturm, Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie in synthetischer Behandlung. 1. Teil. Leipzig 1892, S. 150.

Symmetrieachsen lassen sich manche Sätze aus der Theorie dieser Gebilde recht einfach und anschaulich beweisen.

Eine Ebene, welcher durch eine lineare Kongruenz C_1^1 eine zu ihr normale Ebene zugeordnet ist, heiße eine Mittelebene der Kongruenz. Die Mittelebenen von C_1^1 umhüllen ein gleichseitiges Paraboloid C^2, das Fokalparaboloid der linearen Kongruenz. Seine Erzeugenden sind durch C_1^1 paarweise einander zugeordnet. Werden die beiden Regelscharen von C^2 die Fokalregelscharen und die sie bzw. paarenden Involutionen die Fokalinvolutionen von C_1^1 genannt, so ist C_1^1 hyperbolisch, wenn beide Fokalinvolutionen elliptisch sind, elliptisch, wenn die eine Fokalinvolution hyperbolisch, die andere elliptisch ist. Die Doppelstrahlen der auf C^2 gelegenen Fokalinvolutionen sind die Fokalachsen von C_1^1. Eine hyperbolische lineare Kongruenz hat also zwei Paare konjugiert imaginärer Fokalachsen, eine elliptische ein Paar reeller und ein Paar konjugiert imaginärer. Bei einer parabolischen linearen Kongruenz ist die eine Fokalinvolution parabolisch, die andere elliptisch. Letztere wird gebildet durch die sich rechtwinklig kreuzenden Strahlen der betreffenden Fokalregelschar. Je zwei einander zugeordnete Geraden e^1, e^2 einer Fokalinvolution sind Leitstrahlen einer in C_1^1 enthaltenen orthogonalen Regelschar II. Ordnung, welche zu C^2 und C_1^1 in sehr merkwürdigen Beziehungen steht. Zu jeder Fokalregelschar gehört ein Büschel solcher orthogonalen Regelscharen. Die in vier Geraden zerfallende Basiskurve jedes solchen Büschels enthält ein Paar Fokalachsen von C_1^1, sie sind zugleich die Leitgeraden einer für die Theorie von C_1^1 besonders wichtigen linearen Kongruenz, welche eine Fokalkongruenz von C_1^1 genannt wird. Zu einer linearen Kongruenz gehören hiernach zwei Fokalkongruenzen. — Eine gleichseitige parabolische Regelschar, deren Strahlen derart involutorisch gepaart werden, daß ihrem unendlich fernen Strahle der ihn rechtwinklig kreuzende Scheitelstrahl zugeordnet wird, ist stets eine Fokalregelschar einer gewissen linearen Kongruenz. Da nun eine elliptische Fokalinvolution sowohl eine hyperbolische als auch eine elliptische lineare Kongruenz bestimmen kann, so ist es von Wichtigkeit, die Kriterien für das eine und das andere zu ermitteln, wobei sich wieder eine Fülle von interessanten Beziehungen ergeben. *Überhaupt scheinen die Fokalinvolutionen einer linearen Kongruenz für sie von derselben Wichtigkeit zu sein, wie die Fokalinvolutionen für das polare Feld und die Fokalfelder für den polaren Raum.*

Mit der Fokaltheorie der linearen Kongruenzen eng verknüpft ist die Frage nach den rotatorischen polaren Räumen Γ_e^2, die eine lineare Kongruenz C_1^1 derart in sich selbst überführen, daß die durch C_1^1 einander zugeordneten Punkte und Ebenen in Γ_e^2 konjugiert sind; insbesondere also

die Frage nach den reellen in C_1^1 enthaltenen rotatorischen Regelscharen. Bisher hat man solche polaren Räume wohl für die hyperbolische lineare Kongruenz bestimmt, hingegen die betreffenden Untersuchungen für die elliptische lineare Kongruenz ganz unterlassen, und gerade für diese bieten sie besonders Bemerkenswertes. Die rotatorischen polaren Räume Γ_r^2 haben in diesem Falle sowohl reelle wie auch imaginäre Inzidenzflächen, während sie in jenem nur reelle Inzidenzflächen haben.

Lineare Strahlenkongruenzen mit demselben Fokalparaboloide C^2 sollen konfokal heißen. Konfokale lineare Strahlenkongruenzen sind für C^2 autopolar und haben dasselbe Hauptachsenzylindroid C^3. Diese Fläche ist der Ort der Mittelpunkte aller C^2 umschriebenen Kegel des Hachette und ebenfalls autopolar für C^2. Die zwischen C^2 und C^3 bestehenden Beziehungen gestatten einerseits bekannte Sätze einfacher und schärfer zu beweisen, andererseits neue Sätze abzuleiten. Zu diesen gehört der Satz, daß die Scheitelstrahlen konfokaler hyperbolischer Paraboloide Regelstrahlen eines Zylindroides sind; zu jenen, daß die zueinander polaren Fokalachsen eines gleichseitigen Paraboloids die Regelschar eines Zylindroides bilden.*) Die Theorie des Fokalparaboloides und Hauptachsenzylindroides konfokaler linearer Kongruenzen führt, beiläufig bemerkt, recht anschaulich zu den synthetischen Bedingungen, unter denen zueinander normale Tangentialebenen eines Kegels II. Ordnung sich in den Strahlen eines Kegels II. Ordnung oder zweier Strahlenbüschel I. Ordnung schneiden. — Die ∞^1 konfokalen linearen Kongruenzen mit demselben Fokalparaboloide sollen eine Kette konfokaler linearer Kongruenzen heißen. Eine solche Kette läßt sich auf jedes Gebilde I. Stufe projektiv beziehen, insbesondere bilden die einem beliebigen Raumpunkte durch die Kongruenzen einer Kette zugeordneten Punkte eine zur Kette projektive Parabel. — Erheblich einfacher als im allgemeinen Falle ergeben sich endlich jene oben erwähnten orthogonalen Regelscharen II. Ordnung und rotatorischen polaren Räume Γ_r^3 bei den rotatorischen linearen Kongruenzen.

Wie schon hervorgehoben wurde, ist die Beweismethode durchgängig rein synthetisch. Ihr stellten sich sehr häufig Schwierigkeiten entgegen, wollte man nicht in den leider noch immer so häufigen Fehler verfallen, für reelle Gebilde Bewiesenes ohne weiteres auf imaginäre zu übertragen. Jedes Gebilde, dessen imaginärer Charakter nicht ausdrücklich hervor-

*) Schröter, Über ein einfaches Hyperboloid von besonderer Art. Journal für die reine und angewandte Mathematik Bd. 85 (1877), S. 39, N. 7 b.

Schröter spricht weder diesen noch die ihm in 39, 40 und 41 außerdem zugeschriebenen Sätze über das Zylindroid aus, da er nicht erkennt, daß die von ihm gefundenen Geraden s, s_1 Regelstrahlen eines Zylindroides sind. Doch ergeben sie sich ohne weiteres aus seinen Untersuchungen, sobald letzteres nachgewiesen wurde.

gehoben oder unmittelbar zu erkennen ist, ist also als reell zu betrachten.

Fördernde Anregung zu einigen Untersuchungen in dieser Arbeit verdanke ich der soeben angeführten Abhandlung Schröters und dem ersten Teile der Liniengeometrie*) des Herrn Sturm. Ich fühle mich verpflichtet, dies außer durch die betreffenden Literaturangaben hier noch besonders hervorzuheben.

Das Zylindroid.

2. Alle in einer linearen Kongruenz C_1^1 sich schneidenden linearen Komplexe bilden bekanntlich einen Büschel linearer Komplexe $[C_1^1]$. Durch die Komplexe dieses Büschels sind im allgemeinen einer unendlich fernen Geraden r_∞ die Strahlen einer zum Büschel projektiven parabolischen Regelschar II. Ordnung $\mathfrak{R}^2$ zugeordnet. (Für eine hyperbolische lineare Kongruenz, deren eine Leitgerade unendlich fern liegt, zerfällt $\mathfrak{R}^2$ stets in zwei Strahlenbüschel I. Ordnung. Dieser Ausnahmefall wird ausgeschlossen.) — Die Strahlen von $\mathfrak{R}^2$ sind Durchmesser der ihnen entsprechenden Komplexe. Werden von einem beliebigen Punkte auf diese Durchmesser senkrechte Ebenen gefällt, so bilden sie einen zur Regelschar $\mathfrak{R}^2$ und zu dem Komplexbüschel $[C_1^1]$ projektiven Ebenenbüschel I. Ordnung. Die durch die Komplexe von $[C_1^1]$ der Achse a dieses Ebenenbüschels zugeordneten Geraden sind wiederum Strahlen einer zum Komplexbüschel $[C_1^1]$ und folglich auch zum Ebenenbüschel $[a]$ projektiven Regelschar II. Ordnung $\mathfrak{R}_1^2$, zu der a selbst gehört. Sie schneiden die ihnen entsprechenden Ebenen des Büschels $[a]$ je in dem Nullpunkte bezüglich desjenigen Komplexes, durch den sie selbst a zugeordnet werden. Diese Nullpunkte bilden also eine zu $\mathfrak{R}_1^2$ perspektive und somit zu $\mathfrak{R}^2$ projektive Kurve II. Ordnung α^2. — Jede Ebene des Büschels $[a]$ steht auf den Durchmessern des ihr entsprechenden Komplexes senkrecht und dieser weist ihr einen Nullpunkt zu. Der durch diesen Nullpunkt gehende Durchmesser des betreffenden Komplexes ist also eine Hauptachse. Da die Hauptachsen der Komplexe des Büschels $[C_1^1]$ den Kegelschnitt α^2 und den unendlich fernen Strahl c_∞ der Trägerkongruenz C_1^1 des Komplexbüschels in projektiven Punktreihen schneiden, so bilden sie, solange die Ebene α von α^2 nicht durch c_∞ geht — und dies werde nunmehr vorausgesetzt — eine Regelschar III. Ordnung $\mathfrak{C}^3$ mit der einfachen Leitgeraden c_∞. Der Träger von $\mathfrak{C}^3$ ist eine Regelfläche III. Grades C^3, das sogenannte Zylindroid. Es ist zunächst als der Ort der Hauptachsen eines Büschels

*) Der lineare Komplex oder das Strahlengewinde und der tetraedale Komplex. Leipzig 1892.

earer Komplexe definiert. Die Doppelpunktsgerade c_d des Zylindroids der zu den Ebenen des Büschels $[c_\infty]$ senkrechte, also zu a parallele rahl der Trägerkongruenz C_1^1. Jede durch c_d gehende Ebene enthält glich einen Regelstrahl von $\mathfrak{C}^3$. Zur Regelschar $\mathfrak{C}^3$ gehören beim perbolischen Komplexbüschel die Leitgeraden seiner Trägerkongruenz. — ır zur Doppelpunktsgeraden c_d parallele Strahl a schneidet die Regelıar $\mathfrak{C}^3$ in dem unendlich fernen Punkte von c_d und in einem im Endhen gelegenen Punkt A. Zu der Ebene Ac_d ist ein Regelstrahl von $\mathfrak{C}^3$ rmal. Er schneidet c_d in einem Punkte, durch welchen noch derjenige gelstrahl s von $\mathfrak{C}^3$ geht, der in der Ebene α des zu $\mathfrak{C}^3$ perspektiven gelschnittes α^2 liegt. α ist im allgemeinen durch A und s bestimmt. i nun ξ^2 ein beliebiger zur Regelschar $\mathfrak{C}^3$ perspektiver Kegelschnitt, der in seiner Ebene gelegene und x' der mit x inzidente Regelstrahl n $\mathfrak{C}^3$, so folgt demnach: α^2 fällt mit ξ^2 zusammen, sobald der zu c_d rallele Strahl a durch den Schnittpunkt von ξ^2 mit demjenigen Regelahle von $\mathfrak{C}^3$ geht, der x' rechtwinklig kreuzt. Der Kegelschnitt α^2 kann mit als ein ganz beliebiger zur Regelschar $\mathfrak{C}^3$ perspektiver Kegelschnitt gesehen werden. — Die Ebenenbüschel $[a]$ und $[c_d]$ sind perspektiv zum gelschnitt α^2, also projektiv zueinander und erzeugen, da ihre Achsen rallel laufen und entsprechende Ebenen aufeinander senkrecht stehen, ıen zu α^2 perspektiven Rotationszylinder. Aus den vorstehenden Beıchtungen ergeben sich nunmehr die folgenden bekannten Sätze:

Auf einem Zylindroide C^3 gelegene Kegelschnitte sind Ellipsen, seine beiden mit seiner einfachen Leitgeraden c_∞ inzidenten doppelt berührenden Ebenen (Kuspidalebenen) γ', γ'' sind also reell. Die auf C^3 gelegenen Ellipsen projizieren sich auf γ', γ'' orthogonal als Kreise, und jeder durch die Doppelpunktsgerade c_d von C^3 gehende Rotationszylinder hat mit C^3 eine Ellipse gemein. Werden von einem im Endlichen gelegenen Punkte A, der nicht der Doppelpunktsgeraden c_d des Zylindroides C^3 angehört, auf die Regelstrahlen der Fläche Normalen gefällt, so bilden ihre Fußpunkte eine Ellipse α^2, sie selbst also einen Strahlenkegel II. Ordnung. Dieser Kegel zerfällt, wenn A auf C^3 liegt, in zwei Strahlenbüschel I. Ordnung. Die Fußpunkte der Normalen, welche aus den Punkten einer Parallelen zur Doppelpunktsgeraden c_d von C^3 auf seine Regelstrahlen gefällt werden, liegen auf der nämlichen Ellipse. — Die beiden parallelen Kuspidalebenen γ', γ'' berühren die auf der Fläche gelegenen Ellipsen je in ihren Hauptscheitelpunkten. Die Nebenachsen dieser Ellipsen liegen in der Symmetrieebene γ beider Kuspidalebenen und ihre Exzentrizität ist stets gleich dem halben Abstande dieser Ebenen. Sich schneidende Regelstrahlen eines Zylin-

droides C^3 treffen eine auf ihm gelegene Ellipse α^2 je in den Punktepaaren einer hyperbolischen Involution, deren Zentrum der unendlich ferne Punkt der Nebenachse von α^2 ist. Zu dieser Nebenachse ist der in der Ebene von α^2 gelegene Regelstrahl parallel.

3. Je zwei zueinander senkrechte durch die Doppelpunktsgerade c_d eines Zylindroides C^3 gehende Ebenen projizieren zwei sich rechtwinklig kreuzende Regelstrahlen der Fläche, somit werden die sich rechtwinklig kreuzenden Regelstrahlen von C^3 aus c_d durch Ebenenpaare einer zirkularen Ebeneninvolution projiziert, und diese schneiden folglich eine auf C^3 gelegene Ellipse α^2 in den Punktepaaren einer Involution. Durch die zirkulare Ebeneninvolution mit der Achse c_d werden aber nicht nur die Punkte von α^2, sondern auch die Strahlen des Rotationszylinders involutorisch gepaart, der α^2 nach **2.** aus dem unendlich fernen Punkte von c_d projiziert, und da zugeordnete Strahlen aus c_d durch orthogonale Ebenen projiziert werden, so ist die Involutionsachse für die involutorische Paarung der Zylinderstrahlen die Rotationsachse des Zylinders, das Involutionszentrum für die involutorische Paarung der Punkte von α^2 durch sich rechtwinklig kreuzende Regelstrahlen von C^3 also der Mittelpunkt dieser Ellipse. Ein Punktepaar der Involution auf α^2 bilden die Hauptscheitelpunkte, in ihnen berührt α^2 nach **2.** die Berührungsstrahlen der Kuspidalebenen γ', γ'', d. h. die Kuspidalstrahlen c', c'' von C^3. Die Kuspidalstrahlen kreuzen sich hiernach rechtwinklig, und die sie aus der Doppelpunktsgeraden c_d projizierenden Ebenen sind zueinander orthogonal. Nun sind die beiden c', c'' aus c_d projizierenden Ebenen bekanntlich die Doppelebenen der Ebeneninvolution, deren Ebenenpaare die inzidenten Regelstrahlen der Fläche projizieren, folglich gilt:

Sich rechtwinklig kreuzende Regelstrahlen eines Zylindroides schneiden eine Ellipse der Fläche in den Punktepaaren einer Involution. Das zugehörige Involutionszentrum ist der Mittelpunkt des Kegelschnittes.

Ferner ergibt sich mit Rücksicht auf **2.** der bekannte Satz:

Sich schneidende Regelstrahlen von C^3 werden aus der Doppelpunktsgeraden c_d durch die Ebenenpaare einer symmetrischen Ebeneninvolution projiziert, deren Doppelebenen die Kuspidalstrahlen c', c'' von C^3 enthalten. Diese Doppelebenen sind Symmetrieebenen von C^3.

4. Der unendlich ferne Punkt der Nebenachse einer Ellipse α^2 des Zylindroides C^3 ist nach **2.** das Involutionszentrum für diejenige Punktinvolution auf α^2, in deren Punktepaaren sich schneidende Regelstrahlen von C^3 den Kegelschnitt treffen. Der Mittelpunkt von α^2 hingegen ist nach **3.** das Involutionszentrum für diejenige Punktinvolution auf α^2, deren Punktepaare auf zueinander rechtwinkligen Strahlen von C^3 liegen. Beide

Punktinvolutionen haben das aus den Nebenscheitelpunkten von α^2 bestehende Punktepaar gemein, demnach erweisen sich die durch diese Punkte gehenden Regelstrahlen c_1, c_2 von C^3 als die einzigen sich rechtwinklig schneidenden Strahlen dieser Fläche. Sie liegen nach **2.** in der Symmetrieebene γ der beiden Kuspidalebenen γ', γ'' von C^3. — Die sich rechtwinklig schneidenden Strahlen c_1, c_2 sind bzw. die Hauptachsen zweier füreinander nullinvarianten Komplexe des Komplexbüschels $[C_1^1]$, folglich sind die Nullpunkte der Ebene $c_d c_1$ bezüglich dieser Komplexe — d. h. der Punkt $c_d\gamma$ und der unendlich ferne Punkt von c_d — durch die Trägerkongruenz C_1^1 des Büschels einander zugeordnet. c_d ist aber nach **2.** der Hauptstrahl von C_1^1, somit fällt γ mit der Fluchtebene von C_1^1 zusammen.

Der Punkt $c_d\gamma$ hat in bezug auf die beiden Komplexe des Büschels $[C_1^1]$, deren Hauptachsen c_1, c_2 sind, bzw. die Nullebenen $c_d c_2$, $c_d c_1$. Diese Ebenen sind sonach durch seine Trägerkongruenz C_1^1 einander zugeordnet und schneiden folglich die unendlich ferne Ebene bzw. in den c_1, c_2 durch C_1^1 bzw. zugeordneten Strahlen c_2^∞, c_1^∞. Bei einer hyperbolischen Trägerkongruenz C_1^1 ist der Punkt $c_d\gamma$ zugleich der Mittelpunkt des kürzesten Abstandes d ihrer beiden Leitgeraden u, v, ferner hälften bei ihr die normalen einander zugeordneten Ebenen $c_d c_1$, $c_d c_2$ die Winkel der sich selbst zugeordneten Ebenen $c_d u$, $c_d v$. Somit ergeben sich bei einer hyperbolischen linearen Strahlenkongruenz die Strahlen c_1, c_2 als die Hälftgeraden der Winkel, welche die durch die Mitte von d gehenden Parallelen zu u, v miteinander bilden.

5. Je zwei sich rechtwinklig kreuzende Regelstrahlen von C^3 schneiden eine auf der Fläche gelegene Ellipse α^2 nach **3.** in den Endpunkten je eines Durchmessers dieses Kegelschnittes. Da nach **2.** die Nebenachse von α^2 in der Symmetrieebene γ der Kuspidalebenen des Zylindroides liegt, so hälftet γ den Abstand je zweier sich rechtwinklig kreuzenden Regelstrahlen. — Von zwei sich schneidenden Regelstrahlen u_1, u_2 von C^3 kreuzt u_1 einen Regelstrahl v_2 und u_2 einen Regelstrahl v_1 rechtwinklig; v_1, v_2 schneiden sich, und die Ebenen $u_1 u_2$, $v_1 v_2$ liegen symmetrisch zu γ. — Wird unter dem Winkel φ_w zweier sich schneidenden Regelstrahlen w_1, w_2 von C^3 einer der beiden Winkel verstanden, den die durch den Doppelstrahl c_d und den Kuspidalstrahl c' gehende Ebene $c_d c'$ hälftet, und sind u_1, u_2 und v_1, v_2 zwei Paar sich schneidender Regelstrahlen, deren Ebenen symmetrisch zu γ liegen, so ist:

$$\varphi_u + \varphi_v = \pi.$$

Eine Ellipse α^2 projiziert sich nach **2.** auf γ orthogonal als ein Kreis, dessen Mittelpunkt mit dem von α^2 zusammenfällt. Geht die Ebene von α^2 — was nunmehr vorausgesetzt werden soll — durch einen der beiden sich rechtwinklig schneidenden Regelstrahlen von C^3, und schließt sie mit

γ einen Winkel von 45^0 ein, so ist der Halbmesser jenes Kreises gleich dem Abstande der Kuspidalstrahlen des Zylindroides von der Ebene γ. — Den Abständen aller Punkte des Raumes von γ möge ein positiver oder negativer Wert zuerteilt werden, je nachdem sie mit dem Kuspidalstrahle c' von C^3 auf derselben Seite von γ liegen oder nicht. Ist dann $a_{c'}$ der Abstand des Kuspidalstrahles c' und a_u der zweier sich schneidenden Regelstrahlen u_1, u_2 von γ, so folgt, da sich nunmehr leicht in γ ein gleichschenkliges Dreieck nachweisen läßt, dessen Winkel an der Spitze gleich $2\varphi_u$, dessen von ihr ausgehende Höhe gleich a_u und dessen gleiche Seiten gleich $a_{c'}$ sind:

$$a_{c'} \cos \varphi_u = a_u.$$

Der Winkel φ_u zweier sich schneidenden Regelstrahlen u_1, u_2, deren Ebene bzw. einen positiven oder negativen Abstand von γ hat, ist $< $ bzw. $> \frac{\pi}{2}$. Im folgenden wird unter dem Winkel zweier sich schneidenden Regelstrahlen eines Zylindroides C^3 stets einer der beiden Winkel verstanden, die von der Ebene $c_d c'$ gehälftet werden.

6. Schneidet der zur Doppelpunktsgeraden c_d eines Zylindroides C^3 parallele Strahl a einen Regelstrahl s von C^3 in einem Punkte A, so geht die Ebene des durch ihn bestimmten Kegelschnittes α^2 der Fläche nach **2.** durch A und den Strahl s' von C^3, der den s rechtwinklig kreuzenden Regelstrahl schneidet. Die Ebene von α^2 geht durch s selbst, wenn s einer der beiden sich rechtwinklig schneidenden Regelstrahlen c_1, c_2 von C^3 ist. c_1 und c_2 fallen hierbei bzw. mit der Nebenachse von α^2 zusammen und ergeben sich somit als Symmetrieachsen von C^3. Eine dritte Symmetrieachse von C^3 ist bekanntlich seine Doppelpunktsgerade c_d. Diese möge als Hauptsymmetrieachse, jene als Nebensymmetrieachsen des Zylindroides bezeichnet werden. Während die Hauptsymmetrieachse des Zylindroides längst bekannt ist, hat die Nebensymmetrieachsen wohl zuerst Herr Reye bemerkt.

Alle Strahlen einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1, die einen Strahl x ihres Hauptachsenzylindroides C^3 schneiden, bilden eine gleichseitige parabolische Regelschar. Der zu ihr gehörige Scheitelstrahl ist die Hauptsymmetrieachse c_d von C^3, der zu ihren Strahlen normale Scheitelstrahl der Strahl x selbst und ihre Hauptachse ist die Normale im Punkte xc_d auf der Ebene xc_d. Fällt x bzw. mit einer der beiden Nebensymmetrieachsen c_1, c_2 von C^3 zusammen, so ist hiernach c_2 bzw. c_1 die Hauptachse der gleichseitigen parabolischen Regelschar $\mathfrak{P}_1^2$ bzw. $\mathfrak{P}_2^2$. Durch Spiegelung an c_2 gehen daher die Regelscharen $\mathfrak{P}_2^2$ und $\mathfrak{P}_1^2$ in sich selbst über. Die in C_1^1 enthaltenen Regelscharen $\mathfrak{P}_1^2$, $\mathfrak{P}_2^2$ bestimmen nun C_1^1 eindeutig, folglich geht auch diese lineare Kongruenz durch Spiegelung an c_2 in sich

selbst über, oder c_2 ist eine Symmetrieachse von C_1^1. Das gleiche gilt von c_1. Bekanntlich ist auch die Hauptsymmetrieachse c_d von C^3 eine Symmetrieachse von C_1^1. Sie heiße mit Rücksicht hierauf die Hauptsymmetrieachse der linearen Kongruenz und ebenso jede der Nebensymmetrieachsen c_1, c_2 des Zylindroides eine Nebensymmetrieachse der Kongruenz. Beim Hauptachsenzylindroid einer hyperbolischen Strahlenkongruenz C_1^1 werden die mit den Leitgeraden von C_1^1 zusammenfallenden Regelstrahlen von C^3 an jeder der beiden Nebensymmetrieachsen ineinander gespiegelt.

7. Eine Nebensymmetrieachse c_x von C_1^1 ist ein Scheitelstrahl der gleichseitigen parabolischen Regelschar $\mathfrak{P}_x^3$, die von allen mit ihr inzidenten Kongruenzstrahlen gebildet wird. Ist nun C_1^1 hyperbolisch, so ist die durch C_1^1 in der Leitschar von $\mathfrak{P}_x^3$ hervorgerufene Involution ebenfalls hyperbolisch und ihre Doppelstrahlen sind die Leitgeraden u, v von C_1^1. Die Leitgeraden u, v gehen durch Spiegelung von C_1^1 an c_x ineinander über, c_x ist also die Rotationsachse einer in C_1^1 enthaltenen rotatorischen Regelschar. In bezug auf diese Regelschar sind die durch C_1^1 einander zugeordneten Punkte und Ebenen einander konjugiert und die Strahlen von C_1^1 paarweise reziproke Polaren. Insbesondere sind polar zueinander je zwei sich rechtwinklig kreuzende Regelstrahlen von $\mathfrak{P}_x^3$. Diese parabolische Regelschar ist somit für jene rotatorische autopolar.

Ist C_1^1 elliptisch, so ist die durch C_1^1 in der Leitschar von $\mathfrak{P}_x^3$ hervorgerufene Involution ebenfalls elliptisch, und ihre Potenzstrahlen h, h' gehen durch Spiegelung an c_x ineinander über. Durch c_x als Rotationsachse und h, h' als reziproke Polaren ist ein rotatorischer polarer Raum Γ_x^3 mit imaginärer Inzidenzfläche bestimmt. Seine Rotationsachse c_x und ihre Polare sowie h und h' sind durch C_1^1 einander zugeordnet, ferner sind zwei sich rechtwinklig kreuzende Strahlen der in C_1^1 enthaltenen parabolischen Regelschar $\mathfrak{P}_x^2$ in Γ_x^3 reziprok polar. Durch C_1^1 wird hiernach Γ_x^3 in sich selbst übergeführt und umgekehrt sind die Strahlen von C_1^1 also paarweise in Γ_x^3 zueinander polar. — In den Strahlen von $\mathfrak{P}_x^2$ rufen Γ_x^3 und C_1^1 identische Punkt- und Ebeneninvolutionen hervor. Sind nun α, α' ein Paar sich in einem Strahle z von $\mathfrak{P}_x^2$ schneidende durch C_1^1 einander zugeordnete und somit auch in Γ_x^3 konjugierte Ebenen, so schneiden sie den z rechtwinklig kreuzenden Regelstrahl z_r von $\mathfrak{P}_x^3$ wechselweise in ihren Polen A, A', und diese Punkte sind durch C_1^1 einander zugeordnet. Einem mit A, α' inzidenten Strahle g' ist durch C_1^1 ein mit A', α inzidenter Strahl g zugeordnet. g, g' treffen den Strahl z bzw. in den durch C_1^1 einander zugeordneten und in Γ_x^3 konjugierten Punkten G, G', deren Polarebenen γ, γ' durch z_r und bzw. G', G gehen und folglich g' bzw. g enthalten. In g' schneiden sich somit die Polarebenen α', γ der mit g inzidenten

Punkte A', G, und die durch C_1^1 einander zugeordneten Geraden g, g' sind also in Γ_x^2 zueinander polar. Die Strahlen von C_1^1 treffen nun α, α' in Punkten, die durch C_1^1 einander zugeordnet sind. Ein mit g inzidenter Strahl x von C_1^1 ist demnach inzident mit der g durch C_1^1 zugeordneten Geraden g', und da die Geraden g, g' in Γ_x^2 polar zueinander sind, so sind die Treffpunkte von x mit α, α' durch C_1^1 einander zugeordnet und in Γ_x^2 konjugiert. Was von α, α' gilt, gilt für je zwei andere durch C_1^1 einander zugeordnete Ebenen des Kongruenzstrahles z. Durch C_1^1 einander zugeordnete Punkte sind folglich in Γ_x^2 konjugiert und ebenso auch je zwei durch C_1^1 einander zugeordnete Ebenen. — Jede der beiden Nebensymmetrieachsen c_x einer linearen Kongruenz C_1^1 ist hiernach die Rotationsachse eines rotatorischen polaren Raumes Γ_x^3, der C_1^1 in sich selbst derart überführt, daß durch C_1^1 einander zugeordnete Punkte und Ebenen in Γ_x^2 konjugiert sind. Diese rotatorischen polaren Räume haben bei einer hyperbolischen linearen Kongruenz reelle, bei einer elliptischen imaginäre Inzidenzflächen.

8. Zwei Zylindroide C^3, D^3, welche eine Nebensymmetrieachse und einen mit keiner Nebensymmetrieachse zusammenfallenden Regelstrahl u_1 gemein haben, haben nach 6. auch das Spiegelbild v_1 von u_1 an jener Symmetrieachse gemein. C^3, D^3 haben ferner dieselbe Hauptsymmetrieachse und folglich auch dieselbe zweite Nebensymmetrieachse. Die sich schneidenden Regelstrahlen zweier Zylindroide mit der nämlichen Hauptsymmetrieachse c_d und den nämlichen Nebensymmetrieachsen c_1, c_2 werden aber aus c_d durch die Ebenenpaare der nämlichen symmetrischen Ebeneninvolution projiziert, somit liegen auf C^3, D^3 noch die u_1 bzw. v_1 schneidenden Regelstrahlen u_2, v_2. Beide Zylindroide gehen also durch dieselbe Hauptsymmetrieachse c_d, dieselben Nebensymmetrieachsen c_1, c_2 und dieselben vier Regelstrahlen u_1, u_2, v_1, v_2. Sie schneiden hiernach die Ebenen des Ebenenbüschels $[u_1]$ im allgemeinen in je zwei Ellipsen, welche fünf Punkte gemein haben und folglich identisch sind. Ein Zylindroid ist somit durch eine Nebensymmetrieachse und einen mit keiner Nebensymmetrieachse zusammenfallenden Regelstrahl u bestimmt oder auch im allgemeinen durch die Hauptsymmetrieachse, eine Nebensymmetrieachse und einen beliebigen Punkt eines solchen Regelstrahles.

9. Ist r ein Regelstrahl eines Zylindroides C^3, der nicht mit einer Nebensymmetrieachse der Fläche zusammenfällt, und n eine zur Hauptsymmetrieachse c_d von C^3 windschiefe Normale zu r, so ist jede der beiden Nebensymmetrieachsen von C^3 die Hauptachse eines durch n gehenden linearen Komplexes. Das Hauptachsenzylindroid D^3 der Schnittkongruenz D_1^1 beider Komplexe hat dieselben Nebensymmetrieachsen c_1, c_2 und dieselbe Hauptsymmetrieachse c_d wie C^3. Ferner liegt auf ihm der Strahl r

als Träger des kürzesten Abstandes der Strahlen c_d, n von D_1^1, folglich sind nach 8. beide Zylindroide C^3, D^3 identisch.

Schneidet nunmehr die Normale n zum Regelstrahle r die Hauptsymmetrieachse c_d von C^3, so ist wiederum jede Nebensymmetrieachse c_1, c_2 der Fläche die Hauptachse je eines durch n gehenden linearen Komplexes und c_d ist die Hauptsymmetrieachse und c_1, c_2 sind die Nebensymmetrieachsen des Hauptachsenzylindroides D^3 der Schnittkongruenz Sie ist, da die zu ihr gehörigen Strahlen c_d und n inzident sind, hyperbolisch. Ihre Leitgeraden liegen also auf D^3 und gehen bzw. durch den Punkt $c_d n$ und sein Spiegelbild P an der mit c_1, c_2 inzidenten Ebene γ. Die P enthaltende Leitgerade liegt in der Ebene $c_d n$ und ist folglich der mit dieser Ebene inzidente in P zu c_d orthogonale Strahl. Nun steht die Ebene $c_d n$ auf dem Regelstrahle r des gegebenen Zylindroides C^3 senkrecht, sonach enthält sie auch den r rechtwinklig kreuzenden Regelstrahl von C^3. Er geht nach 6. ebenfalls durch das Spiegelbild des Punktes $c_d n$ an γ und fällt folglich mit dem in der Ebene $c_d n$ gelegenen Strahle von D^3 zusammen. Da aber beide Zylindroide außer diesem Regelstrahle noch die Hauptsymmetrieachse und die Nebensymmetrieachsen gemein haben, so sind sie identisch.

Fällt ferner r mit einer der beiden Nebensymmetrieachsen — etwa mit c_1 — zusammen, ist also n eine Normale von c_1, die zu c_d windschief ist, so wird c_2 und ein nicht mit c_1 zusammenfallender Regelstrahl x von C^3 zur Hauptachse je eines durch n gehenden linearen Komplexes gewählt. Die beiden Komplexe und das zu ihrer Schnittkongruenz D_1^1 gehörige Hauptachsenzylindroid D^3 sind hierdurch eindeutig bestimmt. Auf dem Zylindroide D^3 liegen ebenfalls die Regelstrahlen c_2, x, folglich hat es mit C^3 die Hauptsymmetrieachse c_d und, da c_1 der Träger des kürzesten Abstandes der Strahlen c_d, n von D_1^1 ist, auch den Regelstrahl c_1 gemein. Als aufeinander senkrecht stehende Regelstrahlen sind c_1, c_2 sowohl die Nebensymmetrieachsen von C^3, wie von D^3. Die beiden Flächen haben demnach außer dem Regelstrahle x auch ihre Nebensymmetrieachsen gemein, und somit fallen die Zylindroide C^3, D^3 wiederum zusammen.

Ist endlich n eine zur Hauptsymmetrieachse c_d parallele Gerade, so hat n sowie jeder zu n parallele Strahl mit dem Zylindroide zwei unendlich ferne zusammenfallende Punkte gemein, und jeder dieser Strahlen steht in dem im Endlichen gelegenen dritten Schnittpunkte mit C^3 auf dem durch ihn gehenden Regelstrahle der Fläche senkrecht. Alle zu c_d parallelen Geraden bilden zusammen mit den Strahlen der unendlich fernen Ebene eine ausgeartete lineare Kongruenz. Die sich in ihr schneidenden linearen Komplexe sind also ebenfalls speziell. Ihre Inzidenzachsen bilden einen in der unendlich fernen Ebene gelegenen Strahlenbüschel, dessen

Mittelpunkt der unendlich ferne Punkt von c_d ist. Jeder dieser Komplexe hat ∞^2 Hauptachsen, zu ihnen gehören jedesmal die Geraden der unendlich fernen Ebene und je ein Bündel paralleler Strahlen, dessen Mittelpunkt der Pol der Inzidenzachse des betreffenden speziellen Komplexes bezüglich des unendlich fernen imaginären Kugelkreises ist. Er liegt also auf der unendlich fernen einfachen Leitgeraden c_∞ von C^3 und wird aus ihr durch denjenigen Regelstrahl von C^3 ausgeschnitten, der jene Inzidenzachse rechtwinklig kreuzt. Ein Regelstrahl von C^3 gehört demnach je zu den Hauptachsen jedes dieser Komplexe, und C^3 kann somit auch als ein Hauptachsenzylindroid der Schnittkongruenz dieses singulären Komplexbüschels angesehen werden.

Mit Rücksicht auf alle in dieser Nummer durchgeführten Untersuchungen gilt folglich:

> Gehört zur Schnittkongruenz zweier linearen Komplexe, deren Hauptachsen zwei Regelstrahlen eines Zylindroides C^3 sind, eine nicht mit seiner Hauptsymmetrieachse c_d zusammenfallende Normale eines Regelstrahles der Fläche, so ist C^3 auch das Hauptachsenzylindroid dieser Schnittkongruenz.
>
> Jede Normale in einem Punkte P eines Regelstrahles von C^3 bestimmt mit diesem Zylindroide, wenn P nicht unendlich fern liegt, eine lineare Kongruenz mit dem Hauptachsenzylindroide C^3. Somit gibt es ∞^1 lineare Kongruenzen mit dem Hauptachsenzylindroide C^3.

10. Je nachdem der auf einem Regelstrahle des Zylindroides C^3 senkrechte Strahl n die Fläche noch in zwei reellen Punkten U, V schneidet oder nicht, ist nach **2.** die durch C^3 und n bestimmte lineare Kongruenz hyperbolisch oder elliptisch, und zwar sind im ersteren Falle die durch U, V gehenden Regelstrahlen u, v die Leitgeraden der hyperbolischen Kongruenz. u, v sind Spiegelbilder voneinander an den Nebensymmetrieachsen c_1, c_2, und U, V haben also gleichen Abstand von der Ebene $c_1 c_2 = \gamma$. Überhaupt sind je zwei Regelstrahlen u_1, v_1 von C^3, die an einer und folglich an jeder der beiden Nebensymmetrieachsen der Fläche ineinander gespiegelt werden, Leitgeraden einer hyperbolischen linearen Kongruenz mit dem Hauptachsenzylindroide C^3. Zwei solche Regelstrahlen sind die Kuspidalstrahlen c', c'' von C^3. Unter den zu C^3 gehörigen hyperbolischen Kongruenzen gibt es also eine mit zueinander orthogonalen Leitgeraden.

Sind u_1, v_1 die Leitgeraden einer zu C^3 gehörigen hyperbolischen linearen Strahlenkongruenz, so sind es auch die bzw. mit u_1, v_1 je in einer Ebene gelegenen Regelstrahlen u_2, v_2. Der Regelstrahl u_1 kreuzt nach **5.** v_2 rechtwinklig, und ebenso u_2, v_1. Die sich orthogonal kreuzenden Regelstrahlen rufen nach **3.** auf einer Ellipse α^2 von C^3 eine Involution

hervor, deren Involutionszentrum der Mittelpunkt von α^2 ist, und ferner liegt nach **2.** die Nebenachse von α^2 in γ. Somit rufen auch die Leitgeraden u_1, v_1 der zu C^3 gehörigen hyperbolischen Kongruenzen auf α^2 eine Involution hervor. Ihr Involutionszentrum ist der unendlich ferne Punkt der Hauptachse von α^2. Sie ist hyperbolisch und ihre Doppelpunkte liegen auf der Nebenachse von α^2. Da die Regelschar von C^3 zu α^2 perspektiv ist, so gilt also:

> Die Leitgeraden der zu einem Zylindroide C^3 gehörigen hyperbolischen Kongruenzen sind Strahlenpaare einer hyperbolischen Involution. Ihre Doppelstrahlen sind die Nebensymmetrieachsen c_1, c_2 von C^3.*)

Eine durch eine Nebensymmetrieachse — etwa c_1 — des Zylindroides C^3 gehende Ebene ε schneidet im allgemeinen C^3 nach **2.** in einer Ellipse ε^2, deren Nebenscheitelpunkte E, E' auf c_1 liegen, und zwar ist der eine dieser Punkte — etwa E' — zugleich ein Punkt der Doppelpunktsgeraden c_d von C^3. Die Tangente von ε^2 in E ist die Haupttangente von C^3 im Punkte E. Da sie c_1 in E rechtwinklig schneidet, so bestimmt sie nach obigem eine lineare Strahlenkongruenz mit dem Hauptachsenzylindroid C^3 und zwar eine parabolische. Zu ihr gehören auch alle übrigen c_1 schneidenden Haupttangenten von C^3. In jeder Ebene ε von c_1 ruft diese parabolische Strahlenkongruenz also einen Strahlenbüschel I. Ordnung hervor, dessen Mittelpunkt der Berührungspunkt von ε mit C^3 ist. Unter den linearen Strahlenkongruenzen mit demselben Hauptachsenzylindroid C^3 sind demnach zwei parabolische, ihre Leitgeraden sind bzw. die Nebensymmetrieachsen c_1, c_2 von C^3.

11. Eine zu einem Zylindroide C^3 als Hauptachsenzylindroid gehörige lineare Kongruenz N_1^1 ist nach **9.** bestimmt durch C^3 und einen auf einem Regelstrahle r von C^3 senkrechten im Endlichen gelegenen Strahl n, der nicht mit der Hauptsymmetrieachse c_d der Fläche identisch ist. Beschreibt n in der auf r senkrechten Ebene ν um seinen Schnittpunkt N mit r den Strahlenbüschel $[N]$, so fällt N_1^1 nacheinander mit allen zum Hauptachsenzylindroid C^3 gehörigen linearen Kongruenzen zusammen. n als Komplexstrahl und zwei von r verschiedene Regelstrahlen s, t von C^3 als Hauptachsen bestimmen im allgemeinen zwei sich in N_1^1 schneidende lineare Komplexe Γ_s'', Γ_t''. Sie weisen, wenn d_s, d_t bzw. die mit N inzidenten Normalen der Hauptachsen s und t sind, dem Punkte N bzw. die Nullebenen nd_s, nd_t zu. Die linearen Komplexe mit den Hauptachsen s, t bilden die beiden Komplexbüschel $[C_1^1(s)]$, $[C_1^1(t)]$. Durchläuft n den

*) Sturm, Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie in synthetischer Behandlung. 1. Teil, Leipzig 1892, S. 169, N. 122.

Strahlenbüschel $[N]$, so beschreiben Γ_s'', Γ_t'' die Büschel $[C_1^1(s)]$ bzw. $[C_1^1(t)]$, und die durch Γ_s'' und Γ_t'' bzw. dem Punkte N zugewiesenen Nullebenen nd_s, nd_t beschreiben bzw. um d_s, d_t zwei zum Strahlenbüschel $[N]$ perspektive, also zueinander projektive Ebenenbüschel $[d_s]$, $[d_t]$. Die beiden Komplexbüschel $[C_1^1(s)]$, $[C_1^1(t)]$ sind folglich projektiv aufeinander bezogen, wenn je zwei Komplexe einander entsprechen, die je durch denselben Strahl n des Strahlenbüschels $[N]$ gehen. Zwei homologe Komplexe Γ_s'', Γ_t'' beider projektiven Komplexbüschel schneiden sich in je einer zum Hauptachsenzylindroid C^3 gehörigen linearen Kongruenz N_1^1, und durch jede der zu C^3 gehörigen linearen Kongruenzen geht ein Paar homologer Komplexe. Diese linearen Kongruenzen bilden also als Schnitt homologer Komplexe zweier projektiven Büschel linearer Komplexe einen quadratischen Komplex Γ^2*), und da an die Stelle der Regelstrahlen s, t von C^3 irgend zwei andere Regelstrahlen der Fläche treten können, so sind ∞^3 projektive Komplexbüschel nachgewiesen, welche Γ^2 erzeugen. Γ^2 besteht auch aus allen hyperbolischen linearen Kongruenzen, deren eine Leitgerade je ein Regelstrahl von C^3 und deren andere Leitgerade der ihn rechtwinklig kreuzende Strahl in der unendlich fernen Ebene ist. Die Hauptsymmetrieachse c_d und die einfache Leitgerade c_∞ von C^3 sind Doppelstrahlen von Γ^2. Die singuläre Fläche des Komplexes besteht nach **9.** aus C^3, der unendlich fernen Ebene und dem Strahlenbündel, dessen Mittelpunkt der unendlich ferne Punkt der Hauptsymmetrieachse ist. — Ist P ein im Endlichen außerhalb des Zylindroides C^3 gelegener Punkt, so ist der von ihm ausstrahlende Komplexkegel von Γ^2 der Ort aller Normalen, die von ihm aus auf die Regelstrahlen von C^3 gefällt werden. Daß diese Normalen die Strahlen eines Kegels II. Ordnung sind, ging schon aus der projektiven Erzeugung des Zylindroides in **2.** hervor. Liegt P im Endlichen auf C^3, so steht die Ebene des einen von ihm ausgehenden Komplexstrahlenbüschels I. Ordnung zu dem durch P gehenden Regelstrahle r von C^3 senkrecht, während die Ebene des andern nach **10.** mit demjenigen Regelstrahle von C^3 inzident ist, in den r an den Nebensymmetrieachsen der Fläche gespiegelt wird. Gehört der Punkt P der unendlich fernen Ebene an, ist er aber nicht mit c_d inzident, so ist er der Mittelpunkt eines unendlich fernen und eines Parallelstrahlenbüschels von Γ^2. Die Ebene dieses Büschels enthält denjenigen Regelstrahl von C^3, welcher auf der Ebene Pc_d senkrecht steht. — Alle linearen Kongruenzen mit dem Hauptachsenzylindroide C^3 haben dieselben Symmetrieachsen, folglich sind nach **6.** die Geraden c_d, c_1, c_2 auch Symmetrieachsen von Γ^2. Die Symmetrieachse c_d heiße die Hauptsymmetrieachse, jede der beiden

*) Sturm, Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie in synthetischer Behandlung. 1 Teil, Leipzig 1892, S. 171, N. 123.

anderen Symmetrieachsen eine Nebensymmetrieachse dieses quadratischen Komplexes.

12. Die Regelstrahlen des Hauptachsenzylindroides C^3 eines Büschels linearer Komplexe und nur diese schneiden bekanntlich die Hauptsymmetrieachse c_d und die bzw. mit ihnen inzidenten Strahlen der Trägerkongruenz C_1^1 jenes Büschels rechtwinklig. Nun ist eine hyperbolische lineare Strahlenkongruenz durch zwei ihrer sich schneidenden Strahlen a, b und durch die nicht mit dem Punkte ab inzidente Hauptsymmetrieachse c_d bestimmt, somit bilden — vorausgesetzt, daß c_d nur einen Strahl des Büschels $[ab]$ und zwar im Endlichen trifft — alle einen Strahl c_d und je einen Strahl eines Strahlenbüschels $[ab]$ rechtwinklig schneidenden Strahlen die Regelschar eines Zylindroides mit der Hauptsymmetrieachse c_d.*)

Die Punkte einer Ellipse ε^2 eines Rotationszylinders R^2 werden aus den auf einer Durchmesserebene der Fläche gelegenen Erzeugenden d, e durch je zwei zueinander normale Ebenen projiziert. Eine d rechtwinklig schneidende Unisekante von ε^2 steht folglich in ihrem Treffpunkte T mit ε^2 auf der Ebene eT senkrecht, sie schneidet also den Strahl TE, der T mit dem Schnittpunkte E von e und ε^2 verbindet, rechtwinklig. Fällt nun T nacheinander mit allen Punkten von ε^2 zusammen, so ergeben sich demnach die von diesen Punkten auf d gefällten Normalen auch als Normalen zu den Strahlen des in der Ebene von ε^2 gelegenen Strahlenbüschels I. Ordnung $[E]$, und somit nach obigem Satze als Regelstrahlen eines Zylindroides mit der Hauptsymmetrieachse d. Kurz:

> Die von den Punkten einer Ellipse ε^2 eines Rotationszylinders auf eine Erzeugende d von ihm gefällten Normalen bilden die Regelschar eines Zylindroides mit der Doppelpunktsgeraden d und jede derart erzeugte Fläche kann als Hauptachsenfläche eines Büschels linearer Komplexe angesehen werden.

Bekanntlich bestimmen vier windschiefe Strahlen, die nicht einer Regelschar II. Ordnung angehören, im allgemeinen eine einzige sie enthaltende lineare Strahlenkongruenz C_1^1. Eine solche ist also auch gegeben, wenn eine in ihr enthaltene parabolische Regelschar II. Ordnung $\mathfrak{P}^2$ bekannt ist und ein zu den Ebenen des unendlichen fernen Strahles von $\mathfrak{P}^2$ normaler Kongruenzstrahl c_d, der mit keinem Leitstrahle dieser Regelschar zusammenfällt. c_d ist die Hauptsymmetrieachse von C_1^1. Da nun der kürzeste Abstand eines zu c_d windschiefen Kongruenzstrahles von c_d auf einem Regelstrahle des Hauptachsenzylindroides C^3 von C_1^1 liegt, so bilden alle c_d und je einen Strahl von $\mathfrak{P}^2$ rechtwinklig schneidenden Geraden Regelstrahlen eines Zylindroides.

---

*) Sir R. S. Ball, A treatise on the theory of screws. Cambridge 1900, S. 150.

Die Fokaleigenschaften der linearen Strahlenkongruenzen.

13. Durch eine lineare Kongruenz C_1^1 ist einer Ebene ε im allgemeinen eine andere Ebene ε' des Raumes zugeordnet. Soll ε auf ε' senkrecht stehen, so muß die Ebene ε im allgemeinen den zu ihr normalen Kongruenzstrahl c in dem Mittelpunkte der Punktinvolution schneiden, die C_1^1 auf c hervorruft. Eine auf der ihr zugeordneten Ebene senkrechte Ebene heiße eine Mittelebene der linearen Kongruenz. Insbesondere heiße die Hauptmittelebene der linearen Kongruenz die auf ihrer Hauptsymmetrieachse c_d senkrechte Mittelebene, sie ist identisch mit der Fluchtebene γ von C_1^1. Durch einen Strahl von C_1^1 gehen im allgemeinen zwei einander zugeordnete Mittelebenen. Die durch den unendlich fernen Kongruenzstrahl gehenden Mittelebenen sind die Hauptmittelebene γ und die unendlich ferne Ebene.

Alle mit einer Nebensymmetrieachse c_x von C_1^1 inzidenten Kongruenzstrahlen bilden eine gleichseitige parabolische Regelschar $\mathfrak{P}_x^2$, deren Scheitelstrahlen c_x und c_d sind. Aus jedem solchen Kongruenzstrahl wird also der unendlich ferne Punkt von c_d und der ihm durch C_1^1 zugeordnete Punkt $c_d\gamma$ durch zwei durch C_1^1 zugeordnete zueinander normale Ebenen projiziert. Die zu einer Nebensymmetrieachse c_x von C_1^1 normalen und die mit ihr inzidenten Ebenen sind folglich Mittelebenen von C_1^1.

14. Werden zu den Mittelebenen einer linearen Kongruenz C_1^1 durch einen beliebigen Punkt P parallele Ebenen gelegt, so gehören sie zu einem zum Punktfelde $[\gamma]$ der Hauptmittelebene γ korrelativen Ebenenbündel $[P]$, wenn jeder Ebene π von $[P]$ der Schnittpunkt $\mathfrak{P}$ des zu ihr normalen Kongruenzstrahles mit γ zugewiesen wird. Die Ebenen π schneiden die unendlich ferne Ebene in einem zum Ebenenbündel $[P]$ perspektiven, also zum Punktfelde $[\gamma]$ korrelativen Strahlenfelde. Entsprechende Elemente beider Felder werden durch die Mittelebenen von C_1^1 verbunden, und diese bilden somit einen parabolischen Ebenenbündel II. Ordnung. Zu ihm gehören nach **13.** die beiden Ebenenbüschel $[c_1]$, $[c_2]$, deren Achsen c_1, c_2 die Nebensymmetrieachsen von C_1^1 sind, und ferner die beiden Büschel paralleler Ebenen, die von den zu c_1 bzw. c_2 normalen Ebenen gebildet werden. Da c_1, c_2 sich rechtwinklig schneiden, so ergibt sich:

> Die von den Mittelebenen einer linearen Kongruenz C_1^1 umhüllte Regelfläche II. Grades ist ein gleichseitiges Paraboloid C^2. Seine Hauptachse fällt mit der Hauptsymmetrieachse c_d und seine Scheitelstrahlen mit den Nebensymmetrieachsen c_1, c_2 von C_1^1 zusammen.*)

* Sturm, Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie in synthetischer Behandlung. 1. Teil, Leipzig 1892, S. 167, N. 121.

15. Durch eine beliebige Gerade gehen zwei reelle oder konjugiert imaginäre Mittelebenen von C_1^1, hingegen ist jede durch eine Erzeugende von C^2 gehende Ebene eine Mittelebene. Einer Erzeugenden e^1 von C^2 ist somit durch C_1^1 wiederum eine Erzeugende e^2 von C^2 zugeordnet, die mit ihr zur selben Regelschar gehört. Durch e^1 und e^2 gehende einander zugeordnete Ebenen stehen aufeinander senkrecht. Das gleichseitige Paraboloid C^2 wird also durch C_1^1 in sich selbst übergeführt. Hierbei ruft die Kongruenz C_1^1 in jeder seiner beiden Regelscharen eine Involution hervor. Sind die Strahlen beider Regelscharen von C^2 elliptisch involutorisch gepaart, so ist C_1^1 eine hyperbolische lineare Kongruenz, hingegen ist C_1^1 eine elliptische lineare Kongruenz, wenn die Strahlen der einen Regelschar hyperbolisch involutorisch, die der andern elliptisch involutorisch gepaart sind.*) Bei einer elliptischen linearen Kongruenz C_1^1 sind die Doppelstrahlen der hyperbolisch involutorischen Regelschar zwei Kongruenzstrahlen, in denen C_1^1 zirkulare Ebeneninvolutionen hervorruft. Sie fallen also mit den Fokalachsen der elliptischen linearen Kongruenz zusammen. Werden überhaupt die Doppelstrahlen der in den beiden Regelscharen von C^2 durch eine lineare Kongruenz C_1^1 hervorgerufenen Involutionen die Fokalachsen von C_1^1 genannt, so hat eine hyperbolische lineare Strahlenkongruenz zwei Paar konjugiert imaginärer Fokalachsen, eine elliptische ein Paar reeller f', f'' und ein Paar konjugiert imaginärer. Das von den Mittelebenen von C_1^1 umhüllte gleichseitige Paraboloid C^2 heiße das Fokalparaboloid, jede seiner Regelscharen $\mathfrak{C}_1^1$, $\mathfrak{C}_2^2$ eine Fokalregelschar, endlich die Involution, die C_1^1 in jeder der beiden Fokalregelscharen hervorruft, eine Fokalinvolution von C_1^1. Durch C_1^1 einander zugeordnete normale Ebenen schneiden jede seiner beiden Fokalregelscharen in zwei Strahlen, die durch die betreffenden Fokalinvolutionen einander zugeordnet sind, gleichwie einander zugeordnete normale Strahlen eines polaren Feldes jede seiner Achsen in Punktepaaren schneiden, die zu den auf diesen Achsen gelegenen Brennpunktsinvolutionen gehören. Die Fokalinvolutionen von C_1^1 sind voneinander abhängig. Zwei zueinander normale Ebenen, die bzw. durch zwei zugeordnete Strahlen der einen Fokalregelschar gehen, gehen auch durch zwei zugeordnete Strahlen der andern.

Da die Nebensymmetrieachsen c_1, c_2 einer linearen Kongruenz C_1^1 mit den Scheitelstrahlen des Fokalparaboloides C^2 zusammenfallen, so ist dieses bei einer elliptischen linearen Kongruenz bekannt, sobald außer c_1, c_2 noch eine reelle Fokalachse — etwa f' — von C_1^1 gegeben ist. Bei

*) v. Staudt, Beiträge zur Geometrie der Lage. Erstes Heft, Nürnberg 1856, S. 64, N. 102.

einer hyperbolischen linearen Kongruenz genügt es mit Hilfe der beiden Leitgeraden u, v außer c_1, c_2 noch eine beliebige Mittelebene aufzusuchen. Die in ihr gelegenen Normalen zu c_1, c_2 sind nämlich zwei weitere Erzeugende von C^2. Jede von ihnen bestimmt mit der zu ihr windschiefen Nebensymmetrieachse und der zu dieser normalen unendlich fernen Geraden eine Regelschar von C^2 und folglich diese Fläche selbst.

16. Bei einer parabolischen linearen Kongruenz ${}^pC_1^1$ ist jede durch ihre Leitgerade l gehende Ebene ξ eine Mittelebene. Die einer solchen Mittelebene ξ zugeordneten Mittelebenen bilden einen Ebenenbüschel I. Ordnung, dessen Achse x auf der Ebene ξ im Mittelpunkte des in ihr gelegenen Büschels von Kongruenzstrahlen senkrecht steht. Beschreibt ξ den Ebenenbüschel $[l]$, so erzeugt die zu ξ normale Achse x die eine Regelschar $\mathfrak{C}_1^2$ des Fokalparaboloides C^2 von ${}^pC_1^1$. Da l alle Strahlen von $\mathfrak{C}_1^2$ rechtwinklig schneidet, so ist l ein Scheitelstrahl von C^2. — Der x durch ${}^pC_1^1$ zugeordnete Regelstrahl von $\mathfrak{C}_1^2$ liegt in ξ und kreuzt folglich x rechtwinklig. Durch ${}^pC_1^1$ wird also die Fokalregelschar $\mathfrak{C}_1^2$ derartig elliptisch involutorisch gepaart, daß zugeordnete Strahlen zueinander normal sind. Die Strahlen der andern Fokalregelschar $\mathfrak{C}_2^2$ sind alle dem zu ihr gehörigen Leitstrahle l von ${}^pC_1^1$ zugeordnet, die sie paarende Fokalinvolution ist folglich parabolisch. — Die Leitgerade l der parabolischen linearen Kongruenz ${}^pC_1^1$ liegt in ihrer Hauptmittelebene γ und ist eine Nebensymmetrieachse von ${}^pC_1^1$, die andere ist der ebenfalls in γ gelegene zweite Scheitelstrahl von C^2. Endlich ist der zu γ senkrechte Kongruenzstrahl die Hauptsymmetrieachse von ${}^pC_1^1$. Mit l fallen die beiden Fokalachsen der parabolischen linearen Kongruenz zusammen.

17. Einander zugeordnete Strahlen jeder Fokalregelschar einer allgemeinen linearen Kongruenz C_1^1 sind die Achsen zweier projektiven Ebenenbüschel $[e^1]$, $[e^2]$, wenn einander zugeordnete Mittelebenen beider Büschel als entsprechend einander zugewiesen werden. Homologe Ebenen beider projektiven Büschel sind also zueinander senkrecht, und somit ist ihr Erzeugnis eine in C_1^1 enthaltene orthogonale Regelschar II. Ordnung $\mathfrak{R}^2$, deren Kreisschnitte bzw. normal zu e^1 und e^2 sind. e^1, e^2 schneiden die zu ihnen normale Nebensymmetrieachse von C_1^1 in Punkten, durch welche wechselweise zu ihnen parallele Kongruenzstrahlen gehen. Diese Nebensymmetrieachse ist ferner die Schnittgerade zweier Kreisschnittebenen von $\mathfrak{R}^2$, und da sie $\mathfrak{R}^2$ in zwei Punkten schneidet, deren Tangentialebenen zu ihr normal sind, so fällt sie mit einer Hauptachse von $\mathfrak{R}^2$ zusammen. Die sich in ihr schneidenden Kreisschnittebenen von $\mathfrak{R}^2$ enthalten also kongruente Kreise, deren Mittelpunkte mit dem von $\mathfrak{R}^2$ zusammenfallen. Aus der orthogonalen Regelschar $\mathfrak{R}^2$ wird eine gleichseitige

parabolische, sowie e^1 mit einer der beiden Nebensymmetrieachsen c_1, c_2 von C_1^1 zusammenfällt, und e^2 folglich mit dem c_1 bzw. c_2 rechtwinklig kreuzenden unendlich fernen Strahle. —

In einer elliptischen linearen Strahlenkongruenz degeneriert $\mathfrak{R}^2$ zweimal in einen Strahl, nämlich in je eine der reellen Fokalachsen f', f''; sie liegen auf allen orthogonalen Regelscharen $\mathfrak{R}^2$ von C_1^1, zu deren Leitstrahlen zwei einander zugeordnete Strahlen der elliptisch involutorischen Fokalregelschar gehören. Die in einer elliptischen linearen Kongruenz enthaltenen durch f', f'' gehenden Regelscharen II. Ordnung sind demnach orthogonal.

In einer parabolischen linearen Kongruenz ${}^pC_1^1$ berühren sich die orthogonalen Regelscharen $\mathfrak{R}^2$ längs der Leitgeraden l, sobald die durch ${}^pC_1^1$ einander zugeordneten Geraden e^1, e^2 der parabolisch involutorischen Fokalregelschar angehören, also eine von beiden mit l zusammenfällt. Sind hingegen die beiden Strahlen zugeordnete Elemente der elliptisch involutorischen Fokalregelschar, so zerfallen die orthogonalen Regelscharen $\mathfrak{R}^2$ in je zwei in den zueinander orthogonalen Ebenen des Ebenenbüschels $[l]$ gelegene Strahlenbüschel I. Ordnung.

18. Eine in einer linearen Kongruenz C_1^1 enthaltene orthogonale Regelschar II. Ordnung, zu deren Leitschar zwei durch C_1^1 einander zugeordnete Geraden einer Fokalregelschar gehören und jede Fläche auf welcher eine solche Regelschar liegt, heiße mit dieser Fokalregelschar der linearen Kongruenz verbunden.

Zwei orthogonale Regelscharen von C_1^1, von denen die eine mit der einen, die andere mit der andern Fokalregelschar verbunden ist, haben zwei reelle Kongruenzstrahlen gemein und schneiden sich außerdem noch, je nachdem C_1^1 hyperbolisch oder elliptisch ist, in den beiden reellen oder konjugiert imaginären Leitgeraden von C_1^1.

19. Durch einen Strahl s der linearen Kongruenz C_1^1 gehen die bzw. mit ihren Fokalregelscharen $\mathfrak{C}_1^2$, $\mathfrak{C}_2^2$ verbundenen orthogonalen Regelscharen $\mathfrak{R}_1^2$, $\mathfrak{R}_2^2$. Sind die Strahlen e_1^1, e_1^2 von $\mathfrak{C}_1^2$ und e_2^1, e_2^2 von $\mathfrak{C}_2^2$ bzw. Leitstrahlen von $\mathfrak{R}_1^2$ und $\mathfrak{R}_2^2$, so trifft s von diesen vier auf dem Fokalparaboloide C^2 gelegenen Geraden zwei in seinem einen und zwei in seinem andern Schnittpunkte mit C^2. Liegen auf s die Punkte $e_1^1 e_2^1$, $e_1^2 e_2^2$ von C^2, so liegen auf dem zweiten Kongruenzstrahle t, den die Regelscharen $\mathfrak{R}_1^2$, $\mathfrak{R}_2^2$ außer s noch gemein haben, die Punkte $e_1^1 e_2^2$, $e_1^2 e_2^1$ der Fläche, und folglich sind die Kongruenzstrahlen s, t für C^2 zueinander polar. Als Kongruenzstrahl s kann jeder Strahl von $\mathfrak{R}_1^2$ oder $\mathfrak{R}_2^2$ angesehen werden, demnach wird jede von beiden Regelscharen durch den polaren Raum des Fokalparaboloides C^2 in sich selbst übergeführt. Das gleiche gilt von jeder mit einer Fokalregelschar von C_1^1 verbundenen orthogonalen

Regelschar II. Ordnung. — Die Leitstrahlen einer mit einer Fokalregelschar verbundenen orthogonalen Regelschar — etwa von $\mathfrak{R}_1^2$ — sind durch C_1^1 paarweise einander zugeordnet und ein Paar e_1^1, e_1^2 dieser zugeordneten Strahlen gehört jener Fokalregelschar an. Der polare Raum des Fokalparaboloides C^2 ruft demnach in der Leitschar von $\mathfrak{R}_1^2$ eine hyperbolische Involution mit den Doppelstrahlen e_1^1, e_1^2 hervor und somit ist bewiesen:

> Jede mit einer Fokalregelschar einer linearen Kongruenz C_1^1 verbundene orthogonale Regelschar wird durch den polaren Raum des Fokalparaboloides C^2 von C_1^1 in sich selbst übergeführt. Hierbei gehen je zwei durch C_1^1 einander zugeordnete Leitstrahlen einer solchen orthogonalen Regelschar wiederum in je zwei einander durch C_1^1 zugeordnete Leitstrahlen derselben Regelschar über.

Die Regelscharen $\mathfrak{R}_1^2$, $\mathfrak{R}_2^2$ liegen bzw. auf den orthogonalen Hyperboloiden R_1^2, R_2^2. Als Diagonalen des auf R_1^2 gelegenen einfachen Vierseits mit den Gegenseiten s, t und e_1^1, e_1^2 sind e_2^1, e_2^2 reziproke Polaren für dieses orthogonale Hyperboloid, ebenso sind e_1^1, e_1^2 reziproke Polaren für R_2^2. Die zugeordneten Geraden einer Fokalregelschar einer linearen Kongruenz sind folglich reziproke Polaren für alle mit der andern Fokalregelschar verbundenen orthogonalen Regelflächen. Zwei zugeordnete Strahlen der einen Fokalregelschar sind Leitstrahlen von $\mathfrak{R}_1^2$, zwei der andern Leitstrahlen von $\mathfrak{R}_2^2$. Sonach gilt:

> Der polare Raum jeder mit einer Fokalregelschar einer linearen Kongruenz verbundenen orthogonalen Regelfläche führt auch umgekehrt das Fokalparaboloid C^2 der linearen Kongruenz in sich selbst über. Hierbei gehen zugeordnete Strahlen der mit ihr verbundenen Fokalregelschar wieder in zugeordnete Strahlen dieser Fokalregelschar über, während zugeordnete Strahlen der nicht mit ihr verbundenen Fokalregelschar in bezug auf die orthogonale Regelfläche zueinander polar sind.

Auf die Modifikationen, welche diese und die folgenden Sätze und Beweise bei der parabolischen linearen Kongruenz erleiden, kann hier nicht näher eingegangen werden.

20. Sind wiederum $\mathfrak{R}_1^2$, $\mathfrak{R}_2^2$ zwei bzw. mit den Fokalregelscharen $\mathfrak{C}_1^2$, $\mathfrak{C}_2^2$ einer linearen Kongruenz C_1^1 verbundene orthogonale Regelscharen, e_1^1, e_1^2 und e_2^1, e_2^2 bzw. die Leitstrahlen, die den betreffenden Fokalregelscharen angehören, so sind e_2^1, e_2^2 nach **19.** zueinander polar in bezug auf die $\mathfrak{R}_1^2$ enthaltende Fläche R_1^2. Sie rufen folglich, wenn sie zu Involutionsachsen dieser Regelschar erwählt werden, eine involutorische Paarung ihrer Strahlen hervor, und zwar ist jedes Paar zugeordneter Regelstrahlen x, y durch e_2^1, e_2^2 harmonisch getrennt. Einem Strahle x von

$\mathfrak{R}_1^2$ ist nun durch die $\mathfrak{R}_2^2$ enthaltende Regelfläche R_2^2 wiederum ein Strahl von C_1^1 als Polare zugeordnet*); es ist derjenige Strahl, welcher von x durch irgend zwei durch C_1^1 einander zugeordnete Leitgeraden von $\mathfrak{R}_2^2$ harmonisch getrennt ist. Solche zwei einander zugeordneten Leitgeraden sind aber e_2^1, e_2^2, folglich fällt die gesuchte Polare von x in bezug auf R_2^2 mit dem Strahle y von $\mathfrak{R}_1^2$ zusammen. Die Regelschar $\mathfrak{R}_1^2$ wird also durch den polaren Raum von R_2^2 in sich selbst übergeführt und, wie auf gleiche Weise folgt, führt auch der polare Raum von R_1^2 die Regelschar $\mathfrak{R}_2^2$ in sich selbst über. Zwei von e_2^1, e_2^2 verschiedene durch C_1^1 einander zugeordnete Leitgeraden g_1, g_2 von $\mathfrak{R}_2^2$ sind nun durch je zwei in bezug auf R_2^2 polare Regelstrahlen von $\mathfrak{R}_1^2$ harmonisch getrennt, und sonach reziproke Polaren in bezug auf R_1^2. Kurz, es ist bewiesen:

> Der polare Raum jeder mit der einen Fokalregelschar einer linearen Kongruenz verbundenen orthogonalen Regelfläche transformiert jede mit der andern Fokalregelschar verbundene in sich selbst. Die durch die lineare Kongruenz einander zugeordneten Leitstrahlen einer mit einer Fokalregelschar verbundenen orthogonalen Regelschar sind reziproke Polaren für alle mit der andern Fokalregelschar verbundenen orthogonalen Regelflächen.

21. Alle Flächen II. Ordnung, die ∞^2 gemeinsame reziproke Polaren haben, bilden einen speziellen F^2 Büschel.**) Nun sind nach **20.** die ∞^2 durch C_1^1 einander zugeordneten Leitstrahlen der orthogonalen Regelscharen, die mit der einen Fokalregelschar von C_1^1 verbunden sind, reziproke Polaren für die mit der andern Fokalregelschar verbundenen orthogonalen Regelflächen, folglich liegen die mit einer bestimmten Fokalregelschar von C_1^1 verbundenen orthogonalen Regelscharen auf je einer Fläche eines F^2 Büschels.

Durch die reellen Fokalachsen f', f'' einer elliptischen linearen

*) v. Staudt, Beiträge zur Geometrie der Lage. Erstes Heft, Nürnberg 1856, S. 71, N. 109.

**) Diese ∞^2 reziproken Polaren bilden bekanntlich eine lineare Kongruenz. Daß alle Flächen II. Ordnung, deren gemeinsame reziproke Polaren eine lineare Strahlenkongruenz bilden, die Elemente eines speziellen F^2 Büschels sind, scheint nicht bekannt zu sein. Man begnügt sich vielmehr im allgemeinen, diesen speziellen F^2 Büschel als einen F^2 Büschel zu definieren, dessen Flächen in zwei gemeinsamen (reellen) reziproken Polaren dieselben Punkt- und Ebeneninvolutionen hervorrufen. Letztere Definition ist aber zu eng; sie umfaßt nur diejenigen F^2 Büschel, bei denen beide Paar Gegenseiten des allen F^2 gemeinsamen einfachen Vierseits reell oder konjugiert imaginär sind, nicht aber den F^2 Büschel, bei dem das eine Paar Gegenseiten reell, das andere konjugiert imaginär ist. Obige Definition hingegen umfaßt alle Einzelfälle. Weitere Beziehungen zwischen diesem F^2 Büschel und der linearen Kongruenz gedenke ich demnächst zu veröffentlichen.

Kongruenz gehen nach **17.** alle orthogonalen Regelscharen, die mit ihrer elliptisch involutorischen Fokalregelschar verbunden sind, durch jeden andern Strahl einer linearen Kongruenz sendet hingegen jede Fokalregelschar nur eine mit ihr verbundene orthogonale Regelschar. Somit besteht der reelle Teil der Grundkurven der beiden F^2 Büschel, welche zu den Fokalregelscharen einer hyperbolischen linearen Kongruenz C_1^1 gehören, aus den beiden Leitgeraden von C_1^1. Der reelle Teil der Grundkurve des F^2 Büschels, welcher zu der elliptisch involutorischen Fokalregelschar einer elliptischen linearen Kongruenz C_1^1 gehört, setzt sich aus den beiden Fokalachsen f', f'' zusammen, während die Grundkurve des mit der hyperbolisch involutorischen Fokalregelschar verknüpften F^2 Büschels keinen reellen Punkt enthält.

Der zur hyperbolisch involutorischen Fokalregelschar einer elliptischen linearen Kongruenz gehörige F^2 Büschel enthält außer den ∞^1 orthogonalen Regelflächen ∞^1 polare Räume mit imaginären Inzidenzflächen. In ihnen sind ebenfalls die durch C_1^1 einander zugeordneten Leitstrahlen der orthogonalen Regelscharen, welche mit der elliptisch involutorischen Fokalregelschar verbunden sind, reziprok polar, und die durch C_1^1 einander zugeordneten Punkte und Ebenen konjugiert. Aus diesem Grunde mögen auch sie mit der hyperbolisch involutorischen Fokalregelschar verbunden heißen. Überhaupt heiße von nun an jede reelle oder imaginäre Regelfläche, auf welcher eine mit einer Fokalregelschar von C_1^1 verbundene orthogonale Regelschar liegt, und ebenso der F^2 Büschel, dem sie angehört, mit dieser Fokalregelschar verbunden.

22. Die Leitstrahlen aller mit der einen Fokalregelschar $\mathfrak{C}_1^2$ einer linearen Kongruenz C_1^1 verbundenen orthogonalen Regelscharen $\mathfrak{R}_1^2$ gehören nach **21.** einer linearen Kongruenz ${}^1F_1^1$ an. Da die mit $\mathfrak{C}_1^2$ verbundenen Regelflächen selbst einen F^2 Büschel bilden, so geht durch einen Punkt, der nicht auf einem gemeinsamen Strahle der Regelscharen $\mathfrak{R}_1^2$ liegt, eine Gerade, die zu den Leitstrahlen dieser Regelscharen gehört. Jeder Strahl der linearen Kongruenz ${}^1F_1^1$ ist somit ein Leitstrahl einer mit der Fokalregelschar $\mathfrak{C}_1^2$ verbundenen Regelschar, ${}^1F_1^1$ enthält die Fokalregelschar $\mathfrak{C}_1^2$. —Ebenso bilden die Leitstrahlen der mit der andern Fokalregelschar $\mathfrak{C}_2^2$ verbundenen Regelscharen $\mathfrak{R}_2^2$ eine zweite lineare Kongruenz ${}^2F_1^2$, die durch $\mathfrak{C}_2^2$ geht. Die lineare Kongruenz ${}^1F_1^1$ heiße mit der Fokalregelschar $\mathfrak{C}_1^2$, die lineare Kongruenz ${}^2F_1^1$ mit der Fokalregelschar $\mathfrak{C}_2^2$ der linearen Kongruenz C_1^1 verbunden.

Ist C_1^1 hyperbolisch, so enthalten die je mit ihren beiden Fokalregelscharen $\mathfrak{C}_1^2$, $\mathfrak{C}_2^2$ verbundenen orthogonalen Regelscharen keine reellen gemeinsamen Regelstrahlen, und die mit $\mathfrak{C}_1^2$, $\mathfrak{C}_2^2$ bzw. verbundenen linearen

Kongruenzen ${}^1F_1^1$, ${}^2F_1^1$ sind elliptisch. Ist C_1^1 elliptisch, so ist die mit ihrer hyperbolisch involutorischen Fokalregelschar verbundene Kongruenz elliptisch, hingegen die mit ihrer elliptisch involutorischen Fokalregelschar verbundene Kongruenz hyperbolisch. Die Leitgeraden der letzteren linearen Kongruenz sind die reellen Fokalachsen f', f'' von C_1^1.

23. Die mit der einen Fokalregelschar $\mathfrak{C}_1^2$ einer linearen Kongruenz C_1^1 verbundene lineare Kongruenz ${}^1F_1^1$ geht nach **22.** durch diese Regelschar, sie paart folglich die Strahlen der anderen Fokalregelschar $\mathfrak{C}_2^2$ involutorisch. ${}^1F_1^1$ enthält nun die Leitschar jeder mit $\mathfrak{C}_1^2$ verbundenen Regelschar $\mathfrak{R}_1^2$, folglich wird durch den polaren Raum jeder mit der Fokalregelschar $\mathfrak{C}_1^2$ verbundenen Regelfläche R_1^2 die Kongruenz ${}^1F_1^1$ und die Fokalregelschar $\mathfrak{C}_2^2$ derart in sich selbst übergeführt, daß irgend zwei durch ${}^1F_1^1$ einander zugeordnete Strahlen von $\mathfrak{C}_2^2$ wieder in zugeordnete Strahlen dieser Regelschar übergehen. Nach **19.** sind die für R_1^2 paarweise zueinander polaren Strahlen von $\mathfrak{C}_2^2$ auch durch C_1^1 einander zugeordnet. Demnach verwandelt die durch C_1^1 in der Regelschar $\mathfrak{C}_2^2$ hervorgerufene Involution die durch ${}^1F_1^1$ hervorgerufene in sich selbst. — Bei einer hyperbolischen linearen Kongruenz C_1^1 sind nach **22.** die Fokalregelscharen elliptisch involutorisch und die bzw. mit ihnen verbundenen Kongruenzen ${}^1F_1^1$, ${}^2F_1^1$ elliptisch. Die elliptische lineare Kongruenz ${}^1F_1^1$ paart die Regelschar $\mathfrak{C}_2^2$, deren Leitschar $\mathfrak{C}_1^2$ ihr angehört, ebenfalls elliptisch involutorisch. Von diesen beiden durch C_1^1 und ${}^1F_1^1$ in $\mathfrak{C}_2^2$ hervorgerufenen elliptischen Strahleninvolutionen führt jede die andere nur dann in sich selbst über, wenn beide Involutionen identisch sind. Bei einer hyperbolischen linearen Kongruenz bedingen also ${}^1F_1^1$ in $\mathfrak{C}_2^2$ und ${}^2F_1^1$ in $\mathfrak{C}_1^2$ dieselbe elliptische Involution, wie C_1^1. — Bei einer elliptischen linearen Kongruenz C_1^1 ist nach **15.** die eine Fokalregelschar — etwa $\mathfrak{C}_1^2$ — hyperbolisch, die andere $\mathfrak{C}_2^2$ elliptisch involutorisch. Die mit $\mathfrak{C}_1^2$ verbundene lineare Kongruenz ${}^1F_1^1$ ist nach **22.** wiederum elliptisch, dagegen die mit $\mathfrak{C}_2^2$ verbundene ${}^2F_1^1$ hyperbolisch. Daß die elliptische lineare Kongruenz ${}^1F_1^1$ in $\mathfrak{C}_2^2$ dieselbe elliptische Involution, wie C_1^1, festlegt, ergibt sich auf gleiche Weise, wie bei der hyperbolischen linearen Kongruenz, und daß C_1^1 und die hyperbolische lineare Kongruenz ${}^2F_1^1$ in $\mathfrak{C}_1^2$ auch dieselbe hyperbolische Involution bestimmen, ist ohne weiteres zu erkennen. Die Doppelstrahlen der durch C_1^1 in $\mathfrak{C}_1^2$ hervorgerufenen hyperbolischen Involution sind ja die reellen Fokalachsen f', f'' der elliptischen Kongruenz C_1^1, und folglich nach **22.** die Leitgeraden der hyperbolischen Kongruenz ${}^2F_1^1$. Werden die linearen Kongruenzen ${}^1F_1^1$, ${}^2F_1^1$ die Fokalkongruenzen der linearen Kongruenz C_1^1 genannt, so ist somit nach **15.** dargetan:

Die Leitgeraden der Fokalkongruenzen ${}^1F_1^1$, ${}^2F_1^1$ einer linearen Kongruenz C_1^1 sind die Fokalachsen dieser Kongruenz. Durch die

zu $\mathfrak{C}_2^2$ bzw. $\mathfrak{C}_1^2$ gehörigen Fokalinvolutionen sind die Leitgeraden von ${}^1F_1^1$ bzw. ${}^2F_1^1$ bestimmt.

Der geschart involutorische Raum Γ, dessen Doppelstrahlen die lineare Kongruenz C_1^1 bilden, und folglich diese selbst, sind eindeutig gegeben, sobald außer einer in C_1^1 enthaltenen Regelschar II. Ordnung die Involution bekannt ist, die Γ in ihrer Leitschar hervorruft. Eine Regelschar des Fokalparaboloides einer linearen Kongruenz bestimmt also zusammen mit der ihrer Leitschar zugehörigen Fokalinvolution die mit jener Regelschar verbundene Fokalkongruenz.

24. Einer reellen Fokalachse f' einer elliptischen linearen Strahlenkongruenz C_1^1 ist durch jede orthogonale Regelschar $\mathfrak{R}^2$, welche mit ihrer hyperbolisch involutorischen Fokalregelschar $\mathfrak{C}_1^2$ verbunden ist, ein Strahl s von C_1^1 als Polare bezüglich der $\mathfrak{R}^2$ enthaltenden Fläche II. Grades R^2 zugewiesen. Nun ist f' von s durch je zwei durch C_1^1 einander zugeordnete Leitstrahlen von $\mathfrak{R}^2$ harmonisch getrennt, also auch durch die beiden einander zugeordneten Strahlen e_1, e_2, die die Leitschar von $\mathfrak{R}^2$ mit $\mathfrak{C}_1^2$ gemein hat. Diese aber trennen auch harmonisch f' von f'', folglich ist f'' mit s identisch. Die reellen Fokalachsen f', f'' sind somit reziproke Polaren für alle mit $\mathfrak{C}_1^2$ verbundenen orthogonalen Regelflächen II. Ordnung. Zwei reziproke Polaren für zwei Flächen eines F^2 Büschels sind es für alle seine Flächen, gleichgültig ob diese alle reell sind oder nicht. f', f'' erweisen sich hiernach auch als reziproke Polaren in den polaren Räumen mit imaginären Inzidenzflächen, die nach **21.** in dem mit $\mathfrak{C}_1^2$ verbundenen F^2 Büschel vorkommen. Da nun sowohl C_1^1 wie auch alle Flächen II. Grades, auf denen in C_1^1 enthaltene Regelscharen II. Ordnung liegen, in f' und f'' zirkulare Ebeneninvolutionen hervorrufen, so gilt letzteres auch von allen polaren Räumen dieses F^2 Büschels, und es kann somit der Satz ausgesprochen werden:

> Die reellen Fokalachsen f', f'' einer elliptischen linearen Kongruenz C_1^1 sind zueinander polare Fokalachsen in allen polaren Räumen, welche zu dem mit der hyperbolisch involutorischen Fokalregelschar von C_1^1 verbundenen Büschel orthogonaler Regelflächen gehören.

25. Eine Involution unter den Strahlen einer gleichseitigen parabolischen Regelschar $\mathfrak{P}_1^2$ ist unter anderm bestimmt, sobald dem unendlich fernen Regelstrahle c_1^2 der ihn rechtwinklig kreuzende c_1^1 zugeordnet wird, und sich zwei beliebige Regelstrahlen x_1^1, x_1^2 entsprechen. Sind — was nunmehr vorausgesetzt werden soll — die zugeordneten Strahlen x_1^1, x_1^2 die Achsen zweier projektiven Ebenenbüschel $[x_1^1]$, $[x_1^2]$, bei denen entsprechende Ebenen zueinander senkrecht stehen, so projizieren je zwei homologe Ebenen dieser projektiven Büschel zwei zugeordnete Strahlen einer Involution unter den Strahlen der Leitschar $\mathfrak{P}_2^2$ von $\mathfrak{P}_1^2$. Bei ihr

entspricht wiederum dem unendlich fernen Leitstrahle c_2^1 der ihn rechtwinklig kreuzende c_2^2. — Beide auf dem gleichseitigen Paraboloide P^2 gelegene Regelscharen $\mathfrak{P}_1^2$, $\mathfrak{P}_2^2$ sind somit jetzt involutorisch gepaart. Sie bestimmen folglich eine lineare Strahlenkongruenz P_1^1, für welche je zwei zugeordnete Strahlen dieser involutorischen Regelscharen einander zugeordnet sind. Da je zwei aufeinander senkrechte durch zwei zugeordnete Strahlen von P^2 gehende Ebenen zugeordnete Mittelebenen von P_1^1 sind, so ist P^2 das Fokalparaboloid der linearen Kongruenz P_1^1. Seine Scheitelebene $c_1^2 c_2^2$ ist die Hauptmittelebene, seine Hauptachse die Hauptsymmetrieachse und seine Scheitelstrahlen c_1^2, c_2^2 die Nebensymmetrieachsen von P_1^1. Kurz:

> Eine gleichseitige parabolische Regelschar, deren Strahlen derart involutorisch gepaart werden, daß ihrem unendlich fernen Strahle der ihn rechtwinklig kreuzende Regelstrahl zugeordnet wird, ist stets eine Fokalregelschar einer gewissen linearen Kongruenz. Eine elliptische lineare Kongruenz ist durch ihre Hauptsymmetrieachse und ihre beiden reellen Fokalachsen bestimmt.

Eine parabolische Involution der Strahlen einer gleichseitigen parabolischen Regelschar $\mathfrak{P}_1^2$, bei der alle Strahlen demjenigen Strahle zugeordnet sind, der den unendlich fernen Strahl von $\mathfrak{P}_1^2$ rechtwinklig kreuzt, ist die eine Fokalinvolution einer parabolischen linearen Kongruenz $^{\flat}P_1^1$. Die andere Fokalinvolution dieser linearen Kongruenz paart die Leitschar $\mathfrak{P}_2^2$ von $\mathfrak{P}_1^2$ derart, daß zueinander normale Strahlen von $\mathfrak{P}_2^2$ einander zugeordnet werden.

26. Die Strahleninvolutionen $[x_1^1, x_1^2 - \cdots]$, $[x_2^1, x_2^2 - \cdots]$, welche eine lineare Kongruenz C_1^1 bzw. in ihren Fokalregelscharen $\mathfrak{C}_1^2$, $\mathfrak{C}_2^2$ hervorruft, rufen auf jedem Kegelschnitte des Fokalparaboloides C^2 von C_1^1 und somit auch auf einer Hauptparabel π^2 der Fläche zwei Punktinvolutionen hervor. In jeder der beiden involutorischen Fokalregelscharen ist nun dem zugehörigen Scheitelstrahle von C^2 der ihn rechtwinklig kreuzende unendlich ferne Strahl zugeordnet, demnach liegen die Involutionszentren J_1, J_2 der Punktinvolutionen $[X_1^1, X_1^2 - \cdots]$, $[X_2^1, X_2^2 - \cdots]$, in denen bzw. die beiden involutorischen Fokalregelscharen $[x_1^1, x_1^2 - \cdots]$, $[x_2^1, x_2^2 - \cdots]$ die Hauptparabel π^2 schneiden, auf der mit der Hauptsymmetrieachse c_d von C_1^1 zusammenfallenden Achse von π^2. Zwei zueinander normale Ebenen ξ_1, ξ_2, welche bzw. zwei zugeordnete Strahlen x_1^1, x_1^2 der involutorischen Fokalregelschar $[x_1^1, x_1^2 - \cdots]$ projizieren, projizieren nach **15.** bzw. zugleich zwei zugeordnete Strahlen y_2^1, y_2^2 der andern involutorischen Fokalregelschar. Nun sind durch C_1^1 die Ebenen $x_1^1 y_2^1$, $x_1^2 y_2^2$ einander zugeordnet, ebenso die Ebenen $x_1^1 y_2^2$, $x_1^2 y_2^1$; sie gehen bzw. durch die Gegenseiten $X_1^1 Y_2^1$, $X_1^2 Y_2^2$ und $X_1^1 Y_2^2$, $X_1^2 Y_2^1$ des vollständigen Vierecks $X_1^1 X_1^2 Y_2^1 Y_2^2$, und somit schneiden zwei Paar Gegenseiten dieses Vierecks und folglich auch

das dritte Paar $X_1^1 X_1^2$, $Y_2^1 Y_2^2$ den Kongruenzstrahl c_d in Punktepaaren der durch C_1^1 auf ihm hervorgerufenen Involution. Die Schnittpunkte von $X_1^1 X_1^2$ und $Y_2^1 Y_2^2$ mit c_d sind aber die Involutionszentren J_1, J_2, diese sind also durch C_1^1 einander zugeordnet.

Geht insbesondere ξ_1 durch die Tangente x_1 von π^2 im Punkte X_1^1, so schneidet ξ_2 die Ebene π von π^2 in der durch den Punkt X_1^2 gehenden Normalen n_1^x zu x_1. Dem Punkte X_1^1 entspricht also als Punkt U_2^1 der Involution $[X_2^1, X_2^2 - \cdots]$ der Punkt U_2^2, in dem die aus X_1^2 auf die Tangente x_1 gefällte Senkrechte n_1^x die Parabel noch einmal schneidet. Ebenso entspricht dem Punkte X_1^2 als Punkt V_2^1 dieser Involution der Schnittpunkt V_2^2 von π^2 mit demjenigen Strahle n_2^x von X_1^1, der zur Tangente x_2 von π^2 im Punkte X_1^2 normal ist. Nun liegt der Schnittpunkt J_2 der Gegenseiten $X_1^1 U_2^2$, $X_1^2 V_2^2$ und der Schnittpunkt der Gegenseiten $X_1^2 U_2^2$, $X_1^1 V_2^2$ des π^2 eingeschriebenen einfachen Vierecks $X_1^1 U_2^2 X_1^2 V_2^2$ mit dem Schnittpunkte X der Tangenten x_1, x_2 in seinen Gegenpunkten X_1^1, X_1^2 auf einer Geraden. Sie ist, da $X_1^2 U_2^2$, $X_1^1 V_2^2$ bzw. mit den Höhenstrahlen n_1^x, n_2^x des Dreiecks $J_2 X_1^2 X_1^1$ zusammenfallen, identisch mit dem dritten zur Seite $X_1^1 X_1^2$ senkrechten Höhenstrahle n_3^x dieses Dreiecks. X ist aber der Pol dieser Seite bezüglich π^2, folglich sind $X_1^1 X_1^2$ und n_3^x konjugierte zueinander normale Strahlen bezüglich dieser Parabel und die bzw. auf ihnen gelegenen Involutionszentren J_1, J_2 zugeordnete Punkte der Brennpunktsinvolution von π^2. Kurz:

> Die involutorischen Fokalregelscharen einer linearen Kongruenz C_1^1 rufen auf einer Hauptparabel π^2 ihres Fokalparaboloides C^2 zu ihnen perspektive Punktinvolutionen hervor, deren Involutionszentren durch C_1^1 einander zugeordnet sind und ein Punktepaar der Fokalinvolution jener Hauptparabel bilden.

Der Brennpunkt der Hauptparabel π^2 hälftet den Abstand zweier zugeordneten Punkte ihrer Fokalinvolution, folglich auch die Strecke $J_1 J_2$. Bezeichnet d den Abstand dieses Brennpunktes vom Scheitelpunkte von π^2, so liegen bei einer hyperbolischen linearen Kongruenz die beiden durch ihre Fokalinvolutionen bestimmten Involutionszentren J_1, J_2 innerhalb π^2 auf der Achse dieser Parabel symmetrisch zum Brennpunkte und ihr Abstand $J_1 J_2$ ist $< 2d$. Ist der Abstand $J_1 J_2 = 2d$, so ist die vorliegende lineare Kongruenz parabolisch, ist er $> 2d$, elliptisch.

27. Eine elliptisch involutorische Fokalregelschar $[x_\varkappa^1, x_\varkappa^2 - \cdots]$ einer linearen Kongruenz C_1^1 schneidet eine Hauptparabel π^2 und den nicht zur Fokalregelschar gehörigen Scheitelstrahl c_λ ihres Fokalparaboloides C^2 bzw. in den zu ihr perspektiven elliptischen Punktinvolutionen $[X_\varkappa^1, X_\varkappa^2 - \cdots]$ und $[\mathfrak{X}_\varkappa^1, \mathfrak{X}_\varkappa^2 - \cdots]$. Das durch die Punktinvolution $[X_\varkappa^1, X_\varkappa^2 - \cdots]$ bestimmte Involutionszentrum $J_\varkappa$ liegt nach **26.** auf der

Achse c_d der Parabel π^2 im Inneren dieser Kurve, und die in $J_\varkappa$ auf der Achse errichtete Normale schneidet π^2 in zwei zugeordneten Punkten $P_\varkappa^1, P_\varkappa^2$ der Involution $[X_\varkappa^1, X_\varkappa^2 - \cdots]$, welche durch die beiden bzw. durch sie hindurchgehenden zugeordneten Strahlen $p_\varkappa^1, p_\varkappa^2$ der Fokalinvolution $[x_\varkappa^1, x_\varkappa^2 - \cdots]$ orthogonal in die Potenzpunkte $\mathfrak{P}_\varkappa^1, \mathfrak{P}_\varkappa^2$ der elliptischen Punktinvolution $[\mathfrak{X}_\varkappa^1, \mathfrak{X}_\varkappa^2 - \cdots]$ auf c_λ projiziert werden. Die Sehne $P_\varkappa^1 P_\varkappa^2$ von π^2 hat, wenn der Brennpunkt dieser Parabel und das Involutionszentrum $J_\varkappa$ vom Scheitelpunkte von π^2 bzw. um d und $i_\varkappa$ abstehen, die Länge $2\sqrt{4di_\varkappa}$, folglich hat die Potenz der elliptischen Punktinvolution $[\mathfrak{X}_\varkappa^1, \mathfrak{X}_\varkappa^2 - \cdots]$ den Wert $-2di_\varkappa$. Bei einer hyperbolischen linearen Kongruenz ist nun $i_\varkappa$ nach **26.** stets $< 2d$ und auch die zweite Fokalinvolution $[x_\lambda^1, x_\lambda^2 - \cdots]$ elliptisch, sie schneidet den Scheitelstrahl $c_\varkappa$ von C^2 in einer zu ihr perspektiven elliptischen Punktinvolution $[\mathfrak{X}_\lambda^1, \mathfrak{X}_\lambda^2 - \cdots]$, deren Potenz den Wert $-2d(2d - i_\varkappa)$ hat. — Alle elliptischen Fokalinvolutionen $[x_\varkappa^1, x_\varkappa^2 - \cdots]$, deren Potenzstrahlen auf dem Scheitelstrahle c_λ eine Strecke $< 4d$ begrenzen, bestimmen hyperbolische lineare Kongruenzen mit dem Fokalparaboloide C^2. Eine elliptische Fokalinvolution $[x_\varkappa^1, x_\varkappa^2 - \cdots]$, deren Potenzstrahlen auf c_λ eine Strecke $= 4d$ begrenzen, legt eine parabolische lineare Kongruenz mit diesem Fokalparaboloide fest, endlich eine elliptische Fokalinvolution, deren Potenzstrahlen auf c_λ eine Strecke $> 4d$ ausschneiden, eine zum gleichen Fokalparaboloide gehörige elliptische lineare Kongruenz. Die elliptische Fokalinvolution $[x_\varkappa^1, x_\varkappa^2 - \cdots]$ einer parabolischen linearen Kongruenz wird nach **16.** von den zueinander normalen Strahlen der Regelschar $\mathfrak{C}_\varkappa^2$ des Fokalparaboloides C^2 gebildet. Diese schneiden also den Scheitelstrahl c_λ von C^2 — wie ja auch sonst bekannt ist — in den Punktepaaren einer elliptischen Punktinvolution von der Potenz $-(2d)^2$. Schneidet die elliptische Fokalinvolution einer elliptischen linearen Kongruenz C_1^1 auf dem Scheitelstrahle c_λ des zugehörigen Fokalparaboloides C^2 eine zu ihr perspektive elliptische Punktinvolution mit der Potenz $-2di_\varkappa$ aus, so schneidet ihre hyperbolische Fokalinvolution den anderen Scheitelstrahl $c_\varkappa$ von C^2 in einer zu ihr perspektiven hyperbolischen Punktinvolution mit der Potenz $2d(i_\varkappa - 2d)$.

28. Ist $[\mathfrak{X}_\varkappa^1, \mathfrak{X}_\varkappa^2 - \cdots]$ die durch die Fokalinvolution $[x_\varkappa^1, x_\varkappa^2 - \cdots]$ von C_1^1 auf dem Scheitelstrahle c_λ von C^2 ausgeschnittene Punktinvolution, so gehen nach **17.** durch die zugeordneten Punkte $\mathfrak{X}_\varkappa^1, \mathfrak{X}_\varkappa^2$ die bzw. zu $x_\varkappa^2, x_\varkappa^1$ parallelen Kongruenzstrahlen x_1, x_2. Sie beschreiben die gleichseitige parabolische Regelschar $\mathfrak{P}_\lambda^2$, welche alle mit c_λ inzidenten Kongruenzstrahlen bilden, wenn $x_\varkappa^1, x_\varkappa^2$ die Fokalinvolution in der Fokalregelschar $\mathfrak{C}_\varkappa^2$ durchlaufen. In $\mathfrak{P}_\lambda^2$ kreuzt x_1 einen Regelstrahl n_2 rechtwinklig. n_2 wird gefunden, indem man zunächst in der Regelschar $\mathfrak{C}_\varkappa^2$

von C^2 den x_x^2 rechtwinklig kreuzenden Regelstrahl n_x^1 aufsucht und seinen Schnittpunkt $\mathfrak{N}_x^1$ mit c_λ bestimmt, n_2 ist dann inzident mit dem $\mathfrak{N}_x^1$ durch die Punktinvolution $[\mathfrak{X}_x^1, \mathfrak{X}_x^2 - \cdots]$ zugeordneten Punkt $\mathfrak{N}_x^2$. Die Potenz der elliptischen Involution, die alle sich rechtwinklig kreuzenden Regelstrahlen von $\mathfrak{C}_x^2$ auf c_λ ausschneiden, ist nach **27.** $-(2d)^2$, ferner sei $+d_x^2$ oder $-d_x^2$ die Potenz der Punktinvolution $[\mathfrak{X}_x^1, \mathfrak{X}_x^2 - \cdots]$, je nachdem die zu ihr perspektive Fokalinvolution $[x_x^1, x_x^2 - \cdots]$ hyperbolisch oder elliptisch ist, endlich sei $-d_x^2$ die gesuchte Potenz der Punktinvolution, in der alle sich rechtwinklig kreuzenden Regelstrahlen von $\mathfrak{P}_\lambda^2$ den Scheitelstrahl c_λ treffen. Dann gelten, wenn C wiederum der Scheitelpunkt des Fokalparaboloides C^2 ist, gemäß der soeben durchgeführten Konstruktion des x_1 rechtwinklig kreuzenden Strahles n_2 die Beziehungen:

$$C\mathfrak{X}_x^2 \cdot C\mathfrak{N}_x^1 = -(2d)^2,$$
$$C\mathfrak{N}_x^1 \cdot C\mathfrak{N}_x^2 = \pm d_x^2,$$
$$C\mathfrak{X}_x^1 \cdot C\mathfrak{N}_x^2 = -d_x^2.$$

Geht insbesondere x_1 durch einen Doppelpunkt bzw. einen Potenzpunkt der Punktinvolution $[\mathfrak{X}_x^1, \mathfrak{X}_x^2 - \cdots]$ — etwa durch den, der von C den Abstand $+d_x$ hat, so ist $C\mathfrak{X}_x^1 = d_x$ und $C\mathfrak{X}_x^2 = \pm d_x$, und es folgt:

$$\pm d_x \cdot C\mathfrak{N}_x^1 = -(2d)^2,$$
$$C\mathfrak{N}_x^1 \cdot C\mathfrak{N}_x^2 = \pm d_x^2,$$
$$d_x \cdot C\mathfrak{N}_x^2 = -d_x^2,$$

oder:

$$-\left(\frac{d_x^2}{2d}\right)^2 = -d_x^2.$$

$\frac{d_x^2}{2d}$ ist aber gleich dem absoluten Werte des Abstandes des Involutionszentrums J_x vom Scheitelpunkte C von C^2. Wird dieser absolute Wert durch $[J_x C]$ bezeichnet und ferner der absolute Wert des Abstandes der Potenzpunkte der elliptischen Punktinvolution, welche die sich rechtwinklig kreuzenden Strahlen von $\mathfrak{P}_\lambda^2$ auf der Nebensymmetrieachse c_λ bestimmen, durch $[2d_x]$, so ergibt sich die merkwürdige Beziehung:

$$[J_x C] = [d_x].$$

Die Strecke $[J_x C]$ auf c_λ von C aus nach beiden Seiten abgetragen, liefert also die Potenzpunkte der Involution, in der die mit c_λ inzidenten sich rechtwinklig kreuzenden Kongruenzstrahlen diese Nebensymmetrieachse von C_1^1 treffen.

29. Die Abstände der in **26.** bestimmten Involutionszentren J_1, J_2 vom Scheitelpunkte C der Hauptparabel π^2 sollen positiven Wert haben, wenn das betreffende Involutionszentrum innerhalb π^2, negativen, wenn es

außerhalb π^2 liegt. Somit wird die Potenz der von einer linearen Kongruenz C_1^1 auf ihrer Hauptsymmetrieachse c_d hervorgerufenen Involution, da J_1, J_2 nach **26.** durch C_1^1 einander zugeordnet sind, dargestellt durch das Produkt $CJ_1 \cdot CJ_2$. Die Involutionszentren J_1, J_2 sind aber, wie ebenfalls daselbst bewiesen wurde, auch symmetrisch zum Brennpunkte von π^2. Ist demnach J_1 das zu einer elliptischen Fokalinvolution einer linearen Kongruenz gehörige Involutionszentrum, $2d_1$ die Strecke, die ihre Potenzstrahlen auf dem Scheitelstrahle c_2 des Fokalparaboloides C^2 begrenzen, und d wiederum der Abstand des Brennpunktes vom Scheitelpunkte C von π^2, so läßt sich jenes Produkt auch in der Form:

$$\frac{d_1^2(4d^2 - d_1^2)}{4d^2}$$

oder nach **28.** in der Form:

$$d_1^2 - d_x^2 \quad \text{bzw.} \quad d_1^2 - CJ_1^2$$

darstellen.

Bei einer elliptischen linearen Kongruenz C_1^1 ist $2\sqrt{d_1^2 - d_x^2}$ gleich dem Abstande der beiden zur Hauptmittelebene γ parallelen und durch C_1^1 einander zugeordneten Ebenen, in denen die Potenzpunkte der durch die lineare Kongruenz auf ihren Strahlen hervorgerufenen elliptischen Punktinvolutionen liegen.

Die in einer linearen Strahlenkongruenz enthaltenen rotatorischen Regelscharen.

30. Nach **14.** ist das in der Hauptmittelebene γ einer linearen Kongruenz C_1^1 gelegene Punktfeld korrelativ zu dem unendlich fernen Strahlenfelde, wenn der Spur $\mathfrak{X}$ jedes Kongruenzstrahles x mit γ die Schnittgerade x_∞ der zu ihm senkrechten Mittelebene ξ mit der unendlich fernen Ebene zugewiesen wird. Alle durch eine Erzeugende e des Fokalparaboloides C^2 von C_1^1 gehenden Ebenen sind nun Mittelebenen von C_1^1. Dem Strahlenbüschel, in dem die unendlich ferne Ebene den Ebenenbüschel I. Ordnung $[e]$ schneidet, entspricht in γ eine zum Ebenenbüschel $[e]$ perspektive Punktreihe I. Ordnung [e]. Die durch die Punkte dieser Punktreihe gehenden Strahlen von C_1^1 sind normal zu den durch diese Punkte gehenden Ebenen des Büschels $[e]$, sie bilden folglich eine parabolische Regelschar $\mathfrak{E}^2$ II. Ordnung, deren unendlich ferne Leitgerade der e durch C_1^1 zugeordnete Strahl e_∞ ist. e_∞ kreuzt e rechtwinklig. Zur Regelschar $\mathfrak{E}^2$ gehört der mit der unendlich fernen Geraden von γ zusammenfallende Kongruenzstrahl c_∞, ferner, wenn c_λ der e schneidende Scheitelstrahl von C^2 ist, der zur Ebene ec_λ normale Kongruenzstrahl n_e, somit ist e die in der Ebene γ gelegene im Punkte $c_\lambda n_e$ auf c_λ errichtete Senkrechte. Die Ebene

$n_e c_\lambda$ enthält den unendlich fernen Leitstrahl, die Ebene γ den unendlich fernen Regelstrahl c_∞ der Regelschar $\mathfrak{E}^2$. Die Geraden $\mathfrak{e}$, n_e sind also, da sie auf der Schnittgeraden c_λ dieser beiden Ebenen normal sind, die Scheitelstrahlen und c_λ die Hauptachse des Paraboloides E^2, auf dem $\mathfrak{E}^2$ liegt. — Die Regelschar $\mathfrak{E}^2$ ist projektiv zum Ebenenbüschel $[e]$, wenn jedem ihrer Strahlen $a_e, b_e, c_e, n_e, \cdots$ die zu ihm senkrechte Ebene dieses Büschels zugewiesen wird, folglich ist $\mathfrak{E}^2$ auch projektiv zu der zum Ebenenbüschel $[e]$ perspektiven orthogonalen Regelschar $\mathfrak{R}_e^2$, welche alle mit e inzidenten Kongruenzstrahlen $a_r, b_r, c_r, \cdots$ bilden, sobald — was nunmehr vorausgesetzt wird — e mit keiner Fokalachse von C_1^1 zusammenfällt. Entsprechende Strahlen $a_e, a_r - b_e, b_r - c_e, c_r - \cdots$ der beiden projektiven Regelscharen kreuzen sich rechtwinklig.

Aus ihrem unendlich fernen Leitstrahle $\mathfrak{e}_\infty$ wird die Regelschar $\mathfrak{E}^2$ durch einen zu ihr perspektiven Ebenenbüschel $[\mathfrak{e}_\infty]$ projiziert, dessen Ebenen auf e senkrecht stehen. Dieser Ebenenbüschel ist durch die Regelschar $\mathfrak{E}^2$ projektiv auf die Regelschar $\mathfrak{R}_e^2$ bezogen und schneidet folglich e in einer zu $\mathfrak{R}_e^2$ projektiven Punktreihe. Es entspricht dabei der durch den Regelstrahl n_e von $\mathfrak{E}^2$, also auch zugleich durch c_λ gehenden Ebene der zu e parallele Kongruenzstrahl, und der unendlich fernen Ebene der im Punkte ec_λ auf c_λ normale, somit schneiden entsprechende Elemente der beiden projektiven Gebilde $[\mathfrak{e}_\infty]$ und $\mathfrak{R}_e^2$ die Erzeugende e in einer Punktinvolution. Sind also die Kongruenzstrahlen $a_r, b_r, c_r, \cdots$ mit einer Erzeugenden e des Fokalparaboloides C^2 inzident, und sind $a_e, b_e, c_e, \cdots$ die bzw. zu den Ebenen $a_r e, b_r e, c_r e, \cdots$ normalen Kongruenzstrahlen, so schneiden a_r und die durch a_e gehende Normalebene α von e, b_r und die durch b_e gehende Normalebene β von e usf. die Gerade e je in den Punktepaaren $A, A_\alpha - B, B_\beta - C, C_\gamma - \cdots$ einer Involution. Ihr Mittelpunkt ist der Schnittpunkt E der Erzeugenden e mit dem Scheitelstrahle c_λ von C^2. — Die Regelscharen $\mathfrak{E}^2$ und $\mathfrak{R}_e^2$ fallen zusammen, sobald die Erzeugende e von C^2 zu einem Scheitelstrahle dieser Fläche wird. Die bzw. auf den Ebenen $a_r e, b_r e, c_r e, \cdots$ normalen Kongruenzstrahlen $a_e, b_e, c_e, \cdots$ sind nämlich dann die $a_r, b_r, c_r, \cdots$ bzw. rechtwinklig kreuzenden Strahlen der gleichseitigen parabolischen Regelschar, welche alle mit jenem Scheitelstrahle inzidenten Kongruenzstrahlen bilden.

31. Unter der Voraussetzung, daß e weder mit einem Scheitelstrahle noch mit einer unendlich fernen Erzeugenden von C^2 zusammenfällt, ist die orthogonale Projektion der Regelschar $\mathfrak{E}^2$ des Paraboloides E^2 auf die durch c_λ gehende Normalebene ν von e ein parabolischer Strahlenbüschel ε^2. In ν liegt der zur Ebene ec_λ senkrechte Scheitelstrahl n_e von $\mathfrak{E}^2$ und die Scheitelebene $n_e\mathfrak{e}$ von E^2 ist zu c_λ normal, somit fällt c_λ mit der Achse und n_e mit dem Scheitelstrahle des parabolischen Büschels ε^2 zu-

sammen. Sein Brennpunkt ist, da seine Strahlen bzw. auf den Ebenen des Büschels $[c]$ senkrecht stehen, der Punkt $ec_\lambda = E$. — Sind auf ν die Geraden z_r^ν, z_e^ν die Orthogonalprojektionen der sich rechtwinklig kreuzenden Regelstrahlen z_r, z_e von $\mathfrak{R}_e^2$ und $\mathfrak{E}^2$, so geht z_r^ν durch den Brennpunkt E von ε^2 und steht in seinem Schnittpunkte Z_e mit dem Scheitelstrahle n_e von ε^2 auf z_e^ν senkrecht. z_r durchbohrt nun ν in einem Punkte Z_r' der Schnittkurve von $\mathfrak{R}_e^2$ und ν. Da diese nach **17.** ein Kreis ist, dessen Mittelpunkt auf der Achse des parabolischen Büschels ε^2 liegt, so besteht zwischen den Strecken $Z_r'E$ und Z_eE die Beziehung:

$$Z_r'E \cdot Z_eE = \text{Const.}$$

Der Durchstoßungspunkt Z_r' eines Strahles z_r von $\mathfrak{R}_e^2$ mit der Ebene ν und die Orthogonalprojektion des $\not\prec_r$ rechtwinklig kreuzenden Strahles z_e von $\mathfrak{E}^2$ auf ν sind folglich Pol und Polare in einem zirkular polaren Felde γ_ν^2 mit dem Mittelpunkte E. Nun schneiden aber nach **30.** die Strahlen $a_r, b_r, \cdots, z_r, \cdots$ von $\mathfrak{R}_e^2$ und die durch die Strahlen $a_e, b_e, \cdots, z_e, \cdots$ von $\mathfrak{E}^2$ gehenden zu e normalen Ebenen $\alpha, \beta, \gamma, \cdots, \zeta, \cdots$ die Gerade e je in den Punktepaaren $A, A_\alpha - B, B_\beta - \cdots - Z, Z_\zeta - \cdots$ einer Involution mit dem Mittelpunkte E, demnach folgt:

Die bzw. sich rechtwinklig kreuzenden Strahlen

$$a_r, a_e - b_r, b_e - \cdots - z_r, z_e - \cdots$$

der in der linearen Kongruenz enthaltenen Regelscharen $\mathfrak{R}_e^2$, $\mathfrak{E}^2$ sind reziproke Polaren in einem rotatorischen polaren Raume Γ_e^2. Seine Rotationsachse ist e, seine zu e senkrechte Symmetrieebene ist ν. Dieser polare Raum ruft in ν das zirkular polare Feld γ_ν^2 und auf e die Punktinvolution $A, A_\alpha - B, B_\beta - \cdots - Z, Z_\zeta - \cdots$ hervor, und er führt, da die in ihm enthaltenen reziproken Polaren

$$a_r, a_e - b_r, b_e - \cdots - z_r, z_e - \cdots$$

nicht einer und derselben Regelschar von C_1^1 angehören, die lineare Kongruenz C_1^1 in sich selbst über.

32. Dem unendlich fernen Punkte Z_r^∞ eines Regelstrahles z_r von $\mathfrak{R}_e^2$ ist durch C_1^1 der Treffpunkt Z_r' mit der Hauptmittelebene γ der Kongruenz zugeordnet, ferner im rotatorischen polaren Raum Γ_e^2 die mit dem Mittelpunkte E von Γ_e^2 und der Polare z_e von z_r inzidente Durchmesserebene z_eE. Nun durchbohrt z_e als der zur Mittelebene z_re von C_1^1 normale Kongruenzstrahl die Hauptmittelebene γ in einem Punkte der Schnittgeraden $Z_r'E$ dieser beiden Ebenen, folglich enthält die Durchmesserebene z_eE die Gerade $Z_r'E$ selbst, und Z_r' ist also auch dem unendlich fernen Punkte Z_r^∞ von z_r im rotatorischen polaren Raume Γ_e^2 konjugiert.

Dem unendlich fernen Punkte Z_e^∞ eines Regelstrahles z_e von $\mathfrak{E}^2$ ist

ferner durch C_1^1 der Schnittpunkt Z_e' von z_e mit der zu ihm normalen Ebene ez_r zugeordnet. Die Punkte Z_e', Z_e^∞ sind konjugiert für jede Regelfläche II. Grades, auf welcher eine in C_1^1 enthaltene Regelschar II. Ordnung liegt, insbesondere also auch für die durch die orthogonale Regelschar $\mathfrak{R}_e^2$ gehende Fläche R_e^2 und den Kreis z^2, den die mit z_e inzidente zu e normale Ebene ζ mit R_e^2 gemein hat. Der Mittelpunkt von z^2 liegt auf der mit ζ inzidenten in Z_e' auf z_e errichteten Normalen, sie schneidet die beiden Leitstrahlen e, e' von $\mathfrak{R}_e^2$, aus denen die Strahlen dieser Regelschar durch je zwei zueinander normale Ebenen projiziert werden, bzw. in den Punkten Z, Z'. Da die Ebene eZ' somit den z_e rechtwinklig kreuzenden Strahl z_r von $\mathfrak{R}_e^2$ enthält, so geht z_r durch Z'. Dieser Punkt liegt aber auf e', und e, e' sind nach **17.** durch C_1^1 einander zugeordnet, folglich schneidet z_r diese Strahlen in den durch C_1^1 einander zugeordneten Punkten $Z = z_r e$ und Z'. Ersterer Punkt ist nach **31.** der Pol der Ebene ζ im rotatorischen polaren Raume Γ_e^2, folglich sind Z, Z' nicht nur durch C_1^1 einander zugeordnet, sondern auch in Γ_e^2 einander konjugiert.

Die auf z_r durch C_1^1 und Γ_e^2 hervorgerufenen Punktinvolutionen haben also die beiden Punktepaare Z_r', Z_r^∞ und Z, Z' gemein und sind folglich identisch. Nur wenn z_r zu dem zu e bzw. e' parallelen Regelstrahle n_r bzw. n_r^1 von $\mathfrak{R}_e^2$ wird, gilt dieser Schluß nicht. Die Strahlen n_r, n_r^1 nehmen jedoch keine Ausnahmestellung ein, wie die folgende Untersuchung zeigt.

Auf einem weder mit n_r noch n_r^1 zusammenfallenden Strahle z_r von $\mathfrak{R}_e^2$ sei dem Punkte $z_r e = Z$ durch C_1^1 der Punkt Z' zugeordnet. Beide Punkte sind in Γ_e^2 konjugiert. Die Punkte Z, Z' liegen mit dem n_r rechtwinklig kreuzenden Regelstrahle n_e von $\mathfrak{E}^2$ in zwei durch C_1^1 einander zugeordneten Ebenen $n_e Z = \zeta_n$, $n_e Z' = \zeta_n'$. Nach **31.** ist nun Z in Γ_e^2 der Pol der durch z_e und Z' gehenden Normalebene ζ von e, und n_e die Polare von n_r, folglich fällt der Pol von ζ_n in den Punkt $n_r\zeta$. Die Ebenen ζ, ζ_n' schneiden sich nun in der durch Z' laufenden Parallelen zu n_e. Sie fällt, da Z' ein Punkt der e durch C_1^1 zugeordneten Geraden e' ist, in die e' enthaltende Normalebene von c_λ. In ihr liegt n_r, folglich ist der Pol $n_r\zeta$ von ζ_n ein Punkt von ζ_n', und demnach sind die durch C_1^1 einander zugeordneten Ebenen ζ_n, ζ_n' im rotatorischen polaren Raume Γ_e^2 konjugiert. Jede trifft n_r im Pole der anderen. Die beiden durch C_1^1 und Γ_e^2 einander zugeordneten Ebenen ζ_n, ζ_n' schneiden also den Kongruenzstrahl n_r in zwei durch C_1^1 einander zugeordneten und in Γ_e^2 konjugierten Punkten. Außer dem Mittelpunkte N_r' haben hiernach die beiden auf n_r durch C_1^1 und Γ_e^2 hervorgerufenen Involutionen noch ein Punktepaar gemein, sie sind folglich identisch.

n_r^1 ist der zu e' parallele Strahl von $\mathfrak{R}_e^2$, folglich ist die Ebene en_r^1

normal zu c_λ, also auch zur Hauptmittelebene γ. In γ liegt der unendlich ferne Kongruenzstrahl c_∞, er ist der n_r^1 rechtwinklig kreuzende Strahl von $\mathfrak{E}^2$. Die von c_∞ nach den Punkten Z, Z' gesandten Ebenen ζ_c, ζ_c' sind wiederum durch C_1^1 einander zugeordnet, und n_r^1 trifft als Polare von c_∞ in Γ_e^2 die Polarebene ζ von Z in dem ζ_c durch Γ_e^2 zugewiesenen Pole. Nun gehen die Hauptmittelebene γ und die zu e normale Symmetrieebene ν von Γ_e^2 durch c_λ. Zu γ bzw. ν ist die Ebene ζ_c' bzw. ζ parallel, sonach schneiden sich ζ_c' und ζ in einer zu c_λ parallelen Geraden. Sie enthält den auf e' gelegenen Punkt Z', und da die parallelen Geraden n_r^1 und e' mit c_λ inzident sind, so ist sie selbst mit n_r^1 inzident. Als Pol $n_r^1\zeta$ von ζ_c ergibt sich also ein Punkt von ζ_c'. Die durch C_1^1 einander zugeordneten Ebenen ζ_c, ζ_c' sind demnach zugleich in Γ_e^2 konjugiert. Jede schneidet n_r^1 im Pole der anderen, und diese Pole sind durch C_1^1 einander zugeordnet. Die beiden durch C_1^1 und Γ_e^2 auf n_r^1 hervorgerufenen Involutionen haben denselben Mittelpunkt E und, wie soeben gezeigt wurde, noch ein Punktepaar gemein, folglich fallen auch auf n_r^1 alle ihre Punktepaare zusammen. Das Ergebnis der Untersuchungen in dieser Nummer ist also:

> In allen Strahlen der orthogonalen Regelschar $\mathfrak{R}_e^2$ rufen C_1^1 und Γ_e^2 die nämlichen Punktinvolutionen, in allen Strahlen der zu $\mathfrak{R}_e^2$ in Γ_e^2 polaren parabolischen Regelschar $\mathfrak{E}^2$ die nämlichen Ebeneninvolutionen hervor.

33. Nach **32.** sind zwei mit einem Strahle z_r der Regelschar $\mathfrak{E}^2$ inzidente durch C_1^1 einander zugeordnete Ebenen α, α' auch in Γ_e^2 konjugiert und schneiden die Regelschar $\mathfrak{R}_e^2$ bzw. in den Kegelschnitten α^2, α'^2, deren Punkte ebenfalls paarweise durch C_1^1 einander zugeordnet und in Γ_e^2 konjugiert sind. Ein solches Punktepaar bilden die Pole $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$ der Ebenen α, α', sie werden aus α' bzw. α nach **31.** durch den z_e rechtwinklig kreuzenden Regelstrahl z_r von $\mathfrak{R}_e^2$ ausgeschnitten. Die Polare einer mit $\mathfrak{A}$ und α' inzidenten Geraden $\mathfrak{g}'$ sei in Γ_e^2 die mit $\mathfrak{A}'$ und α inzidente Gerade $\mathfrak{g}$. Auf $\mathfrak{g}'$ liegt außer $\mathfrak{A}$ noch ein Punkt $\mathfrak{G}'$ von α'^2, auf $\mathfrak{g}$ außer $\mathfrak{A}'$ der $\mathfrak{G}'$ in Γ_e^2 konjugierte und folglich auch durch C_1^1 zugeordnete Punkt $\mathfrak{G}$ von α^2. Die reziproken Polaren $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}'$ in Γ_e^2 sind demnach durch C_1^1 einander zugeordnet. — Die Strahlen von C_1^1 treffen die durch C_1^1 einander zugeordneten Ebenen α, α' in einander zugeordneten Punkten. Ein von z_e verschiedener Kongruenzstrahl x trifft also die Ebenen α, α' bzw. in den einander zugeordneten Punkten X, X' der bzw. durch $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}$ gehenden einander zugeordneten Geraden $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{x}'$. Diese sind aber auch reziproke Polaren in Γ_e^2, folglich sind die Treffpunkte von x mit α, α' durch C_1^1 einander zugeordnet und in Γ_e^2 konjugiert. Was von α, α' gilt, gilt für jedes andere Paar der sich in z_e schneidenden, durch C_1^1 einander zugeordneten und

folglich auch in Γ_e^2 konjugierten Ebenen, somit rufen Γ_e^2 und C_1^1 in jedem Strahle von C_1^1 identische Punktinvolutionen, und da C_1^1 nach **31.** durch Γ_e^2 in sich selbst übergeführt wird, auch identische Ebeneninvolutionen hervor. e kann nach **31.** jede im Endlichen gelegene Erzeugende des Fokalparaboloides C^2 mit Ausnahme seiner beiden Scheitelstrahlen sein. Jeder von diesen ist aber schon nach **7.** die Rotationsachse eines rotatorischen polaren Raumes, der C_1^1 derart in sich selbst überführt, daß die durch C_1^1 einander zugeordneten Punkte und Ebenen in ihm konjugiert sind. Sonach ist bewiesen:

Jede im Endlichen gelegene Erzeugende e des Fokalparaboloides C^2 ist die Rotationsachse eines rotatorischen polaren Raumes Γ_e^2, der C_1^1 in sich selbst überführt, und in dem die durch C_1^1 einander zugeordneten Punkte und Ebenen konjugiert sind.

Dieser rotatorische polare Raum artet aus, wenn die Kongruenz C_1^1 elliptisch ist, und e mit einer der beiden reellen Fokalachsen f', f'' zusammenfällt. Seine Inzidenzfläche ist dann die betreffende Fokalachse selbst, diese ist in ihm zu jedem anderen Strahle von C_1^1 polar.

34. Eine hyperbolische lineare Kongruenz hat keine, eine elliptische zwei reelle Strahlen — die beiden Fokalachsen f', f'' —, in denen sie zirkulare Ebeneninvolutionen hervorruft. Diese enthält also zwei, jene keine Strahlen, die nach **33.** die Rotationsachsen rotatorischer polarer Räume Γ_e^2 sind.

Ist eine nicht zu einer linearen Kongruenz C_1^1 gehörige Gerade e die Rotationsachse eines rotatorischen polaren Raumes Γ_e^2, der C_1^1 derart in sich überführt, daß die durch C_1^1 einander zugeordneten Punkte und Ebenen in ihm konjugiert sind, so ist in Γ_e^2 die Polare eines mit e inzidenten Kongruenzstrahles x_r ein Kongruenzstrahl x_r', der normal zur Ebene $x_r e$ steht. Dem Schnittpunkte von x_r' mit der Ebene $x_r e$ ist in Γ_e^2 der unendlich ferne Punkt von x_r' konjugiert und durch C_1^1 derselbe Punkt zugeordnet, die Ebene $x_r e$ ist folglich nach **13.** die auf x_r' senkrechte Mittelebene von C_1^1. Jede durch e gehende Ebene enthält einen mit e inzidenten Kongruenzstrahl, demnach ist jede solche Ebene eine Mittelebene von C_1^1, und folglich e eine Erzeugende des gleichseitigen Fokalparaboloides C^2 von C_1^1. Kurz:

Außer den im Endlichen gelegenen Erzeugenden des Fokalparaboloides C^2 einer linearen Kongruenz C_1^1 gibt es keine weiteren Geraden, welche Rotationsachsen rotatorischer polarer Räume Γ_e^2 sind, die C_1^1 derart in sich überführen, daß die durch C_1^1 einander zugeordneten Punkte in den polaren Räumen konjugiert sind.

35. Der durch die Erzeugende e von C^2 nach **33.** bestimmte rotatorische polare Raum Γ_e^2 ruft auf dem zu e senkrechten Scheitelstrahle c_1

von C^2 eine Punktinvolution hervor, deren Mittelpunkt mit dem Mittelpunkte $ec_\lambda = E$ von Γ_e^2 zusammenfällt. Nun sind der zu e parallele Kongruenzstrahl n_r und der ihn rechtwinklig kreuzende zur Regelschar $\mathfrak{E}^2$ gehörige Kongruenzstrahl n_e nach **31.** reziproke Polaren in Γ_e^2, folglich schneiden n_r, n_e auf c_λ ein Punktepaar N_r, N_e dieser Involution aus. Für die Abstände der Punkte N_r, N_e vom Scheitelpunkte C von C^2 gilt nach **28.** die Beziehung:

$$(\alpha) \qquad CN_r \cdot CN_e = -\left(\frac{d_x^2}{2d}\right)^2.$$

Durch N_r geht nach **17.** der e durch C_1^1 zugeordnete Strahl e'. Je nachdem die Regelschar $\mathfrak{E}_x^2$ von C^2, zu der e, e' gehören, durch C_1^1 elliptisch oder hyperbolisch involutorisch gepaart wird, besteht zwischen den Abständen der Punkte N_r und E vom Scheitelpunkte C wiederum nach **28.** die Gleichung:

$$(\beta_1) \qquad CN_r \cdot CE = -d_x^2,$$

bzw.

$$(\beta_2) \qquad CN_r \cdot CE = +d_x^2.$$

Bei einer hyperbolischen linearen Kongruenz sind nach **15.** beide Fokalinvolutionen elliptisch, folglich gelten für sie die Gleichungen (α) und (β_1). Die Punkte N_e und E sind also auf c_λ durch C vom Punkte N_r getrennt. Bei einer hyperbolischen linearen Kongruenz ist ferner für beide Fokalinvolutionen nach **27.**:

$$d_x < 2d.$$

Demnach folgt aus dem sich aus (α) und (β_1) ergebenden Ausdrucke:

$$(\gamma) \qquad \frac{CN_r}{CE} = \left(\frac{d_x}{2d}\right)^2,$$

daß bei ihr N_e die Punkte C und E trennt, und C also innerhalb der endlichen Strecke $N_r N_e$ liegt. Die in Γ_e^2 konjugierten Punkte N_r, N_e und der Mittelpunkt E dieses polaren Raumes bestimmen somit auf c_λ eine hyperbolische Punktinvolution, d. h. Γ_e^2 hat eine reelle Inzidenzfläche. Für den Fall, daß e mit einer Nebensymmetrieachse der hyperbolischen linearen Kongruenz zusammenfällt, ist der Beweis hierfür schon in **7.** erbracht worden. Kurz es gilt:

> Jede im Endlichen gelegene Erzeugende e des Fokalparaboloides einer hyperbolischen linearen Kongruenz ist die Rotationsachse eines rotatorischen polaren Raumes Γ_e^2 mit reeller Inzidenzfläche.

Bei einer elliptischen linearen Kongruenz ist nach **15.** nur die eine Fokalinvolution — etwa die, welche die Fokalregelschar $\mathfrak{E}_1^2$ paart —

elliptisch. Gehört demnach e zu dieser Regelschar, so trennt nach (α) und (β_1) der Scheitelpunkt C von C^2 wiederum N_r von N_e und E. Für die elliptische Fokalinvolution der vorliegenden elliptischen Kongruenz ist aber nach **27.**:

$$d_2 > 2d.$$

Somit liegt nach (γ) der Punkt E innerhalb der endlichen Strecke N_eC und also auch innerhalb der endlichen Strecke N_rN_e. Der zu e gehörige rotatorische polare Raum Γ_e^2 hat demnach hier eine imaginäre Inzidenzfläche. Eine solche gehört nach **7.** ebenfalls zu dem in $\mathfrak{C}_1^2$ enthaltenen Scheitelstrahle c_1 des Fokalparaboloides C^2. Folglich ist dargetan:

Die im Endlichen gelegenen Strahlen der elliptisch involutorischen Fokalregelschar einer elliptischen linearen Kongruenz sind die Rotationsachsen rotatorischer polarer Räume Γ_e^2 mit imaginären Inzidenzflächen.

Da die Fokalregelschar $\mathfrak{C}_1^2$ der vorliegenden elliptischen linearen Kongruenz durch letztere elliptisch involutorisch gepaart wird, so muß die involutorische Paarung der zweiten Fokalregelschar $\mathfrak{C}_2^2$ hyperbolisch sein. Jene elliptische Fokalinvolution kann derart bestimmt werden, daß diese hyperbolische auf dem Scheitelstrahle c_2 des Fokalparaboloides C^2 eine hyperbolische Punktinvolution ausschneidet, deren Potenz $+ d_1^2$ irgend einen vorgeschriebenen positiven Wert annimmt. Für die Beziehungen zwischen den drei Punkten N_r, N_e und E sind daher nur die Gleichungen (α) und (β_2) zu berücksichtigen. Nach ihnen liegt E innerhalb oder außerhalb der endlichen Strecke N_eN_r, je nachdem E auf c_1 innerhalb oder außerhalb der Strecke liegt, die den Abstand der reellen Fokalachsen f', f'' der elliptischen linearen Kongruenz mißt. Mit Rücksicht auf **7.** ist hiernach bewiesen:

Paart eine elliptische lineare Kongruenz die Regelschar $\mathfrak{C}_2^2$ ihres Fokalparaboloides C^2 hyperbolisch, so zerfallen die Strahlen e von $\mathfrak{C}_2^2$ in solche, welche Rotationsachsen rotatorischer polarer Räume Γ_e^2 mit imaginären, und in solche, welche Rotationsachsen rotatorischer polarer Räume Γ_e^2 mit reellen Inzidenzflächen sind. Ein Strahl e von $\mathfrak{C}_2^2$ ist die Rotationsachse eines polaren Raumes Γ_e^2 mit imaginärer Inzidenzfläche, sobald er in den von den Fokalachsen begrenzten Teil von $\mathfrak{C}_2^2$ fällt, der den Scheitelstrahl c_2 enthält. Ist e außerhalb dieses Teiles gelegen, so hat der zugehörige polare Raum Γ_e^2 eine reelle Inzidenzfläche. Ist e eine der beiden Fokalachsen, so artet die Inzidenzfläche nach **33.** in diese Fokalachse selbst aus.

Bei einer hyperbolischen linearen Kongruenz läßt sich der Nachweis, daß jede im Endlichen gelegene Erzeugende e ihres Fokalparaboloides C^2 die Rotationsachse eines rotatorischen polaren Raumes Γ_e^2 mit reeller

Inzidenzfläche ist, auch auf folgende einfache und anschauliche Weise führen:

Die Punkte der beiden Leitgeraden u, v einer hyperbolischen linearen Kongruenz C_1^1 sind durch diese sich selbst zugeordnet. Hat also ein polarer Raum die Eigenschaft, daß er C_1^1 in sich selbst überführt, und dabei die durch C_1^1 einander zugeordneten Punkte in ihm konjugiert sind, so muß dieser Raum eine reelle Inzidenzfläche haben, auf der u, v liegen. Diese Inzidenzfläche ist somit eine Regelfläche II. Grades, deren eine Regelschar aus Strahlen von C_1^1 besteht. Jede im Endlichen gelegene Erzeugende e des Fokalparaboloides C^2 einer hyperbolischen linearen Kongruenz ist nun nach **33.** die Rotationsachse eines rotatorischen polaren Raumes Γ_e^2, der C_1^1 derart in sich selbst überführt, daß die durch C_1^1 einander zugeordneten Punkte in ihm konjugiert sind. Folglich ist die Inzidenzfläche dieses rotatorischen polaren Raumes reell und zwar ein Rotationshyperboloid, dessen eine Regelschar in C_1^1 enthalten ist. Sie wird von den Leitgeraden u, v von C_1^1 beschrieben, sobald diese um e rotieren. Das Fokalparaboloid einer hyperbolischen linearen Kongruenz ist somit der Ort aller Punkte, die von ihren Leitgeraden u, v gleichen Abstand haben.*)

Konfokale lineare Strahlenkongruenzen.

36. Eine gleichseitige parabolische Regelschar läßt sich auf ∞^1 Weise derart involutorisch paaren, daß ihr unendlich ferner Strahl und der ihn rechtwinklig kreuzende einander zugeordnet bleiben. Nach **25.** kann demnach ein gleichseitiges hyperbolisches Paraboloid C^2 als der Träger der Fokalinvolutionen von ∞^1 linearen Strahlenkongruenzen angesehen werden, unter denen zwei parabolische sind. Diese ∞^1 linearen Strahlenkongruenzen sollen konfokal heißen. Die Mittelebenen konfokaler linearer Kongruenzen fallen zusammen, sie sind die Tangentialebenen ihres gemeinsamen Fokalparaboloides C^2.

Eine im Endlichen gelegene Tangentialebene τ von C^2, die keinen Scheitelstrahl der Fläche enthält, schneidet die zu ihr normalen Tangentialebenen in den Strahlen eines parabolischen Strahlenbüschels τ^2. Nun trifft ein Strahl s von τ^2, der nicht auf C^2 liegt, außer dem in τ gelegenen Regelstrahle r_1 und Leitstrahle l_2 noch einen Regelstrahl r_1' und einen Leitstrahl l_2' von C^2. Demnach bilden die zur Regel- bzw. Leitschar von C^2 gehörigen Scheitelstrahlen c_1, c_2 und die sie bzw. rechtwinklig kreuzenden Geraden $c_1'^{\infty}$, $c_2'^{\infty}$ mit den Regelstrahlen r_1, r_1' und den Leit-

*) Schröter, Über ein einfaches Hyperboloid von besonderer Art. Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 85 (1877), S. 30, N. 3.

strahlen l_2, l_2' zwei Strahlenpaare r_1, $r_1' - c_1$, $c_1'^{\infty}$ der einen und zwei Strahlenpaare l_2, $l_2' - c_2$, $c_2'^{\infty}$ der andern Fokalinvolution einer linearen Strahlenkongruenz. Sie wird parabolisch, wenn s einen der Scheitelstrahlen schneidet. Durchläuft s den parabolischen Strahlenbüschel τ^2, so durchläuft die durch s gehende lineare Kongruenz alle konfokalen Strahlenkongruenzen, deren Fokalparaboloid C^2 ist.

37. Zwei lineare Strahlenkongruenzen G_1^1, H_1^1 mit demselben Fokalparaboloide C^2 haben zur Hauptsymmetrieachse seine Hauptachse c_d. Sie ist zugleich die Hauptsymmetrieachse der Hauptachsenzylindroide G^3, H^3 von G_1^1, H_1^1, folglich laufen die in einer beliebigen Ebene ε des Ebenenbüschels $[c_d]$ gelegenen Regelstrahlen e_g, e_h beider Zylindroide parallel. Die e_g, e_h bzw. schneidenden Strahlen von G_1^1, H_1^1 bilden je eine gleichseitige parabolische Regelschar. In jeder dieser beiden Regelscharen gibt es zu einer e_g und somit auch e_h rechtwinklig kreuzenden Geraden x einen zu x parallelen Regelstrahl x_g bzw. x_h. Die auf x_g, x_h bzw. senkrechten, also zueinander parallelen Mittelebenen ξ_g, ξ_h der Kongruenzen G_1^1, H_1^1 gehören nach der Voraussetzung zu den Tangentialebenen von C^2. Zwei eigentliche Tangentialebenen eines Paraboloides können aber nicht parallel laufen, folglich müssen ξ_h und ξ_g identisch sein. Die Schnittgerade von ξ_g mit der gemeinsamen Hauptmittelebene γ der Kongruenzen G_1^1, H_1^1 läuft nun parallel zu e_g, und alle in ihren Punkten auf ξ_g errichteten Normalen liegen in einer durch e_g gehenden Ebene. In dieser Ebene liegt aber auch der Strahl e_h, und da er zusammen mit e_g in ε liegt, ist er mit e_g identisch. Zueinander parallele Regelstrahlen e_g, e_h der Zylindroide G^3, H^3 fallen also zusammen, folglich auch diese selbst. D. h.:

> Konfokale lineare Strahlenkongruenzen haben dasselbe Hauptachsenzylindroid C^3. Jede Schnittgerade zweier zueinander senkrechten Tangentialebenen des gemeinsamen Fokalparaboloides C^2 gehört zu einer der konfokalen linearen Kongruenzen. Werden auf den Tangentialebenen eines gleichseitigen Paraboloides C^2 in ihren Schnittgeraden mit seiner Scheitelebene Normalebenen errichtet, so umhüllen diese Ebenen ein Zylindroid C^3. Die Scheitelstrahlen von C^2 sind die Nebensymmetrieachsen von C^3 und die Hauptachse jener Fläche ist die Hauptsymmetrieachse dieser. Das Zylindroid C^3 heiße mit dem gleichseitigen Paraboloide C^2 orthogonal verknüpft.

38. Sind umgekehrt M_1^1, N_1^1 zwei lineare Kongruenzen mit demselben Hauptachsenzylindroide C^3, so wird nach **9.** ein beliebiger Regelstrahl a seiner Regelschar in jedem seiner Punkte nur von je einem Strahle beider Kongruenzen geschnitten. Die mit a inzidenten Strahlen von M_1^1, N_1^1 sind normal zu a und bilden je eine gleichseitige parabolische Regelschar,

folglich enthält jede dieser Regelscharen einen Strahl l_m bzw. l_n, der zu einem a senkrecht kreuzenden Strahle l parallel läuft. Da die Ebene $l_m l_n a$ die gemeinsame Hauptmittelebene beider Kongruenzen in einer zu a parallelen, also zu l_m und l_n orthogonalen Geraden trifft, so fallen die zu l_m bzw. l_n senkrechten Mittelebenen λ_μ, λ_ν zusammen. Die von den Mittelebenen beider Kongruenzen umhüllten gleichseitigen Paraboloide haben nun die Hauptsymmetrieachse c_d des Zylindroides C^3 zur Hauptachse und seine Nebensymmetrieachsen c_1, c_2 zu Scheitelstrahlen, ferner liegen auf ihnen auch die beiden in λ_μ enthaltenen auf c_1 bzw. c_2 senkrecht stehenden Strahlen. Somit sind die beiden Paraboloide identisch, und es gilt:

Lineare Strahlenkongruenzen mit demselben Hauptachsenzylindroide C^3 sind konfokal. Jeder Strahl einer linearen Strahlenkongruenz mit dem Hauptachsenzylindroide C^3 ist auch eine Schnittgerade zweier zueinander normalen Tangentialebenen des gemeinsamen Fokalparaboloides C^2. Werden auf den Tangentialebenen eines Zylindroides C^3 in ihren Schnittgeraden mit der Ebene seiner Nebensymmetrieachsen Normalebenen errichtet, so umhüllen sie ein gleichseitiges Paraboloid C'^2. Die Nebensymmetrieachsen des Zylindroides sind die Scheitelstrahlen, seine Hauptsymmetrieachse die Hauptachse des Paraboloides. Das gleichseitige Paraboloid C^2 heiße mit dem Zylindroide C^3 orthogonal verknüpft.

Mit Rücksicht auf **37.** folgt:

Das gleichseitige Paraboloid C'^2 und das Zylindroid C^3 sind jedes mit dem andern orthogonal verknüpft.

Ist H_1^1 eine zum Hauptachsenzylindroid C^3 gehörige hyperbolische lineare Strahlenkongruenz, so sind nach **10.** ihre beiden Leitgeraden zwei Regelstrahlen u, v von C^3, die an den Nebensymmetrieachsen c_1, c_2 dieser Fläche ineinander gespiegelt werden. Die durch H_1^1 hervorgerufenen Fokalinvolutionen sind nun aber nach **15.** elliptisch, somit schneiden u, v das zugehörige Fokalparaboloid in zwei Paaren konjugiert imaginärer Punkte.

Abgesehen von den beiden Flächen C^2 und C^3 gemeinsamen Regelstrahlen c_1, c_2 trifft also kein Regelstrahl des Zylindroides C^3 das mit ihm orthogonal verknüpfte gleichseitige Paraboloid C'^2 in reellen Punkten.

39. Konfokale lineare Kongruenzen haben nach **37.** dasselbe Hauptachsenzylindroid C^3 und bilden also nach **11.** einen quadratischen Komplex Γ^2. Dieser Komplex ist, wie aus **37.** hervorgeht, auch der Ort der Schnittgeraden zueinander rechtwinkliger Tangentialebenen des gemeinsamen Fokalparaboloides C^2. Nach **15.** führt aber jede lineare

Kongruenz ihr Fokalparaboloid in sich selbst über, somit gilt auch umgekehrt*):

Konfokale lineare Kongruenzen, und also auch der von ihnen gebildete quadratische Komplex Γ^2, sind autopolar für ihr gemeinsames Fokalparaboloid C^2.

Die Leitgeraden der für C^2 autopolaren hyperbolischen linearen Kongruenzen sind nun für diese Fläche zueinander polar, folglich auch die Leitgeraden der hyperbolischen linearen Kongruenzen mit dem Fokalparaboloide C^2. Diese Leitgeraden fallen aber nach **10.** mit je zwei Regelstrahlen von C^3 zusammen, die bzw. an den Nebensymmetrieachsen von C^3 ineinander gespiegelt werden, somit sind solche Regelstrahlen paarweise reziproke Polaren für C^2. Kurz:

Das Hauptachsenzylindroid C^3 konfokaler linearer Kongruenzen wird durch den polaren Raum ihres Fokalparaboloides C^2 derart in sich selbst übergeführt, daß je zwei seiner Regelstrahlen, die an seinen Nebensymmetrieachsen ineinander gespiegelt werden, für C^2 zueinander polar sind.**) Reziproke Polaren für C^2 sind auch die Hauptsymmetrieachse c_d und die einfache Leitgerade c_∞ von C^3.

Die in bezug auf C^2 zueinander polaren Regelstrahlen von C^3 schneiden c_∞ in den Punktepaaren derjenigen Involution, die C^2 auf dieser Geraden hervorruft, somit wird die Regelschar von C^3 selbst durch jene Strahlenpaare involutorisch gepaart. Diese hyperbolische Involution der Regelstrahlen von C^3 ist schon in **10.** näher besprochen worden.

Zu den für C^2 zueinander polaren Regelstrahlen von C^3 gehören die beiden Kuspidalstrahlen c', c'' von C^3. Jeder von ihnen ist inzident mit einer Symmetrieebene von C^2 und nach **11.** mit den zu dieser Ebene normalen Strahlen von Γ^2. In den zu einer Symmetrieebene von C^2 normalen Strahlen von Γ^2 schneiden sich aber je zwei zueinander normale Tangentialebenen von C^2, deren Berührungspunkte in dieser Symmetrieebene liegen, folglich ist der mit dieser Symmetrieebene inzidente Kuspidalstrahl die Leitgerade der in ihr enthaltenen Hauptparabel von C^2. Die Leitgerade der einen Hauptparabel eines gleichseitigen Paraboloides ist aber mit dem Brennpunkte der andern inzident, demnach ist gezeigt:

Die Normalen, welche auf den Symmetrieebenen eines gleichseitigen Paraboloides C^2 in den Brennpunkten ihrer Hauptparabeln

*) v. Staudt, Beiträge zur Geometrie der Lage. Erstes Heft, Nürnberg 1856, S. 71, N. 109.

**) Schröter, Ueber ein einfaches Hyperboloid von besonderer Art, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 85 (1877), S. 32, N. 4.

errichtet werden, fallen mit den Kuspidalstrahlen des mit C^2 orthogonal verknüpften Zylindroides C^3 zusammen.*)

40. Ist δ eine die Hauptachse des gleichseitigen Paraboloides C^2 enthaltende Ebene, die durch keinen Scheitelstrahl der Fläche geht, so bilden die zu δ normalen Tangentialebenen von C^2 einen parabolischen Ebenenzylinder Δ^2. Die Schnittgeraden zueinander normaler Ebenen von Δ^2 liegen auf seiner Leitebene λ, und da sie zu dem durch C^2 bestimmten quadratischen Komplexe Γ^2 gehören, so sind sie nach **11.** mit dem in δ gelegenen Regelstrahle u_1 des mit C^2 orthogonal verknüpften Zylindroides C^3 inzident. u_1 ergibt sich folglich als die Schnittgerade $\delta\lambda$. Nun haben Δ^2 und C^2 dieselbe Scheitelebene, somit sendet Δ^2 seine Symmetrieebene und seine Fokalachse f durch die Hauptachse c_d von C^2. Die Fokalachse f steht als Parallele zu λ senkrecht zu c_d. Der Scheitelpunkt von C^2 hälftet aber den Abstand des Strahles f von der Ebene λ, also auch den Abstand der Strahlen u_1, f. Der Strahl f schneidet hiernach die Hauptsymmetrieachse c_d von C^3 in einem Punkte, durch den nach **5.** der u_1 rechtwinklig kreuzende Regelstrahl v_2 von C^3 geht. Mit diesem Regelstrahle fällt aber f zusammen, da f zu δ senkrecht ist und folglich den mit δ inzidenten Regelstrahl u_1 von C^3 rechtwinklig kreuzt. Somit gilt der Satz:

> Die Fokalachsen eines gleichseitigen Paraboloides C^2, die mit seiner Hauptachse inzident sind, bilden die Regelschar des mit C^2 orthogonal verknüpften Zylindroides C^3.*)

Hieraus folgt mit Rücksicht auf **39.**:

> Die Leitgeraden aller konfokalen hyperbolischen linearen Kongruenzen sind zueinander polare Fokalachsen ihres Fokalparaboloides.

Zwei zueinander normale Ebenen ξ, η eines Regelstrahles u von C^3 schneiden demnach den ihm durch C^2 als Polare zugewiesenen Regelstrahl v von C^3 wechselweise in ihren Polen X, Y bezüglich C^2. Die in ξ gelegenen Strahlen des quadratischen Komplexes Γ^2 bilden nun einen Strahlenbüschel mit dem Mittelpunkte Y und einen Büschel paralleler zu u normaler Strahlen. Beide Strahlenbüschel werden, da Γ^2 nach **39.** für C^2 autopolar ist, durch den polaren Raum von C^2 in die beiden in Γ^2 enthaltenen Strahlenbüschel I. Ordnung mit dem Mittelpunkte X übergeführt. Der eine liegt in η, der andere in der in X auf v normalen Ebene.

41. Werden die Regelstrahlen u_2, v_2 von C^3 an den Nebensymmetrieachsen der Fläche ineinander gespiegelt, so wird nach **40.** in v_2 durch C^2 eine zirkulare Ebeneninvolution hervorgerufen. In ihr gibt es ein Ebenenpaar ξ, η, dessen Winkel $\xi\eta$ durch die Ebene $u_2 c_d$ d. h. durch

*) Schröter, Ueber ein einfaches Hyperboloid von besonderer Art. Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 85 (1877), S. 39, N. 7b.

die Verbindungsebene des Regelstrahles u_2 mit der Hauptsymmetrieachse c_d von C^3 gehälftet wird. ξ, η begrenzen auf dem v_2 rechtwinklig kreuzenden Regelstrahle u_1 von C^3 eine Strecke, die viermal so groß ist wie der Abstand a_u des Punktes $u_1 c_d$ vom Schnittpunkte der Nebensymmetrieachsen von C^3. Auf dem mit u_1 inzidenten Regelstrahle u_2 schneiden demnach ξ, η eine Strecke von der Größe $\frac{4a_u}{\cos(u_1 u_2)}$ aus. Nun ist aber nach **5.** $a_{c'} \cos(u_1 u_2) = a_u$, folglich hat diese Strecke den konstanten Wert $4a_{c'}$. D. h.:

Auf allen Regelstrahlen eines Zylindroides C^3 ruft das mit ihm orthogonal verknüpfte gleichseitige Paraboloid C^2 kongruente elliptische Punktinvolutionen hervor. Ihre Potenz ist gleich $-(2a_{c'})^2$, also gleich dem negativen Quadrate des Abstandes der Brennpunkte der beiden Hauptparabeln von C^2.*)

42. Zueinander normale Tangentialebenen der Strahlenkegel, welche C^2 aus einem beliebigen außerhalb der Fläche gelegenen Punkt X umschrieben werden können, schneiden sich in den Strahlen des von X ausgehenden Komplexkegels von Γ^2. Der von X ausstrahlende Komplexkegel ist also der Leitkegel des C^2 vom Punkte X aus umschriebenen Kegels. Er zerfällt, wenn X ein unendlich ferner Punkt außerhalb C^2 ist, nach **11.** in einen unendlich fernen Strahlenbüschel und in einen Parallelstrahlenbüschel in der Leitebene des parabolischen Strahlenzylinders, der aus dem betreffenden unendlich fernen Punkte C^2 umschrieben werden kann. Der Leitkegel zerfällt ferner in zwei Leitstrahlenbüschel I. Ordnung für einen im Endlichen gelegenen Punkt X des mit C^2 orthogonal verknüpften Zylindroides. In anderen Worten:

Die Mittelpunkte aller einem gleichseitigen Paraboloide C^2 umschriebenen Kegel des Hachette liegen auf dem mit C^2 orthogonal verknüpften Zylindroide.

Alle C^2 umschriebenen Kegel des Hachette, deren Mittelpunkte auf einem Regelstrahle u_1 von C^3 liegen, senden je eine Leitebene durch den Regelstrahl v_1 von C^3, in den u_1 durch die Nebensymmetrieachsen von C^3 gespiegelt wird. u_1, v_1 sind aber nach **40.** zueinander polare Fokalachsen von C^2, folglich liegen die Pole dieser durch v_1 gehenden Leitebenen auf u_1. Der Regelstrahl u_1 von C^3 ist also eine gemeinsame Fokalachse aller dem Paraboloide C^2 aus den Punkten von u_1 umschriebenen Kegel und zugleich für diese Kegel der Polstrahl ihrer mit v_1 inzidenten Leitebenen. Die zweiten Fokalachsen dieser Kegel bilden nach

*) Schröter, Ueber ein einfaches Hyperboloid von besonderer Art. Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 85 (1877), S. 36, N. 6.

einem bekannten Satze aus der Theorie der Fokalachsen einer Fläche II. Grades eine Regelschar des durch u_1 gehenden mit C^2 konfokalen Paraboloides; ihre je auf der Ebene der beiden Fokalachsen senkrechten Hauptachsen also eine gleichseitige parabolische Regelschar, die in dem Achsenkomplexe von C^2 enthalten ist. u_1 ist der zur Leitschar dieser Regelschar gehörige Scheitelstrahl. u_1 und der mit ihm inzidente Regelstrahl v_1 von C^3 sind ferner die Scheitelstrahlen eines mit C^2 konfokalen Paraboloides. Eine Schar konfokaler Paraboloide enthält nun stets ein gleichseitiges Paraboloid, sein Scheitelpunkt hälftet den Abstand der Brennpunkte der Fokalparabeln. Somit gilt nach **40.**:

In einer Schar konfokaler Paraboloide bilden die Scheitelstrahlen der hyperbolischen Paraboloide die Regelschar eines Zylindroides.

Durch Spiegelung an jedem seiner Scheitelstrahlen geht ein gleichseitiges Paraboloid in sich selbst über und jede Fokalparabel in die andere. Kurz:

Die Paraboloide einer Schar konfokaler Paraboloide werden an den Scheitelstrahlen des in der Schar enthaltenen gleichseitigen Paraboloides C^2 paarweise ineinander gespiegelt. Je zwei ineinander gespiegelte hyperbolische Paraboloide haben zu Scheitelstrahlen zwei Paare inzidenter Regelstrahlen des mit C^2 orthogonal verknüpften Zylindroides. Ihre Scheitelebenen liegen zur Scheitelebene von C^2 symmetrisch.

43. Der aus einem beliebigen Punkte L einem gleichseitigen Paraboloide C^2 umschriebene Ebenenkegel II. Ordnung Λ^2 hat nach **39.** stets reelle zueinander orthogonale Ebenen. Ihre Schnittgeraden sind die Strahlen eines zum quadratischen Komplexe Γ^2 gehörigen Kegels. Er zerfällt, sobald L auf dem mit C^2 orthogonal verknüpften Zylindroide C^3 liegt, in zwei Strahlenbüschel I. Ordnung.

Sind nun α, β zwei Ebenen eines Ebenenkegels II. Ordnung K^2 und ist a eine mit α, aber nicht mit dem Mittelpunkte K von K^2 inzidente Gerade, so schneiden die Ebenen von K^2 die Gerade a und die Ebene β bzw. in einer Punktreihe und einem zu ihr projektiven Strahlenbüschel I. Ordnung, wenn je zwei mit einer Ebene von K^2 inzidente Elemente beider Gebilde einander entsprechen. Die durch die Punkte der Punktreihe parallel zu den homologen Elementen des zu ihr projektiven Strahlenbüschels gezogenen Strahlen bilden eine zu K^2 perspektive parabolische Regelschar. Sie geht in eine gleichseitige über, sobald α und a normal zu β sind. Sonach ist auf eine einfache Art synthetisch bewiesen:

Einem Kegel II. Grades mit reellen zueinander normalen Tangentialebenen kann stets ein gleichseitiges Paraboloid C^2 eingeschrieben werden. Die Schnittgeraden aller seiner zueinander normalen Tan-

gentialebenen bilden einen Strahlenkegel II. Ordnung oder zwei Strahlenbüschel I. Ordnung, je nachdem der Mittelpunkt des Kegels außerhalb des mit C^2 orthogonal verknüpften Zylindroides C^3 oder auf ihm liegt.

Die auf den Tangentialebenen eines Kegels II. Grades G^2 in seinem Mittelpunkte G errichteten Normalen bilden bekanntlich einen Kegel II. Ordnung G_n^2. Beide Kegel haben dieselben Symmetrieebenen. Einer von ihnen schließt entweder den andern im allgemeinen ein oder hat mit ihm vier reelle Erzeugende gemein. Umschließt G^2 den Kegel G_n^2, so hat G^2 keine reellen zueinander orthogonalen Tangentialebenen; umschließt hingegen G_n^2 den Kegel G^2, oder haben die beiden Kegel vier reelle Erzeugende gemein, so bilden die Schnittgeraden der reellen zueinander orthogonalen Tangentialebenen von G^2 einen Kegel II. Ordnung mit gleichen Symmetrieebenen wie G^2. Er umschließt den Kegel G^2 im ersteren Falle, er schließt ihn völlig aus im letzteren. Seine von ihm eingeschlossene Hauptachse fällt mit derjenigen von G^2 ausgeschlossenen Hauptachse dieses Kegels zusammen, die einen Winkel zwischen den Fokalachsen von G^2 hälftet.

Projektive Eigenschaften einer Kette konfokaler linearer Strahlenkongruenzen.

44. Jeder Strahl des Kegels II. Ordnung X^2, den der Komplex Γ^2 durch einen beliebigen Punkt X des Raumes sendet, bestimmt nach **9.** zusammen mit dem Hauptachsenzylindroide C^3 der zugehörigen konfokalen Kongruenzen eine von ihnen. Sind $A_1^1, B_1^1, C_1^1, D_1^1$ vier dieser konfokalen Kongruenzen, welche den Kegel X^2 bzw. in den vier harmonischen Strahlen a, b, c, d schneiden, und ist s ein zu ihnen windschiefer Regelstrahl von C^3, so ist s nach **11.** die Hauptachse von vier bzw. durch $A_1^1, B_1^1, C_1^1, D_1^1$ gehenden linearen Komplexen $\Gamma_a, \Gamma_b, \Gamma_c, \Gamma_d$ eines Komplexbüschels. Die von X auf s gefällte Normale n_x ist ein Strahl der Trägerkongruenz dieses Büschels und zugleich ein Strahl von X^2, folglich bilden die dem Punkte X bzw. durch die vier Komplexe zugewiesenen Nullebenen $n_x a, n_x b, n_x c, n_x d$ vier harmonische Ebenen des Ebenenbüschels $[n_x]$ und die Komplexe selbst also vier harmonische Komplexe des Komplexbüschels. Die vier Kongruenzen $A_1^1, B_1^1, C_1^1, D_1^1$ schneiden somit nicht nur den Komplexkegel X^2, sondern auch jeden andern Komplexkegel von Γ^2 in vier harmonischen Strahlen. Vier konfokale lineare Kongruenzen sollen nunmehr vier harmonische konfokale lineare Kongruenzen heißen, wenn sie mit einem und demnach mit jedem Kegel des quadratischen Komplexes Γ^2, dem sie angehören, vier harmonische Strahlen gemein haben,

ferner sollen die ∞^1 konfokalen linearen Kongruenzen, welche zu demselben Fokalparaboloid gehören, eine Kette konfokaler linearer Kongruenzen genannt werden. Eine Kette konfokaler linearer Kongruenzen läßt sich hiernach auf jedes Gebilde I. Stufe projektiv beziehen. Heißt endlich der von den Kongruenzen einer solchen Kette gebildete quadratische Komplex der die Kette umfassende Komplex, so gilt insbesondere:

Eine Kette konfokaler linearer Kongruenzen ist zu einem Kegel des sie umfassenden quadratischen Komplexes Γ^2 projektiv, wenn jeder Komplex der Kette dem Strahle des Kegels entspricht, den er mit ihm gemein hat.

45. Der Komplexkegel X^2 von Γ^2 zerfällt nach **11.** im allgemeinen in zwei Strahlenbüschel I. Ordnung, sobald sein Mittelpunkt X dem Hauptachsenzylindroide C^3 der Kette konfokaler linearer Kongruenzen oder der unendlich fernen Ebene angehört. Im ersteren Falle steht die Ebene des einen Strahlenbüschels in X auf dem mit diesem Punkte inzidenten Regelstrahle r von C^3 senkrecht, und je vier harmonische Kongruenzen der Kette schneiden diesen Strahlenbüschel nach **11.** in je vier harmonischen Strahlen. Im letzteren Falle bilden die durch X gehenden Strahlen von Γ^2 einen unendlich fernen Strahlenbüschel und einen Parallelstrahlenbüschel, dessen Ebene denjenigen Regelstrahl r von C^3 enthält, der auf der Verbindungsebene von X mit der Hauptsymmetrieachse c_d von C^3 senkrecht steht. Wird ein von r verschiedener Regelstrahl s von C^3 zur Hauptachse und je ein Strahl x des Parallelstrahlenbüschels zu einem Strahle eines linearen Komplexes Γ_x gewählt, so ist hierdurch im allgemeinen je ein linearer Komplex Γ_x eines Büschels bestimmt. Γ_x weist dem unendlich fernen Mittelpunkte des Parallelstrahlenbüschels eine mit x und dem unendlich fernen Punkte von s inzidente Nullebene zu. Durch vier harmonische Strahlen des Parallelstrahlenbüschels sind somit vier harmonische Komplexe dieses Büschels bestimmt. Durch vier harmonische Strahlen x des Parallelstrahlenbüschels gehen also wiederum vier harmonische Kongruenzen der Kette. Kurz:

Wird jeder Kongruenz einer Kette konfokaler linearer Kongruenzen der Strahl zugeordnet, in dem sie einen im Endlichen gelegenen Strahlenbüschel I. Ordnung des die Kette umfassenden quadratischen Komplexes Γ^2 schneidet, so ist die Kette zu diesem Strahlenbüschel I. Ordnung projektiv.

46. Die Kongruenzen X_1^1 einer Kette konfokaler linearer Kongruenzen ordnen einer beliebigen Ebene α der Hauptsymmetrieachse c_d je eine Ebene α_x dieser Achse zu, ferner senden sie nach **45.** durch einen Punkt P ihres Hauptachsenzylindroides im allgemeinen die Strahlen x eines zur Kette projektiven Strahlenbüschels I. Ordnung $[P]$. Ist die Ebene

dieses Strahlenbüschels zu α parallel, so projiziert jedesmal α_x aus c_d die Spur von x mit der Fluchtebene γ der konfokalen Kongruenzen. D. h.:

Einer Ebene α der Hauptsymmetrieachse c_d von Γ^2 ordnen die Komplexe der zugehörigen Kette konfokaler linearer Kongruenzen die Ebenen eines zur Kette projektiven Ebenenbüschels I. Ordnung $[c_d]_\alpha$ zu. Den Ebenen $\alpha, \beta, \cdots$ von c_d sind somit projektive Ebenenbüschel $[c_d]_\alpha$, $[c_d]_\beta, \cdots$ zugewiesen, welche die c_d mit den Nebensymmetrieachsen von Γ^2 verbindenden Ebenen entsprechend gemein haben.

47. Der Komplexstrahlenkegel X^2, den der Komplex Γ^2 durch einen beliebigen Punkt X des Raumes sendet, ist nach **44.** projektiv zur Kette konfokaler Kongruenzen, wenn jedem Komplexe der Kette sein Schnittstrahl mit dem Kegel zugewiesen wird. Ferner ordnen die Kongruenzen der Kette der Ebene $Xc_d = \xi$ nach **46.** die Ebenen eines zur Kette projektiven Ebenenbüschels I. Ordnung $[c_d]_\xi$ zu. Die Kette konfokaler Kongruenzen bezieht also den Ebenenbüschel $[c_d]_\xi$ projektiv auf den Komplexstrahlenkegel X^2. Nun ist aber der in ξ gelegene Regelstrahl x_l des Hauptachsenzylindroides C^3 der konfokalen Kongruenzen zugleich eine von den beiden Leitgeraden einer Kongruenz X_1^1 der Kette. ξ ist also durch X_1^1 sich selbst zugeordnet und enthält den Schnittstrahl x von X_1^1 mit dem Komplexstrahlenkegel X^2. Die Ebene ξ des Ebenenbüschels $[c_d]_\xi$ geht somit durch den homologen Strahl x des zu $[c_d]_\xi$ projektiven Strahlenkegels X^2, und jener Ebenenbüschel erzeugt folglich mit dem zu ihm projektiven Strahlenkegel einen Kegelschnitt ξ^2. Dieser Kegelschnitt ist durch den Komplexstrahlenkegel X^2 projektiv auf die Kette konfokaler linearer Kongruenzen bezogen, und jeder seiner Punkte liegt auf einem Strahle, den die ihm entsprechende Kongruenz mit X^2 gemein hat; er ist durch sie dem Mittelpunkte X von X^2 zugeordnet. — Der zu x_l normale Strahl von X^2 insbesondere gehört nach **9.** zur ausgearteten Kongruenz der Kette. Sie ordnet X den unendlich fernen Punkt dieses zu x_l normalen Strahles zu. Er ist — solange X nicht in die Fluchtebene γ der konfokalen Kongruenzen fällt — der einzige unendlich ferne Punkt des Kegelschnittes ξ^2; in dem ausgeschlossenen Falle liegen alle Punkte von ξ^2 in der unendlich fernen Ebene. Hiernach ergibt sich:

Dem Mittelpunkte X eines Kegels X^2 des quadratischen Komplexes Γ^2 sind durch die zugehörige Kette konfokaler linearer Kongruenzen die Punkte eines zu ihr projektiven und zu X^2 perspektiven Kegelschnittes ξ^2 zugeordnet. ξ^2 ist eine Parabel, die jede der beiden Nebensymmetrieachsen c_1, c_2 von Γ^2 schneidet, und deren Achse parallel zur Hauptsymmetrieachse von Γ^2 läuft. Nur wenn der Mittelpunkt X von X^2 der Fluchtebene γ der konfokalen Kongruenzen

angehört, ist ξ^2 ein unendlich ferner Kegelschnitt und enthält die drei unendlich fernen Punkte aller drei Symmetrieachsen von Γ^2.

48. Zerfällt für einen im Endlichen gelegenen Punkt X des Raumes der von ihm ausstrahlende Komplexstrahlenkegel X^2, so ist X nach **11.** mit einem Regelstrahle des Hauptachsenzylindroides C^3 der konfokalen linearen Kongruenzen inzident. Einem auf einer Nebensymmetrieachse von C^3 gelegenen Punkte X sind in diesem Falle die Punkte einer zur Kette projektiven Punktreihe I. Ordnung zugeordnet, ihr Träger liegt in der unendlich fernen Ebene und kreuzt die betreffende Nebensymmetrieachse rechtwinklig. Punkten X auf den übrigen Regelstrahlen von C^3 entsprechen im allgemeinen, wie sich leicht mit Hilfe von **40.** erweisen läßt, ebenfalls zur Kette konfokaler Kongruenzen projektive Parabeln ξ^2. Sie gehen durch die betreffenden Punkte, und ihre Ebenen sind in ihnen normal zu dem je mit diesen Punkten inzidenten Regelstrahlen von C^3. Wiederum schneiden sie die Nebensymmetrieachsen der Fläche, und wiederum läuft ihre Achse je zur Hauptsymmetrieachse von C^3 parallel. — Komplexstrahlenkegel X^2 von Γ^2 mit einem unendlich fernen Mittelpunkte X^∞ zerfallen nach **11.** in einen unendlich fernen Strahlenbüschel und in einen Parallelstrahlenbüschel derjenigen Tangentialebene von C^3, die den zur Ebene $X^\infty_{c_d}$ normalen Regelstrahl der Fläche enthält. Die einem Punkte X^∞ durch die konfokalen linearen Kongruenzen einer Kette zugeordneten Punkte bilden also eine mit der Fluchtebene γ der Kongruenzen inzidente zur Kette projektive Punktreihe I. Ordnung.

49. Eine Kette konfokaler linearer Kongruenzen ordnet nach **47.** dem Schnittpunkte einer beliebigen Geraden x mit der Fluchtebene γ die Punkte eines unendlich fernen zur Kette projektiven Kegelschnittes zu und dem unendlich fernen Punkte von x eine zu ihr projektive Punktreihe I. Ordnung von γ. Beide zur Kette projektiven Gebilde sind zueinander projektiv und zum Ebenenbüschel $[c_d]$ perspektiv und erzeugen eine zur Kette projektive Regelschar III. Ordnung $\mathfrak{X}^3$ mit der Doppelpunktsgeraden c_d. Sonach folgt:

> Eine Kette konfokaler linearer Kongruenzen ordnet einer beliebigen Geraden x die Strahlen einer zur Kette projektiven Regelschar III. Ordnung $\mathfrak{X}^3$ zu. Diese geht durch die Nebensymmetrieachsen c_1, c_2 des die Kette umfassenden Komplexes Γ^2, und ihre Doppelpunktsgerade ist seine Hauptsymmetrieachse c_d.

Schneidet x eine Nebensymmetrieachse c_x der konfokalen Kongruenzen, so sind dem Schnittpunkte von x mit c_x durch die Kongruenzen der Kette nach **48.** die Punkte einer zur Kette projektiven unendlich fernen Geraden zugeordnet. Die x durch die Kongruenzen der Kette zugeordneten Strahlen bilden also in diesem Falle eine durch die zweite Neben-

symmetrieachse c_λ gehende parabolische Regelschar $\mathfrak{X}^2$. Sie wird gleichseitig, sobald x die Nebensymmetrieachse $c_\varkappa$ rechtwinklig schneidet, und $c_\varkappa$ selbst wird dann ein Leitstrahl dieser Regelschar. $\mathfrak{X}^2$ geht insbesondere in eine Fokalregelschar der konfokalen Kongruenzen über, wenn x ein Strahl der betreffenden Fokalregelschar ist. — Einer Geraden der Fluchtebene γ sind im allgemeinen die Strahlen eines zur Kette projektiven unendlich fernen Strahlenbüschels I. Ordnung zugeordnet, usw.

50. Jede Kongruenz einer Kette konfokaler Kongruenzen wird durch den polaren Raum des gemeinsamen Fokalparaboloides nach **39.** in sich selbst übergeführt, somit gilt nach **44.**:

Vier harmonische Kongruenzen einer Kette schneiden den in einer beliebigen Ebene gelegenen parabolischen Strahlenbüschel des die Kette umfassenden Komplexes Γ^2 in vier harmonischen Strahlen. Eine Kette konfokaler linearer Kongruenzen ist zu einem parabolischen Strahlenbüschel ξ^2 des sie umfassenden quadratischen Komplexes Γ^2 projektiv, wenn jedem Komplexe der Kette der Strahl von ξ^2 zugeordnet wird, den er mit diesem parabolischen Strahlenbüschel gemein hat.

Analog ergibt sich aus **47.**:

Der Ebene ξ eines parabolischen Strahlenbüschels ξ^2 des Komplexes Γ^2 sind durch die Kongruenzen der Kette die Ebenen eines zu ihr projektiven und zu ξ^2 perspektiven parabolischen Ebenenzylinders II. Ordnung Ξ^2 zugeordnet. Usw.

Die rotatorische lineare Strahlenkongruenz.

51. In **2.** sind auf dem Kegelschnitte α^2 und dem unendlich fernen Kongruenzstrahle c_∞ der Schnittkongruenz eines Komplexbüschels zwei projektive Punktreihen ermittelt worden, deren homologe Punkte durch die Hauptachsen der Komplexe des Büschels verbunden werden. Wird nunmehr angenommen — was dort ausgeschlossen wurde —, daß c_∞ mit der unendlich fernen Geraden der Ebene α des Kegelschnittes α^2 zusammenfällt, so liegen in α alle Hauptachsen der Komplexe des Büschels, und α ist somit die Fluchtebene der zugehörigen Schnittkongruenz ${}_rC_1^1$. Diese Hauptachsen bilden, da sie mit der Hauptsymmetrieachse c_δ von ${}_rC_1^1$ inzident sind, einen Strahlenbüschel I. Ordnung. Je zwei zueinander orthogonale Strahlen dieses Büschels sind die Hauptachsen je zweier füreinander nullinvarianten Komplexe, sie schneiden c_∞ in Punkten, die sowohl durch ${}_rC_1^1$, wie durch den unendlich fernen imginären Kugelkreis einander zugeordnet sind. Die lineare Kongruenz ${}_rC_1^1$ ist also elliptisch, ihre beiden Fokalachsen fallen mit der Hauptsymmetrieachse c_δ zusammen,

und die mit c_∞ inzidenten Ebenen schneiden die in ${}_rC_1^1$ enthaltenen hyperbolischen Regelscharen in Kreisen.

Jeder Strahl des von den Hauptachsen gebildeten Strahlenbüschels I. Ordnung ist nach **6.** eine Nebensymmetrieachse von ${}_rC_1^1$. An jedem spiegelt sich also ein von c_d und c_∞ verschiedener Kongruenzstrahl x in einen Kongruenzstrahl, der mit x zu einer in ${}_rC_1^1$ enthaltenen rotatorischen Regelschar mit der Rotationsachse c_d und der zu ihr senkrechten Symmetrieebene α gehört. c_d, c_∞ sind reziproke Polaren in den polaren Räumen der Träger dieser rotatorischen Regelscharen, und in ihnen sind die durch ${}_rC_1^1$ einander zugeordneten Punkte von c_d und c_∞ konjugiert. Die Träger aller dieser in ${}_rC_1^1$ enthaltenen Regelscharen bilden also einen Büschel rotatorischer Regelflächen mit der gemeinsamen Rotationsachse c_d und der gemeinsamen Symmetrieebene α. Die zu den Flächen dieses Büschels gehörigen polaren Räume erweisen sich als die einzigen rotatorischen, die ${}_rC_1^1$ derart in sich selbst überführen, daß die durch ${}_rC_1^1$ einander zugeordneten Punkte in ihnen konjugiert sind.

Mit einer Nebensymmetrieachse c_x inzidente Strahlen von ${}_rC_1^1$ bilden eine gleichseitige parabolische Regelschar $\mathfrak{P}_x^2$ mit den Scheitelstrahlen c_x, c_d. Die lineare Kongruenz ${}_rC_1^1$ wird somit von den Strahlen einer gleichseitigen parabolischen Regelschar $\mathfrak{P}_x^2$ beschrieben, sobald $\mathfrak{P}_x^2$ eine volle Umdrehung um c_d vollführt. Dieser Eigenschaft halber heißt bekanntlich die vorliegende lineare Kongruenz ${}_rC_1^1$ eine rotatorische lineare Kongruenz.

52. Der von den Mittelebenen einer allgemeinen linearen Kongruenz nach **14.** gebildete gleichseitige parabolische Bündel zerfällt für die rotatorische lineare Kongruenz in zwei Ebenenbündel I. Ordnung. Der eine hat zum Mittelpunkt den Punkt $c_d\alpha = C$, der andere den unendlich fernen Punkt C_∞' von c_d. Die beiden zentrischen Bündel $[C]$ und $[C_\infty']$ sind kollinear und haben den Strahl c_d entsprechend gemein, wenn Ebenen und Strahlen beider Bündel als homologe angesehen werden, die durch ${}_rC_1^1$ einander zugeordnet sind. Homologe Ebenen schneiden sich also rechtwinklig. Ein Ebenenbüschel $[e]$ von $[C]$, dessen Achse weder mit c_d noch mit einer Nebensymmetrieachse von ${}_rC_1^1$ zusammenfällt, erzeugt mit dem homologen Ebenenbüschel $[e']$ von $[C_\infty']$ eine durch c_d gehende in ${}_rC_1^1$ enthaltene orthogonale Regelschar $\mathfrak{R}_e^2$. Die Kreisschnittebenen von $\mathfrak{R}_e^2$ sind normal zu den homologen Geraden e, e' der kollinearen zentrischen Bündel, d. h. auch zu dem zu e parallelen Kongruenzstrahle und zu c_d. Durch jeden von c_d und c_∞ verschiedenen Strahl s von ${}_rC_1^1$ geht also eine orthogonale Regelschar $\mathfrak{R}_e^2$, deren eine Schar von Kreisschnitten in Normalebenen zu s liegen. Sobald die Achse e des Ebenenbüschels $[e]$ mit einer Nebensymmetrieachse c_x von ${}_rC_1^1$ zusammen-

fällt, geht die orthogonale Regelschar $\mathfrak{R}_e^2$ in die gleichseitige parabolische Regelschar $\mathfrak{P}_x^2$ über. Die durch c_d gehenden in ${}_rC_1^1$ enthaltenen Regelscharen II. Ordnung sind hiernach teils orthogonal, teils gleichseitig parabolisch.

Rotatorische Kongruenzen, deren Hauptachsen den nämlichen Strahlenbüschel I. Ordnung bilden, bilden selbst einen quadratischen Komplex. Seine Komplexstrahlenkegel sind orthogonal, seine Komplexstrahlenbüschel parabolisch. Die singuläre Fläche des Komplexes besteht aus der Ebene des Hauptachsenbüschels, der unendlich fernen Ebene und zwei Strahlenbündeln, deren Mittelpunkt bzw. der unendlich ferne Punkt der Hauptsymmetrieachse c_d jener Kongruenzen und der Mittelpunkt ihres Hauptachsenbüschels sind. Durch Spiegelung an c_d oder einer Hauptachse geht der Komplex in sich selbst über.

Berlin, den 14. Dezember 1905.

Über das Problem der Bewegung von vier Massenpunkten unter dem Einflusse von inneren Kräften.

Von

P. Woronetz in Kiew.

In der dreiundzwanzigsten seiner Vorlesungen über Dynamik hat Jacobi die partielle Differentialgleichung, die seinen und Hamiltons Namen führt, für diejenigen Probleme aufgestellt, in welchen die Sätze von der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunktes gelten. Gelten außerdem die Sätze von der Erhaltung der Flächenräume, so können der erwähnten Differentialgleichung noch drei andere beigefügt werden. Betrachtet man nun das so entstandene System partieller Differentialgleichungen von dem Standpunkte der bekannten Lieschen Integrationsmethode, so ist sofort ersichtlich, daß das Problem der Bewegung eines materiellen Punktsystems von n Freiheitsgraden für den Fall, daß die Sätze von der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunktes und der Flächenräume in Kraft sind, auf die Integration von nur $2(n-6)$ gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung und auf Quadraturen reduziert werden kann.

Dem Gesagten zufolge muß das Problem, das den Gegenstand vorliegender Untersuchungen bildet, d. h. das Problem der Bewegung von vier Massenpunkten unter dem Einflusse von inneren Kräften sich auf die Integration von zwölf Differentialgleichungen erster Ordnung und auf Quadraturen zurückführen lassen. Und in der Tat hat auch H. A. Seydler*), indem er die berühmte, von Lagrange**) auf das Dreikörperproblem angewandte Methode etwas verallgemeinert, Differentialgleichungen solcher Art und von solcher Anzahl für das in Rede stehende Problem hergeleitet.

*) Seydler, Ausdehnung der Lagrangeschen Behandlung des Dreikörperproblems auf das Vierkörperproblem. Abhandlungen der math.-naturw. Klasse der k. böhmischen Gesellschaft der Wissensch. VII. Folge. Bd. I. 1886.

**) Lagrange, Essai sur le problème des trois corps. Oeuvres t. VI.

Sieht man von dem wohlbekannten Falle ab, wenn die Kraft, die zwischen zweien der Massenpunkte wirkt, dem Produkte aus den Massen der Punkte in ihre Entfernung direkt proportional ist, so ist es bis heute nicht gelungen, eine allgemeine Lösung des erwähnten Problems selbst bei spezieller Form der Kräftefunktion aufzufinden.

Was nun die partikulären Lösungen des Problems anbelangt, so sind hier die von H. Sludski und Hoppe*) gegebenen zwei Fälle, die eine Ausdehnung der bekannten Laplaceschen**) Lösungen des Dreikörperproblems bilden, anzuführen. Eine weitere Verallgemeinerung der Laplaceschen Lösung für das Vierkörperproblem ist von H. Lehmann-Filhés***) erzielt worden.

Alle diese speziellen Fälle werden in der vorliegenden Abhandlung als bekannt angesehen, und im Texte soll ihrer nicht weiter Erwähnung getan werden.

Die vorliegende Arbeit zerfällt in drei Teile. In Kap. I werden die zwölf Gleichungen aufgestellt, nach deren Integration die in Rede stehende Aufgabe durch Quadraturen gelöst wird. Eine Anwendung der allgemeinen Formeln wird auf den Fall gemacht, wenn die Massen dreier der Punkte M_1, M_2, M_3, M_4 einander gleich sind:

$$m_1 = m_2 = m_3.$$

Es wird nachgewiesen, daß dann das Punktsystem so in Bewegung gebracht werden kann, daß die Punkte mit gleichen Massen in jedem Momente der Bewegung in den Scheiteln eines gleichseitigen Dreiecks liegen. Der vierte Punkt bewegt sich längs der Senkrechten zur Dreiecksebene, die durch den Schwerpunkt des Dreiecks hindurchgeht. Die Dreiecksebene bleibt der invariabelen Ebene parallel, und das Dreieck dreht sich in seiner Ebene um seinen Schwerpunkt mit einer Winkelgeschwindigkeit, die dem Quadrate der augenblicklichen Entfernung des Scheitels des Dreiecks vom Rotationszentrum umgekehrt proportional ist.

Ist die Kraft, die zwischen je zweien der Massenpunkte wirkt, dem Kubus der Entfernung der Punkte umgekehrt proportional, so ist das Problem durch Quadraturen auflösbar.

Es möge hier noch erwähnt werden, obgleich im folgenden nicht weiter darauf eingegangen wird, daß der eben angeführte spezielle Fall

*) Sludski, Zur Aufgabe über die Bewegung eines Systems freier materieller Punkte. Zeitschr. der Moskauer Math. Gesellschaft. IX. 1878; Hoppe, Erweiterung der bekannten Speziallösung des Dreikörperproblems. Grunerts Archiv der Math. und Phys. 64. 1879.

**) Laplace, Mécanique céleste, l. X, ch. VI.

***) Lehmann-Filhés, Über zwei Fälle des Vielkörperproblems. Astron. Nachr. 127. 1891.

leicht auf das n-Körperproblem ausgedehnt werden kann. Die drei Punkte mit gleichen Massen liegen wieder in den Scheiteln eines gleichseitigen Dreiecks, und die übrigen Punkte des Systems bewegen sich auf der Senkrechten zur Dreiecksebene durch den Schwerpunkt des Dreiecks. Ist $n = 5$ und außerdem

$$m_4 = m_5,$$

so können die Punkte M_4 und M_5 stets symmetrisch zur Dreiecksebene zu liegen kommen. Bei $n = 6$ und wieder $m_4 = m_5$ ist eine solche Bewegung des Punktsystems möglich, bei welcher die Punkte M_4 und M_5 symmetrisch zur Dreiecksebene bleiben, während der Punkt M_6 mit dem Schwerpunkte des Dreiecks zusammenfällt. In allen diesen Fällen reduziert sich das Problem auf Quadraturen, wenn die Kräfte dem Kubus der Entfernung umgekehrt proportional sind.

Die hier angeführten partikulären Lösungen des Vielkörperproblems können zur Illustration des berühmten Jacobischen Satzes über den letzten Multiplikator dienen.

In Kap. II wird der Fall diskutiert, wenn die drei Konstanten der Flächenintegrale gleich Null sind. Das allgemeine Problem zerfällt dann in zwei selbständige, nacheinander zu lösende Probleme. Zuerst wird die Deformation der Pyramide $M_1 M_2 M_3 M_4$, in deren Scheiteln die Massenpunkte liegen, gesucht. Zur Lösung dieser Aufgabe müssen fünf Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die fünf Kantenlängen der Pyramide durch die sechste bestimmen, integriert werden. Darnach wird die Bewegung dieser Pyramide im Raume gesucht. Diese Aufgabe führt zu einer Riccatischen Differentialgleichung:

$$\frac{dy}{dx} = y^2 f_1(x) + y f_2(x) + f_3(x).$$

Die Formeln dieses Kapitels werden auf den Fall angewandt, wenn die Massen der Punkte einander gleich sind. Das Punktsystem kann dann so in Bewegung gebracht werden, daß je zwei gegenüberliegende Kanten der Pyramide $M_1 M_2 M_3 M_4$ einander gleich bleiben. Sind außerdem die Dreiecke, die die Seiten der Pyramide bilden, gleichschenklig, so ist das Problem für Kräfte von der oben angeführten speziellen Art durch Quadraturen lösbar.

Endlich in Kap. III wird der Fall untersucht, wenn die vier Massenpunkte in jedem Momente der Bewegung in einer Ebene liegen. Die Aufgabe hängt von der Integration eines Systems von fünf Differentialgleichungen zweiter Ordnung ab. Sind die Massen zweier Punkte einander gleich, so kann das Punktsystem so in Bewegung gebracht werden, daß die Entfernung der Punkte mit gleichen Massen von der Geraden, die die beiden anderen Punkte verbindet, senkrecht geschnitten und halbiert wird. Die Ebene der Punkte dreht sich um die erwähnte Gerade mit

einer Winkelgeschwindigkeit, die dem Quadrate der Entfernung der Punkte mit gleichen Massen umgekehrt proportional ist. Sind die Massen der beiden anderen Punkte auch einander gleich, so läßt sich auch hier eine partikuläre Lösung des Problems für Kräfte, die dem Kubus der Entfernung umgekehrt proportional sind, aufstellen.

Dieser spezielle Fall kann auch auf das n-Körperproblem ausgedehnt werden. Sind die Massen von $2p$ Punkten des materiellen Systems einander gleich, so kann das System sich so bewegen, daß die Punkte mit gleichen Massen in jedem Momente der Bewegung in den Scheiteln eines regelmäßigen $2p$-Ecks liegen. Die übrigen Punkte des Systems bewegen sich längs der Senkrechten zur Ebene des $2p$-Ecks, die durch seinen Schwerpunkt hindurchgeht. Hier sind ähnliche Fälle, wie oben in bezug auf das gleichseitige Dreieck, zu unterscheiden.

Zum Schluß möge noch bemerkt werden, daß im folgenden das Verhältnis der Massen der Punkte zueinander stets endlich angenommen wird. Es werden also die Fälle, die in der Literatur zu so manchen interessanten Untersuchungen geführt haben, wenn die Massen einiger der Punkte als unendlich groß oder unendlich klein im Verhältnis zu den Massen der übrigen angenommen werden, hier nicht in Betracht gezogen.

In der vorliegenden, zumeist recht kurz gefaßten, Arbeit wird bei der Diskussion der partikulären Lösungen nur nachgewiesen, wie die betreffende Aufgabe auf Quadraturen zurückgeführt werden kann. Ausführlicher werden diese speziellen Fälle in einer größeren Arbeit behandelt werden, die wohl noch im Laufe des nächsten Jahres in russischer Sprache in den Kiewer Universitäts-Nachrichten erscheinen wird.

I.

1. Es mögen m_1, m_2, m_3, m_4 die Massen von vier materiellen Punkten M_1, M_2, M_3, M_4 sein, die nur inneren Kräften unterworfen sind, und U die Kräftefunktion bedeuten. Wir bezeichnen mit x_i, y_i, z_i $(i = 1, 2, 3)$ die rechtwinkligen Koordinaten der Punkte M_1, M_2, M_3 in bezug auf ein Koordinatensystem, das zum Ursprung den Punkt M_4 hat und dessen Achsen im Raume invariabele Richtungen haben. U ist eine Funktion der Veränderlichen x, y, z.

Wenn der Schwerpunkt O des Punktsystems M_1, M_2, M_3, M_4 im Anfangsmoment in Ruhe war*), so ist, den Integralen von der Erhaltung

*) Sind die Anfangsbedingungen anders gegeben, so bleiben die weiter unten folgenden Betrachtungen in Kraft, beziehen sich aber nicht auf den Raum, sondern auf ein Koordinatensystem $O\xi\eta\zeta$, das zum Ursprung den Schwerpunkt O hat und dessen Achsen im Raume unveränderliche Richtungen haben. Der Punkt O bewegt sich, wie bekannt, geradlinig und gleichförmig.

Bewegung des Schwerpunktes gemäß, die Geschwindigkeit des nktes M_4 der relativen Geschwindigkeit des Schwerpunktes O in bezug das System M_4xyz gleich und entgegengesetzt. Bezeichnen wir also M die Masse des Punktsystems:

$$M = m_1 + m_2 + m_3 + m_4,$$

sind die Projektionen der Geschwindigkeit des Punktes M_4 auf die ordinatenachsen

$$-\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{i=3} m_i x_i'; \quad -\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{i=3} m_i y_i'; \quad -\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{i=3} m_i z_i'.$$

Geschwindigkeit des Punktes M_1 setzt sich aus der relativen Gewindigkeit dieses Punktes in bezug auf das Koordinatensystem M_4xyz der Geschwindigkeit des Koordinatenursprunges zusammen, so daß Projektionen der Geschwindigkeit des Punktes M_1 gleich

$$x_1' - \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{i=3} m_i x_i'; \quad y_1' - \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{i=3} m_i y_i'; \quad z_1' - \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{i=3} m_i z_i'$$

d. Die Projektionen der Geschwindigkeiten der Punkte M_2 und M_3 let man aus den Ausdrücken (3) durch Vertauschung der Indizes 1, 2, 3 inander.

Mit Hilfe von (2) und (3) läßt sich leicht die lebendige Kraft T Punktsystems berechnen:

$$\begin{aligned} 2T = {} & m_1\left(1-\frac{m_1}{M}\right)(x_1'^2 + y_1'^2 + z_1'^2) + m_2\left(1-\frac{m_2}{M}\right)(x_2'^2 + y_2'^2 + z_2'^2) \\ & + m_3\left(1-\frac{m_3}{M}\right)(x_3'^2 + y_3'^2 + z_3'^2) \\ & - 2\frac{m_2 m_3}{M}(x_2'x_3' + y_2'y_3' + z_2'z_3') - 2\frac{m_3 m_1}{M}(x_3'x_1' + y_3'y_1' + z_3'z_1') \\ & - 2\frac{m_1 m_2}{M}(x_1'x_2' + y_1'y_2' + z_1'z_2'). \end{aligned}$$

Differentialgleichungen der Bewegung des Punktsystems haben, wie kannt, die Form:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial x_i'}\right) = \frac{\partial U}{\partial x_i}; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial y_i'}\right) = \frac{\partial U}{\partial y_i}; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial z_i'}\right) = \frac{\partial U}{\partial z_i} \qquad (i = 1, 2, 3).$$

t man aus diesen Gleichungen die Koordinaten x, y, z als Funktionen Zeit t gefunden, so bestimmt man die Bewegung des Koordinatenstems M_4xyz im Raume mit Hilfe der Integrale, die die Erhaltung Bewegung des Schwerpunktes ausdrücken, wie bekannt, ohne jegliche egration.

er Integrale der Gleichungen (5), das Integral der lebendigen
ei Flächenintegrale, lassen sich sofort hinschreiben.
as Integral der lebendigen Kraft gibt

$$T = U + h,$$

h eine Konstante bedeutet.
Um die Flächenintegrale zu erhalten, bemerken wir, daß die Aus-
cke (3) mit Hilfe von (4) sich so darstellen lassen:

$$\frac{1}{m_1}\frac{\partial T}{\partial x_1'};\quad \frac{1}{m_1}\frac{\partial T}{\partial y_1'};\quad \frac{1}{m_1}\frac{\partial T}{\partial z_1'}.$$

)

Das Moment in bezug auf die x-Achse des Vektors der Bewegungs-
größe des Punktes M_1 ist also gleich

$$y_1\frac{\partial T}{\partial z_1'} - z_1\frac{\partial T}{\partial y_1'},$$

so daß die Flächenintegrale liefern:

$$(8)\qquad \sum_{i=1}^{i=3}\left(y_i\frac{\partial T}{\partial z_i'} - z_i\frac{\partial T}{\partial y_i'}\right) = A;\qquad \sum_{i=1}^{i=3}\left(z_i\frac{\partial T}{\partial x_i'} - x_i\frac{\partial T}{\partial z_i'}\right) = B;$$

$$\sum_{i=1}^{i=3}\left(x_i\frac{\partial T}{\partial y_i'} - y_i\frac{\partial T}{dx_i'}\right) = C,$$

wo A, B, C Konstante sind.
Da das gegebene Punktsystem nur inneren Kräften unterworfen
so hängt U nur von den sechs Entfernungen der Punkte voneina
ab. Diese Entfernungen sollen mit $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, r_1, r_2, r_3$ bezei
werden, wobei $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ die Entfernungen der Punkte M_1, M_2, M
M_4 und r_1, r_2, r_3 die Entfernungen der Punkte M_2 und M_3, M_3 ur
M_1 und M_2 bedeuten:

$$(9)\quad \varrho_1^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 \text{ usw.}\qquad r_1^2 = (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + (z_2 - z$$

Zumeist werden wir voraussetzen, daß die Kraft, die zwischen j
der gegebenen Punkte wirkt, dem Produkte der Massen der be
Punkte in irgend eine Potenz ihrer Entfernung proportional ist.

$$(10)\quad U = \frac{\varepsilon}{k+1}[m_4(m_1\varrho_1^{k+1} + m_2\varrho_2^{k+1} + m_3\varrho_3^{k+1}) + m_2m_3r_1^{k+1} + m_3m_1r_2^{k+1} +$$

wo k eine positive oder negative Zahl und ε ein von den
hängiger konstanter Faktor sind.

In den Bewegungsgleichungen (5) ist natürlich

$$(11)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x_1} &= \frac{\partial U}{\partial \varrho_1}\frac{x_1}{\varrho_1} + \frac{\partial U}{\partial r_2}\frac{x_1 - x_3}{r_2} + \frac{\partial U}{\partial r_3}\frac{x_1 - x_2}{r_3}; \\ \frac{\partial U}{\partial x_2} &= \frac{\partial U}{\partial \varrho_2}\frac{x_2}{\varrho_2} + \frac{\partial U}{\partial r_3}\frac{x_2 - x_1}{r_3} + \frac{\partial U}{\partial r_1}\frac{x_2 - x_3}{r_1} \text{ usw.} \end{aligned}$$

zu setzen.

2. In die Bewegungsgleichungen (5) wollen wir statt der neun Koordinaten x, y, z neue Variabele einführen. Zu diesen wählen wir die sechs Größen ϱ und r (9) und drei Veränderliche φ_1, φ_2, φ_3, die mit den Koordinaten x, y, z durch die Differentialgleichungen

$$(12)\qquad \varphi_1' = x_2x_3' + y_2y_3' + z_2z_3' - x_3x_2' - y_3y_2' - z_3z_2' \text{ usw.}$$

verbunden sein mögen.*)

Durch Differentiation nach der Zeit t erhält man aus (9):

$$(13)\qquad \begin{aligned} \varrho_1\varrho_1' &= x_1x_1' + y_1y_1' + z_1z_1' \text{ usw.} \\ r_1r_1' &= (x_2-x_3)(x_2'-x_3') + (y_2-y_3)(y_2'-y_3') + (z_2-z_3)(z_2'-z_3') \text{ usw.} \end{aligned}$$

Stellt man nun mit Hilfe von (12) und (13) drei Systeme von je drei Gleichungen, wie z. B.

$$\begin{aligned} \varrho_1\varrho_1' &= x_1x_1' + y_1y_1' + z_1z_1'; \\ \tfrac{1}{2}(\varrho_1\varrho_1' + \varrho_2\varrho_2' - r_3r_3' - \varphi_3') &= x_2x_1' + y_2y_1' + z_2z_1'; \\ \tfrac{1}{2}(\varrho_3\varrho_3' + \varrho_1\varrho_1' - r_2r_2' + \varphi_2') &= x_3x_1' + y_3y_1' + z_3z_1', \end{aligned}$$

zusammen, so bestimmt man leicht die Derivierten x', y', z':

$$(14)\qquad \begin{aligned} \Delta\cdot x_1' &= (y_2z_3 - z_2y_3)\varrho_1\varrho_1' + (y_3z_1 - z_3y_1)v_3' + (y_1z_2 - z_1y_2)u_2' \text{ usw.} \\ \Delta\cdot x_2' &= (y_2z_3 - z_2y_3)u_3' + (y_3z_1 - z_3y_1)\varrho_2\varrho_2' + (y_1z_2 - z_1y_2)v_1' \text{ usw.} \\ \Delta\cdot x_3' &= (y_2z_3 - z_2y_3)v_2' + (y_3z_1 - z_3y_1)u_1' + (y_1z_2 - z_1y_2)\varrho_3\varrho_3' \text{ usw.} \end{aligned}$$

Hier bezeichnet Δ das sechsfache Volumen der Pyramide, deren Scheitel in den Punkten M_1, M_2, M_3, M_4 liegen.**) Außerdem sind der Kürze wegen folgende Bezeichnungen eingeführt:

$$(15)\qquad \begin{aligned} \varrho_2\varrho_2' + \varrho_3\varrho_3' - r_1r_1' + \varphi_1' &= 2u_1' \text{ usw.} \\ \varrho_2\varrho_2' + \varrho_3\varrho_3' - r_1r_1' - \varphi_1' &= 2v_1' \text{ usw.} \end{aligned}$$

*) Die Aufgabe, in die dynamischen Gleichungen neue Variabele einzuführen, die mit den ursprünglichen durch Differentialgleichungen verbunden sind, ist in letzter Zeit schon recht häufig behandelt worden. Ausführlicheres über diese Aufgabe, wie auch über die betreffende Literatur findet man in meinem Vortrage „Über eine Transformation der Gleichungen der Dynamik" (Protokolle der Kiewer physiko-mathematischen Gesellschaft aus dem Jahre 1900) oder auch in der neueren Abhandlung von G. Hamel, Über die virtuellen Verschiebungen in der Mechanik (Math. Annalen Bd. 59. 1904).

**) Wir setzen Δ von Null verschieden voraus. Der Fall $\Delta = 0$ soll weiter unten selbständig behandelt werden.

Setzt man aus den Formeln (14) in den Ausdruck (4) für die lebendige Kraft des Punktsystems ein, so wird T zu einer homogenen Funktion zweiten Grades Θ der Größen ϱ', r', φ'.

Bezeichnen wir ferner:

$$(16)\quad \Delta^2 \cdot k_1 = (y_2 z_3 - z_2 y_3)^2 + (z_2 x_3 - x_2 z_3)^2 + (x_2 y_3 - y_2 x_3)^2 \text{ usw.}$$

$$(17)\quad \Delta^2 \cdot h_1 = (y_3 z_1 - z_3 y_1)(y_1 z_2 - z_1 y_2) + (z_3 x_1 - x_3 z_1)(z_1 x_2 - x_1 z_2) + (x_3 y_1 - y_3 x_1)(x_1 y_2 - y_1 x_2) \text{ usw.,}$$

so erhalten wir aus (14):

$$x_1'^2 + y_1'^2 + z_1'^2 = k_1 \varrho_1^2 \varrho_1'^2 + k_2 v_3'^2 + k_3 u_2'^2 + 2h_1 v_3' u_2' + 2h_2 u_2' \varrho_1 \varrho_1' + 2h_3 \varrho_1 \varrho_1' v_3' \text{ usw.}$$

$$x_2' x_3' + y_2' y_3' + z_2' z_3' = k_1 u_3' v_2' + k_2 \varrho_2 \varrho_2' u_1' + k_3 v_1' \varrho_3 \varrho_3' + h_1(\varrho_2 \varrho_2' \varrho_3 \varrho_3' + v_1' u_1') + h_2(v_1' v_2' + u_3' \varrho_3 \varrho_3') + h_3(u_3' u_1' + \varrho_2 \varrho_2' v_2') \text{ usw.,}$$

so daß (4) ergibt:

$$\begin{aligned}(18)\quad 2\Theta = {} & k_1(m_1 \varrho_1^2 \varrho_1'^2 + m_2 u_3'^2 + m_3 v_2'^2 - M\Omega_1^2) \\ & + k_2(m_2 \varrho_2^2 \varrho_2'^2 + m_3 u_1'^2 + m_1 v_3'^2 - M\Omega_2^2) \\ & + k_3(m_3 \varrho_3^2 \varrho_3'^2 + m_1 u_2'^2 + m_2 v_1'^2 - M\Omega_3^2) \\ & + 2h_1(m_1 u_2' v_3' + m_2 \varrho_2 \varrho_2' v_1' + m_3 \varrho_3 \varrho_3' u_1' - M\Omega_2\Omega_3) \\ & + 2h_2(m_2 u_3' v_1' + m_3 \varrho_3 \varrho_3' v_2' + m_1 \varrho_1 \varrho_1' u_3' - M\Omega_3\Omega_1) \\ & + 2h_3(m_3 u_1' v_2' + m_1 \varrho_1 \varrho_1' v_3' + m_2 \varrho_2 \varrho_2' u_3' - M\Omega_1\Omega_2),\end{aligned}$$

wo zeitweilig

$$(19)\qquad m_1 \varrho_1 \varrho_1' + m_2 u_3' + m_3 v_2' = M\Omega_1 \text{ usw.}$$

gesetzt ist.

Die Koeffizienten k und h, die in (18) eingehen, lassen sich leicht durch die Größen ϱ und r (9) ausdrücken. Nach (16), (17) und (9) ist:

$$(20)\quad \begin{aligned}\Delta^2 \cdot k_1 &= \varrho_2^2 \varrho_3^2 - \tfrac{1}{4}(\varrho_2^2 + \varrho_3^2 - r_1^2)^2 \text{ usw.} \\ \Delta^2 \cdot h_1 &= \tfrac{1}{4}(\varrho_3^2 + \varrho_1^2 - r_2^2)(\varrho_1^2 + \varrho_2^2 - r_3^2) - \tfrac{1}{2}\varrho_1^2(\varrho_2^2 + \varrho_3^2 - r_1^2) \text{ usw.,}\end{aligned}$$

wobei nach einer bekannten Formel für das Volumen einer Pyramide, deren Kanten die Längen ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3, r_1, r_2, r_3 haben,

$$\begin{aligned}(21)\quad \Delta^2 = {} & \varrho_1^2 \varrho_2^2 \varrho_3^2 + \tfrac{1}{4}(\varrho_2^2 + \varrho_3^2 - r_1^2)(\varrho_3^2 + \varrho_1^2 - r_2^2)(\varrho_1^2 + \varrho_2^2 - r_3^2) \\ & - \tfrac{1}{4}\varrho_1^2(\varrho_2^2 + \varrho_3^2 - r_1^2)^2 - \tfrac{1}{4}\varrho_2^2(\varrho_3^2 + \varrho_1^2 - r_2^2)^2 \\ & - \tfrac{1}{4}\varrho_3^2(\varrho_1^2 + \varrho_2^2 - r_3^2)^2\end{aligned}$$

ist.

Die Gleichung (18) gibt also nach (15) und (19):

$$T = \Theta(\varrho_i, r_i, \varrho_i', r_i', \varphi_i'). \tag{22}$$

Um die Differentialgleichungen, die die Variabelen ϱ, r, φ als Funktionen von t bestimmen, aufzustellen, führen wir die Variationen der Größen φ (12) ein:

$$\delta\varphi_1 = x_2\delta x_3 + y_2\delta y_3 + z_2\delta z_3 - x_3\delta x_2 - y_3\delta y_2 - z_3\delta z_2 \text{ usw.} \tag{23}$$

und bestimmen*) die Differenzen

$$\delta\varphi' - \frac{d}{dt}\delta\varphi.$$

Aus (12) und (23) findet man:

$$\delta\varphi_1' - \frac{d}{dt}\delta\varphi_1 = 2(x_3'\delta x_2 - x_2'\delta x_3 + \cdots).$$

Setzt man in diese Gleichung aus (14) und aus den entsprechenden Formeln:

$$\Delta\cdot\delta x_1 = (y_2z_3 - z_2y_3)\varrho_1\delta\varrho_1 + (y_3z_1 - z_3y_1)\delta v_3 + (y_1z_2 - z_1y_2)\delta u_2 \text{ usw.},$$

wo nach (15)

$$\begin{aligned} \varrho_2\delta\varrho_2 + \varrho_3\delta\varrho_3 - r_1\delta r_1 + \delta\varphi_1 &= 2\delta u_1 \quad \text{usw.} \\ \varrho_2\delta\varrho_2 + \varrho_3\delta\varrho_3 - r_1\delta r_1 - \delta\varphi_1 &= 2\delta v_1 \quad \text{usw.} \end{aligned} \tag{24}$$

ist, ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} \delta\varphi_1' - \frac{d}{dt}\delta\varphi_1 = {} & 2k_1(v_2'\delta u_3 - u_3'\delta v_2) + 2k_2(u_1'\varrho_2\delta\varrho_2 - \varrho_2\varrho_2'\delta u_1) \\ & + 2k_3(\varrho_3\varrho_3'\delta v_1 - v_1'\varrho_3\delta\varrho_3) \\ & + 2h_1(\varrho_3\varrho_3'\varrho_2\delta\varrho_2 - \varrho_2\varrho_2'\varrho_3\delta\varrho_3 + u_1'\delta v_1 - v_1'\delta u_1) \\ & + 2h_2(v_2'\delta v_1 - v_1'\delta v_2 + \varrho_3\varrho_3'\delta u_3 - u_3'\varrho_3\delta\varrho_3) \\ & + 2h_3(u_1'\delta u_3 - u_3'\delta u_1 + v_2'\varrho_2\delta\varrho_2 - \varrho_2\varrho_2'\delta v_2). \end{aligned} \tag{25}$$

Durch Vertauschung der Indizes 1, 2, 3 bekommt man hieraus die Gleichungen zur Bestimmung der Differenzen

$$\delta\varphi_2' - \frac{d}{dt}\delta\varphi_2; \qquad \delta\varphi_3' - \frac{d}{dt}\delta\varphi_3.$$

Nun wenden wir die bekannte Formel

$$\int_{t_1}^{t_2}(\delta\Theta + \delta U)\,dt = 0$$

*) Vergl. unseren oben erwähnten Vortrag oder auch die Abhandlung von K. Heun, Die Bedeutung des D'Alembertschen Prinzipes für starre Systeme und Gelenkmechanismen (Archiv für Math. und Phys. III. 2. 1902. § 17).

an. Durch partielle Integration läßt sich die Funktion unter dem Integralzeichen so schreiben:

$$\sum_{i=1}^{i=3}\Big[-\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial\Theta}{\partial\varrho_i'}\Big)\delta\varrho_i-\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial\Theta}{\partial r_i'}\Big)\delta r_i-\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial\Theta}{\partial\varphi_i'}\Big)\delta\varphi_i+\frac{\partial(\Theta+U)}{\partial\varrho_i}\delta\varrho_i+\frac{\partial(\Theta+U)}{\partial r_i}\delta r_i + \frac{\partial\Theta}{\partial\varphi_i'}\Big(\delta\varphi_i'-\frac{d}{dt}\delta\varphi_i\Big)\Big].$$

Mit Hilfe von (25) und (24) wird dieser Ausdruck zu einer linearen Funktion der Variationen $\delta\varrho$, δr, $\delta\varphi$. Setzt man nun die Koeffizienten dieser Variationen gleich Null, so erhält man folgende neun Gleichungen:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial\Theta}{\partial\varrho_1'}\Big)-\frac{\partial(\Theta+U)}{\partial\varrho_1}=\varrho_1(\beta_1-\gamma_1)\frac{\partial\Theta}{\partial\varphi_1'}-\varrho_1(2\beta_1+\gamma_2+\alpha_3-\alpha_1)\frac{\partial\Theta}{\partial\varphi_2'}\\
&\qquad\qquad+\varrho_1(2\gamma_1+\beta_3+\alpha_2-\alpha_1)\frac{\partial\Theta}{\partial\varphi_3'}\ \text{usw.}\\
&\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial\Theta}{\partial r_1'}\Big)-\frac{\partial(\Theta+U)}{\partial r_1}=r_1(\alpha_2-\alpha_3)\frac{\partial\Theta}{\partial\varphi_1'}-r_1\beta_2\frac{\partial\Theta}{\partial\varphi_2'}+r_1\gamma_3\frac{\partial\Theta}{\partial\varphi_3'}\ \text{usw.}\\
&\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial\Theta}{\partial\varphi_1'}\Big)=-(\alpha_2+\alpha_3)\frac{\partial\Theta}{\partial\varphi_1'}+\beta_2\frac{\partial\Theta}{\partial\varphi_2'}+\gamma_3\frac{\partial\Theta}{\partial\varphi_3'}\ \text{usw.},
\end{aligned}\tag{26}$$

wo die α, β, γ lineare Funktionen der Größen ϱ', r', φ', deren Koeffizienten von ϱ und r abhängen, bezeichnen:

$$\begin{aligned}
&\alpha_1=k_1\varrho_1\varrho_1'+h_2u_2'+h_3v_3'\ \text{usw.};\quad \beta_1=k_1v_2'+h_2\varrho_3\varrho_3'+h_3u_1'\ \text{usw.};\\
&\gamma_1=k_1u_3'+h_2v_1'+h_3\varrho_2\varrho_2'\ \text{usw.}
\end{aligned}\tag{27}$$

Aus diesen Formeln sind die Variabelen u' und v' mit Hilfe von (15) zu eliminieren.

Die Gleichungen (26) bestimmen die Veränderlichen ϱ, r, φ' als Funktionen der Zeit. Diese Gleichungen sind in bezug auf die Größen ϱ und r von der zweiten, in bezug auf die Variabelen φ' von der ersten Ordnung.

Zwei Integrale des Systems (26) lassen sich sofort angeben. Das Integral der lebendigen Kraft gibt:

$$\Theta=U+h,\tag{28}$$

wo h eine Konstante bezeichnet.

Um das andere Integral zu erhalten, benutzen wir die Flächenintegrale (8). Den Formeln (12) und (13) gemäß ist:

$$\frac{\partial T}{\partial x_1'}=\frac{\partial\Theta}{\partial\varrho_1'}\frac{x_1}{\varrho_1}+\frac{\partial\Theta}{\partial r_2'}\frac{x_1-x_3}{r_2}+\frac{\partial\Theta}{\partial r_3'}\frac{x_1-x_2}{r_3}+\frac{\partial\Theta}{\partial\varphi_2'}x_3-\frac{\partial\Theta}{\partial\varphi_3'}x_2\ \text{usw.},\tag{29}$$

so daß

$$y_1 \frac{\partial T}{\partial z_1} - z_1 \frac{\partial T}{\partial y_1} = -\frac{1}{r_2}\frac{\partial \Theta}{\partial r_2'}(y_1 z_3 - z_1 y_3) - \frac{1}{r_3}\frac{\partial \Theta}{\partial r_3'}(y_1 z_2 - z_1 y_2)$$
$$+ \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi_2'}(y_1 z_3 - z_1 y_3) - \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi_3'}(y_1 z_2 - z_1 y_2)$$

wird. Setzt man hieraus in die Flächenintegrale (8) ein, so erhält man:

$$(30)\quad (y_3 z_2 - z_3 y_2)\frac{\partial \Theta}{\partial \varphi_1'} + (y_1 z_3 - z_1 y_3)\frac{\partial \Theta}{\partial \varphi_2'} + (y_2 z_1 - z_2 y_1)\frac{\partial \Theta}{\partial \varphi_3'} = \frac{1}{2}A \text{ usw.},$$

oder, indem man diese Gleichungen quadriert und sodann addiert, nach (16) und (17):

$$(31)\quad k_1\left(\frac{\partial \Theta}{\partial \varphi_1'}\right)^2 + k_2\left(\frac{\partial \Theta}{\partial \varphi_2'}\right)^2 + k_3\left(\frac{\partial \Theta}{\partial \varphi_3'}\right)^2 + 2h_1\frac{\partial \Theta}{\partial \varphi_2'}\frac{\partial \Theta}{\partial \varphi_3'} + 2h_2\frac{\partial \Theta}{\partial \varphi_3'}\frac{\partial \Theta}{\partial \varphi_1'}$$
$$+ 2h_3\frac{\partial \Theta}{\partial \varphi_1'}\frac{\partial \Theta}{\partial \varphi_2'} = \frac{A^2 + B^2 + C^2}{4\Delta^2}.$$

Wenn man zwei der Gleichungen (26) durch die Integrale (28) und (31) ersetzt und aus dem neuen System von Differentialgleichungen dt und, z. B., φ_3' eliminiert, so bekommt man sieben Differentialgleichungen, die sieben der Variabelen ϱ, r, φ' durch die achte bestimmen. Nur fünf von diesen Gleichungen werden zweiter Ordnung sein. *Wir können also sagen, daß das Problem der Bewegung von vier Massenpunkten, die nur inneren Kräften unterworfen sind, auf die Integration von zwölf simultanen Differentialgleichungen erster Ordnung reduziert ist.*

Wenn die Kräftefunktion U, wie z. B. in (10), eine homogene Funktion $(k+1)^{\text{ten}}$ Grades von den Variabelen ϱ und r ist, so kann es oft vorteilhaft sein, eine der Gleichungen (26) durch folgende von Jacobi*) gegebene Gleichung zu ersetzen:

$$(32)\quad \frac{d^2}{dt^2}[m_4(m_1\varrho_1^2 + m_2\varrho_2^2 + m_3\varrho_3^2) + m_2 m_3 r_1^2 + m_3 m_1 r_2^2 + m_1 m_2 r_3^2]$$
$$= 2M[(3+k)U + 2h].$$

Sind aus (26) die Variabelen ϱ, r, φ' als Funktionen der Zeit bestimmt, so findet man die Koordinaten x, y, z der Punkte M_1, M_2, M_3 ohne Schwierigkeit.

Durch geeignete Wahl der Richtung der Koordinatenachse $M_4 z$ kann man es stets erreichen, daß zwei der Konstanten A, B, C der Flächenintegrale gleich Null werden. Es mögen

$$A = B = 0$$

sein. C wollen wir von Null verschieden voraussetzen.**)

*) Jacobi, Vorlesungen über Dynamik, Vorl. IV.

**) Der Fall $A = B = C = 0$ wird weiter unten für sich behandelt.

Multipliziert man (30) mit x_i, y_i, z_i, wo i 1, 2 oder 3 bedeutet, und addiert, so wird

$$-\Delta \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi_i'} = \frac{1}{2} C z_i \quad (i = 1, 2, 3). \tag{33}$$

Diese Formeln bestimmen die Koordinaten z der Punkte M_1, M_2, M_3. Wir führen nun Polarkoordinaten ein:

$$x_i = R_i \cos \vartheta_i; \quad y_i = R_i \sin \vartheta_i.$$

Die Größen R_i und die Differenzen $\vartheta_i - \vartheta_j$ findet man ohne Integration aus den Formeln:

$$R_i^2 = \varrho_i^2 - z_i^2; \quad 2 R_2 R_3 \cos(\vartheta_2 - \vartheta_3) = \varrho_2^2 + \varrho_3^2 - r_1^2 - 2 z_2 z_3 \text{ usw.} \tag{34}$$

Man hat also nur noch irgend eine von den Variabelen ϑ_i zu bestimmen. Führt man in die Gleichung (12) und (13)

$$2(x_2 x_3' + y_2 y_3' + z_2 z_3') = \varrho_2 \varrho_2' + \varrho_3 \varrho_3' - r_1 r_2' + \varphi_1'$$

Polarkoordinaten ein, so wird

$$2[R_2 R_3' \cos(\vartheta_2 - \vartheta_3) + R_2 R_3 \sin(\vartheta_2 - \vartheta_3)\vartheta_3' + z_2 z_3'] = \varrho_2 \varrho_2' + \varrho_3 \varrho_3' - r_1 r_1' + \varphi_1',$$

so daß

$$\vartheta_3 = \int \frac{\varrho_2 \varrho_2' + \varrho_3 \varrho_3' - r_1 r_1' + \varphi_1' - 2 z_2 z_3' - 2 R_2 R_3' \cos(\vartheta_2 - \vartheta_3)}{2 R_2 R_3 \sin(\vartheta_2 - \vartheta_3)} dt + \text{const.} \tag{35}$$

wird.

Die Integration des Systems (26) führt 15 Konstanten ein. Über zwei Konstanten, A und B, haben wir durch die Wahl der Richtung der z-Achse bestimmte Verfügungen getroffen. Die Quadratur (35) gibt noch eine Konstante. Es werden also, wie auch zu erwarten war, die Funktionen, die die Koordinaten x, y, z der Punkte M_1, M_2, M_3 durch die Zeit bestimmen, 18 willkürliche Konstanten enthalten.

2. Wir wollen nun den *speziellen Fall, wenn drei der Punkte* M_1, M_2, M_3, M_4 *gleiche Massen haben*, ins Auge fassen. Es sei

$$m_1 = m_2 = m_3 = 1; \quad m_4 = m; \quad M = 3 + m. \tag{36}$$

Es fällt nicht schwer nachzuweisen, daß dann die Bewegungsgleichungen (26) das System partikulärer Integrale

$$\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho_3 = \varrho; \quad r_1 = r_2 = r_3 = r; \quad \varphi_1' = \varphi_2' = \varphi_3' = \varphi', \tag{37}$$

wo ϱ, r, φ' noch zu bestimmende Funktionen der Zeit bezeichnen, zulassen.

Aus (20) und (21) findet man:

$$\Delta^2 = \frac{r^4}{4}(3\varrho^2 - r^2); \quad k_1 = k_2 = k_3 = \frac{1}{r^2} \frac{4\varrho^2 - r^2}{3\varrho^2 - r^2}; \quad h_1 = h_2 = h_3 = -\frac{1}{r^3} \frac{2\varrho^2 - r^2}{3\varrho^2 - r^2}.$$

Die Formeln (27) geben nach (15):

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \frac{r^2\varrho\varrho' + (2\varrho^2 - r^2)rr'}{r^2(3\varrho^2 - r^2)}; \quad \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \frac{r^2\varrho\varrho' - \varrho^2 rr'}{r^2(3\varrho^2 - r^2)} - \frac{\varphi'}{r^2};$$

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \frac{r^2\varrho\varrho' - \varrho^2 rr'}{r^2(3\varrho^2 - r^2)} + \frac{\varphi'}{r^2}.$$

Bezeichnet man mit Θ_1 das Resultat der Einsetzung aus (37) und (36) in die Formel (18) für Θ, so ist augenscheinlich:

$$\frac{\partial\Theta}{\partial\varrho_i'} = \frac{1}{3}\frac{\partial\Theta_1}{\partial\varrho'}; \quad \frac{\partial\Theta}{\partial\varrho_i} = \frac{1}{3}\frac{\partial\Theta_1}{\partial\varrho} \text{ usw.}$$

Von der Kräftefunktion U wollen wir auch voraussetzen, daß

$$\frac{\partial U}{\partial\varrho_i} = \frac{1}{3}\frac{\partial U_1}{\partial\varrho}; \quad \frac{\partial U}{\partial r_i} = \frac{1}{3}\frac{\partial U_1}{\partial r},$$

wo U_1 in bezug auf U dieselbe Bedeutung hat, wie Θ_1 in bezug auf Θ.

Setzt man aus den gefundenen Formeln in die Bewegungsgleichungen (26) ein, so erhält man nur drei voneinander verschiedene Gleichungen:

$$(38)\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\Theta_1}{\partial\varrho'}\right) = \frac{\partial(\Theta_1 + U_1)}{\partial\varrho}; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\Theta_1}{\partial r'}\right) = \frac{\partial(\Theta_1 + U_1)}{\partial r} + \frac{2}{r}\frac{\partial\Theta_1}{\partial\varphi'}\varphi';$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\Theta_1}{\partial\varphi'}\right) = -\frac{2}{r}\frac{\partial\Theta_1}{\partial\varphi'}r',$$

die die drei Variabelen ϱ, r, φ' als Funktionen der Zeit bestimmen.

Die letzte der Gleichungen (38) gibt nach Integration das Integral (31) für den in Rede stehenden speziellen Fall:

$$\frac{\partial\Theta_1}{\partial\varphi'} = \frac{\sqrt{3(A^2 + B^2 + C^2)}}{r^2}.$$

Nun ist aber die Funktion Θ_1, die aus (18) leicht zu berechnen ist, gleich:

$$2\Theta_1 = \frac{m}{M}\frac{(3\varrho\varrho' - rr')^2}{3\varrho^2 - r^2} + r'^2 + \frac{3}{r^2}\varphi'^2,$$

so daß dem aufgefundenen Integrale gemäß:

$$\varphi' = \sqrt{\frac{A^2 + B^2 + C^2}{3}} = \text{const.} = \varphi_0'.$$

Bezeichnen wir jetzt

$$\Theta_1 - \frac{3}{2}\frac{\varphi_0'^2}{r^2} = \Theta_2; \quad U_1 - \frac{3}{2}\frac{\varphi_0'^2}{r^2} = U_2,$$

so können die Differentialgleichungen, die ϱ und r bestimmen, so geschrieben werden:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\Theta_2}{\partial\varrho'}\right) = \frac{\partial(\Theta_2 + U_2)}{\partial\varrho}; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\Theta_2}{\partial r'}\right) = \frac{\partial(\Theta_2 + U_2)}{\partial r}.$$

Statt der Variabelen ϱ führen wir eine neue ζ ein:

$$\zeta = \sqrt{\frac{m}{M}}\sqrt{3\varrho^2 - r^2}.$$

Dann wird

$$2\Theta_2 = \zeta'^2 + r'^2,$$

und die Differentialgleichungen transformieren sich in solche:

$$\zeta'' = \frac{\partial U_2}{\partial \zeta}; \quad r'' = \frac{\partial U_2}{\partial r},$$

wo U_2 durch r und ζ auszudrücken ist.

Diese Formeln fallen mit den Gleichungen der Bewegung eines materiellen Punktes in einer Ebene zusammen, wenn die Masse des Punktes gleich Eins ist, seine rechtwinkligen Cartesischen Koordinaten mit ζ und r bezeichnet sind und U_2 die Kräftefunktion bedeutet.

Ist die Kraft, die zwischen den Punkten M_i und M_j wirkt, dem Kubus der Entfernung $M_i M_j$ umgekehrt proportional, d. h. ist in (10)

$$k = -3,$$

so ist unser Problem leicht in Quadraturen auflösbar.

Die Jacobische Gleichung (32) gibt dann das Integral:

$$M(\zeta^2 + r^2) = 2Mht^2 + 2at + b,$$

wo a und b willkürliche Konstanten sind, und das Integral der lebendigen Kraft nimmt die Form

$$\zeta'^2 + r'^2 = -3\varepsilon\left(\frac{3m^2}{M\zeta^2 + mr^2} + \frac{1}{r^2}\right) - 3\frac{\varphi_0'^2}{r^2} + 2h$$

an. Eliminiert man aus diesen zwei Gleichungen eine der Variabelen, so erhält man eine Differentialgleichung erster Ordnung zur Bestimmung der anderen Variabelen. Diese Gleichung muß der Jacobischen Theorie des letzten Multiplikators zufolge zu Quadraturen führen.

Sehr rasch kommt man ans Ziel durch Einführung neuer Veränderlichen:

$$\zeta = \chi \cdot \cos\psi; \quad r = \chi \cdot \sin\psi.$$

Dann hat man:

$$M\chi^2 = 2Mht^2 + 2at + b;$$

$$\chi^2\chi'^2 + \chi^4\psi'^2 = -3\varepsilon\left(\frac{3m^2}{M\cos^2\psi + m\sin^2\psi} + \frac{1}{\sin^2\psi}\right) - 3\frac{\varphi_0'^2}{\sin^2\psi} + 2h\chi^2$$
$$= F(\psi) + 2h\chi^2,$$

woraus nach Elimination von χ die Quadratur

$$\int \frac{d\psi}{\sqrt{\frac{2hb}{M} - \frac{a^2}{M^2} + F(\psi)}} = \int \frac{dt}{2ht^2 + \frac{2a}{M}t + \frac{b}{M}} + \text{const.}$$

erhalten wird.

Sind die Größen ϱ und r als Funktionen der Zeit bekannt, so macht die Bestimmung der Bewegung der Pyramide $M_1M_2M_3M_4$ in bezug auf das Koordinatensystem M_4xyz keine Schwierigkeit.

Wir wählen wieder die xy-Ebene parallel der invariabelen Ebene:

$$A = B = 0.$$

Aus den Formeln (33), (34) und (35) bekommen wir dann:

$$z_1 = z_2 = z_3 = \sqrt{\varrho^2 - \tfrac{1}{3} r^2}; \quad R_1 = R_2 = R_3 = \frac{r}{\sqrt{3}}; \quad \vartheta_2 - \vartheta_3 = \frac{2}{3}\pi;$$

$$\vartheta_1 - \vartheta_2 = \frac{2}{3}\pi; \quad \vartheta_3 = \sqrt{3} \cdot \varphi_0' \int \frac{dt}{r^2} + \text{const.}$$

Die Ebene des Dreiecks $M_1M_2M_3$ bleibt also der invariabelen Ebene stets parallel, und die Pyramide $M_1M_2M_3M_4$ dreht sich um ihre Höhe mit einer Winkelgeschwindigkeit, die dem Quadrate der augenblicklichen Entfernung der Punkte M_1, M_2 oder M_3 von der Rotationsachse umgekehrt proportional ist.

II.

1. Wir gehen jetzt zu dem Falle über, daß alle drei Konstanten der Flächenintegrale gleich Null sind:

$$A = B = C = 0. \tag{39}$$

Hierbei wollen wir an der Voraussetzung, daß das Pyramidenvolumen Δ von Null verschieden ist, festhalten. Die Integrale (30) können unter diesen Bedingungen durch folgende ersetzt werden:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \varphi_i'} = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \tag{40}$$

die natürlich auch direkt aus den Bewegungsgleichungen (26) sich herleiten lassen.

Wenn wir voraussetzen, daß aus (40) die φ_i' bestimmt und in die Funktion Θ eingesetzt sind, d. h. wenn

$$\Theta = T_1(\varrho_i, r_i, \varrho_i', r_i'),$$

so ist nach (40):

$$\frac{\partial T_1}{\partial \varrho_i'} = \frac{\partial \Theta}{\partial \varrho_i'}; \quad \frac{\partial T_1}{\partial \varrho_i} = \frac{\partial \Theta}{\partial \varrho_i} \text{ usw.}$$

Setzen wir hieraus und aus (40) in die Bewegungsgleichungen (26) ein, so erhalten wir:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_1}{\partial \varrho_i'}\right) = \frac{\partial (T_1 + U)}{\partial \varrho_i}; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_1}{\partial r_i'}\right) = \frac{\partial (T_1 + U)}{\partial r_i} \quad (i = 1, 2, 3). \tag{41}$$

Hat man aus diesen Differentialgleichungen die Variabelen ϱ und r als Funktionen der Zeit gefunden, so ist damit die Deformation der Pyramide

$M_1 M_2 M_3 M_4$ bestimmt. Es bleibt also noch übrig, die Bewegung der Pyramide in bezug auf das Koordinatensystem $M_4 xyz$ aufzufinden. Zu diesem Zwecke hat man die Koordinaten x, y, z der Punkte M_1, M_2, M_3 aus den Formeln (9) und (12) oder aus folgenden, ihnen gleichbedeutenden:

$$(42)\quad \begin{gathered} x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = \varrho_1^2 \text{ usw.}; \quad 2(x_2 x_3 + y_2 y_3 + z_2 z_3) = \varrho_2^2 + \varrho_3^2 - r_1^2 \text{ usw.}; \\ 2(x_2 x_3' + y_2 y_3' + z_2 z_3') = \varrho_2 \varrho_2' + \varrho_3 \varrho_3' - r_1 r_1' + \varphi_1' \text{ usw.} \end{gathered}$$

zu berechnen, wo die φ' aus (40) zu bestimmen sind.

Wir wollen nachweisen, daß diese Aufgabe auf die Integration einer Riccatischen Gleichung zurückgeführt werden kann.

Zu diesem Zwecke führen wir statt der neun Größen x, y, z 15 neue Variabelen $a_i, b_i, c_i, \lambda_i, \mu_i$ $(i = 1, 2, 3)$ ein, von denen wir verlangen wollen, daß sie folgenden sechs Bedingungen

$$(43)\quad a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 1 \text{ usw.}; \quad a_2 a_3 + b_2 b_3 + c_2 c_3 = 0 \text{ usw.}$$

genügen. Die Beziehungen zwischen den Veränderlichen x, y, z und a, b, c, λ, μ wählen wir so:

$$(44)\quad \begin{gathered} x_1 = \varrho_1(\lambda_1 a_2 + \mu_1 a_3) \text{ usw.}; \quad x_2 = \varrho_2(\lambda_2 a_3 + \mu_2 a_1) \text{ usw.}; \\ x_3 = \varrho_3(\lambda_3 a_1 + \mu_3 a_2) \text{ usw.} \end{gathered}$$

Setzt man diese Werte für die x, y, z in die ersten sechs Gleichungen (42) ein und beachtet die Bedingungen (43), so erhält man:

$$(45)\quad \lambda_1^2 + \mu_1^2 = 1 \text{ usw.}; \quad \lambda_3 \mu_2 = \frac{\varrho_2^2 + \varrho_3^2 - r_1^2}{2\varrho_2 \varrho_3} \text{ usw.}$$

Diese leicht zu lösenden Gleichungen bestimmen die Größen λ und μ.

Indem man (44) nach der Zeit differentiiert, bekommt man z. B.:

$$x_3' = \varrho_3'(\lambda_3 a_1 + \mu_3 a_2) + \varrho_3(\lambda_3' a_1 + \mu_3' a_2) + \varrho_3(\lambda_3 a_1' + \mu_3 a_2'),$$

so daß die letzten drei Gleichungen (42) nach (43) ergeben:

$$(46)\quad \begin{gathered} 2\mu_2 \lambda_3 \varrho_2 \varrho_3' + 2\varrho_2 \varrho_3 \mu_2 \lambda_3' + 2\varrho_2 \varrho_3(-\lambda_2 \mu_3 \omega_1 + \lambda_2 \lambda_3 \omega_2 + \mu_2 \mu_3 \omega_3) \\ = \varrho_2 \varrho_2' + \varrho_3 \varrho_3' - r_1 r_1' + \varphi_1' \text{ usw.}, \end{gathered}$$

wo nach (43)

$$(47)\quad a_2 a_3' + b_2 b_3' + c_2 c_3' = -(a_3 a_2' + b_3 b_2' + c_3 c_2') = \omega_1 \text{ usw.}$$

gesetzt ist.

Die Determinante

$$\begin{vmatrix} -\lambda_2 \mu_3 & \lambda_2 \lambda_3 & \mu_2 \mu_3 \\ \mu_3 \mu_1 & -\lambda_3 \mu_1 & \lambda_3 \lambda_1 \\ \lambda_1 \lambda_2 & \mu_1 \mu_2 & -\lambda_1 \mu_2 \end{vmatrix}$$

ist nach (45) und (21), wie man sich leicht überzeugen kann,

$$\frac{\Delta^2}{\varrho_1^2\varrho_2^2\varrho_3^2},$$

also unserer Voraussetzung gemäß von Null verschieden. Darum lassen sich die ω aus (46) bestimmen.

Nachdem man die Differentialgleichungen (41) integriert und die Gleichungen (45) gelöst hat, werden also die ω bekannte Funktionen der Zeit sein. Nun ist es aber wohl bekannt*), daß die Aufgabe der Bestimmung der Größen a, b, c aus den Bedingungen (43) und (47) auf die Integration einer Riccatischen Gleichung zurückgeführt werden kann.

Wir sehen also, daß das Problem der Bewegung von vier Massenpunkten unter der Wirkung von inneren Kräften für den Fall, daß die Konstanten der Flächenintegrale gleich Null sind, in zwei selbständige, nacheinander zu lösende Probleme zerfällt.

Zuerst wird die Deformation der Pyramide, deren Scheitel in den gegebenen Massenpunkten liegen, gesucht. Dieses Problem löst man durch Integration von sechs Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die die Kantenlängen der Pyramide als Funktionen der Zeit bestimmen. Danach stellt man sich die Aufgabe, die Bewegung der veränderlichen Pyramide im Raume aufzufinden. Die Lösung dieser Aufgabe hängt von der Integration einer Riccatischen Gleichung ab.

Aus den Gleichungen (41) läßt sich noch mit Hilfe des Integrals der lebendigen Kraft die Zeit eliminieren. Das neue System von fünf Differentialgleichungen zweiter Ordnung bestimmt fünf der Kantenlängen der Pyramide $M_1M_2M_3M_4$ durch die sechste.

2. Die sechs Differentialgleichungen zweiter Ordnung (41) wollen wir nun durch zwölf Gleichungen erster Ordnung in der kanonischen Form ersetzen.

Wir bezeichnen nach (40)

$$(48)\qquad \frac{\partial T_1}{\partial \varrho_i'} = \frac{\partial \Theta}{\partial \varrho_i'} = \pi_i; \quad \frac{\partial T_1}{\partial r_i'} = \frac{\partial \Theta}{\partial r_i'} = p_i \quad (i = 1, 2, 3);$$

dann genügen die Größen π, p, ϱ, r, wie bekannt, den Gleichungen:

$$(49)\qquad \begin{gathered} \frac{d\pi_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \varrho_i}; \quad \frac{d\varrho_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \pi_i}; \\ \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial r_i}; \quad \frac{dr_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}; \\ (i = 1, 2, 3), \end{gathered}$$

*) Vergl. z. B. Darboux, Théorie des surfaces, t. I. ch. II.

wo

$$H = \sum_{i=1}^{i=3} (\pi_i \varrho_i' + p_i r_i') - T_1 - U = \mathsf{T} - U$$

ist, so daß T die lebendige Kraft des gegebenen Punktsystems bedeutet, die mit Hilfe von (40) und (48) als homogene Funktion zweiten Grades von den Größen π und p dargestellt ist.

Diese Funktion T wollen wir jetzt berechnen.

Aus den Formeln (29) findet man nach (4), (40) und (48):

$$\frac{\partial T}{\partial x_1'} = m_1 \left(x_1' - \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{i=3} m_i x_i'\right) = \frac{\pi_1}{\varrho_1} x_1 + \frac{p_2}{r_2}(x_1 - x_2) + \frac{p_3}{r_3}(x_1 - x_3) \text{ usw.}$$

und hieraus nach (1):

$$\sum_{i=1}^{i=3} \frac{\partial T}{\partial x_i'} = \frac{m_4}{M} \sum_{i=1}^{i=3} m_i x_i' = \frac{\pi_1}{\varrho_1} x_1 + \frac{\pi_2}{\varrho_2} x_2 + \frac{\pi_3}{\varrho_3} x_3,$$

so daß

$$x_1' = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_4}\right) \frac{\pi_1}{\varrho_1} x_1 + \frac{1}{m_4} \frac{\pi_2}{\varrho_2} x_2 + \frac{1}{m_4} \frac{\pi_3}{\varrho_3} x_3 + \frac{1}{m_1} \frac{p_2}{r_2}(x_1 - x_3) + \frac{1}{m_1} \frac{p_3}{r_3}(x_1 - x_2) \text{ usw.}$$

Setzt man nun diese Werte für x', y', z' und $\frac{\partial T}{\partial x'}$, $\frac{\partial T}{\partial y'}$, $\frac{\partial T}{\partial z'}$ in die evidente Formel:

$$2\mathsf{T} = \sum_{i=1}^{i=3} \left(\frac{\partial T}{\partial x_i'} x_i' + \frac{\partial T}{\partial y_i'} y_i' + \frac{\partial T}{\partial z_i'} z_i'\right)$$

ein, so erhält man nach kurzer Rechnung mit Hilfe von (9):

$$\begin{aligned}
2\mathsf{T} = {} & \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_4}\right) \pi_1^2 + \left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_4}\right) \pi_2^2 + \left(\frac{1}{m_3} + \frac{1}{m_4}\right) \pi_3^2 + \left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3}\right) p_1^2 \\
& + \left(\frac{1}{m_3} + \frac{1}{m_1}\right) p_2^2 + \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) p_3^2 \\
& + \frac{1}{m_4}\left[(\varrho_2^2 + \varrho_3^2 - r_1^2) \frac{\pi_2 \pi_3}{\varrho_2 \varrho_3} + (\varrho_3^2 + \varrho_1^2 - r_2^2) \frac{\pi_3 \pi_1}{\varrho_3 \varrho_1} + (\varrho_1^2 + \varrho_2^2 - r_3^2) \frac{\pi_1 \pi_2}{\varrho_1 \varrho_2}\right] \\
(50) \quad & + \frac{1}{m_1}(r_2^2 + r_3^2 - r_1^2) \frac{p_2 p_3}{r_2 r_3} + \frac{1}{m_2}(r_3^2 + r_1^2 - r_2^2) \frac{p_3 p_1}{r_3 r_1} + \frac{1}{m_3}(r_1^2 + r_2^2 - r_3^2) \frac{p_1 p_2}{r_1 r_2} \\
& + \frac{1}{m_1}\left[\varrho_1^2 + r_2^2 - \varrho_3^2) \frac{p_2}{r_2} + (\varrho_1^2 + r_3^2 - \varrho_2^2) \frac{p_3}{r_3}\right] \frac{\pi_1}{\varrho_1} \\
& + \frac{1}{m_2}\left[\varrho_2^2 + r_3^2 - \varrho_1^2) \frac{p_3}{r_3} + (\varrho_2^2 + r_1^2 - \varrho_3^2) \frac{p_1}{r_1}\right] \frac{\pi_2}{\varrho_2} \\
& + \frac{1}{m_3}\left[(\varrho_3^2 + r_1^2 - \varrho_2^2) \frac{p_1}{r_1} + (\varrho_3^2 + r_2^2 - \varrho_1^2) \frac{p_2}{r_2}\right] \frac{\pi_3}{\varrho_3}.
\end{aligned}$$

3. Um die in den letzten zwei Paragraphen aufgestellten Formeln auf

einen speziellen Fall anzuwenden, wollen wir voraussetzen, daß die Massen der Punkte M_1, M_2, M_3, M_4 einander gleich sind:

$$m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = 1; \quad M = 4, \tag{51}$$

und daß die Kräftefunktion U in der Form (10) gegeben ist. Die Funktion H (50) ändert sich dann nicht, wenn man die Variabelen ϱ und π durch die Variabelen r und p mit den entsprechenden Indizes ersetzt, und umgekehrt. Daraus ziehen wir den Schluß, daß die Bewegungsgleichungen (49) das System partikulärer Integrale

$$\varrho_i = r_i; \quad \pi_i = p_i \quad (i = 1, 2, 3) \tag{52}$$

zulassen.

Es ist also eine solche Bewegung des gegebenen Punktsystems M_1, M_2, M_3, M_4 möglich, bei welcher je zwei gegenüberliegende Kanten der Pyramide $M_1M_2M_3M_4$ gleiche Länge haben.

Die Variabelen r und p genügen im Falle (51) und (52) den Gleichungen:

$$\frac{dr_i}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial p_i}; \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial r_i} \qquad (i = 1, 2, 3),$$

wo (50)

$$\begin{aligned} H_1 = \frac{1}{2} H = {} & p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + \frac{r_2^2 + r_3^2 - r_1^2}{r_2 r_3} p_2 p_3 + \frac{r_3^2 + r_1^2 - r_2^2}{r_3 r_1} p_3 p_1 \\ & + \frac{r_1^2 + r_2^2 - r_3^2}{r_1 r_2} p_1 p_2 - \frac{\varepsilon}{\varkappa + 1} (r_1^{\varkappa+1} + r_2^{\varkappa+1} + r_3^{\varkappa+1}) \end{aligned} \tag{53}$$

ist. Diese Gleichungen haben nun die partikulären Integrale

$$r_3 = r_2; \quad p_3 = p_2, \tag{54}$$

und die Variabelen r_1, r_2, p_1, p_2 sind aus den Formeln:

$$\begin{aligned} & \frac{dr_1}{dt} = 2p_1 + 2\frac{r_1}{r_2} p_2; \quad \frac{dp_1}{dt} = -2\frac{p_2}{r_2}\left(p_1 - \frac{r_1}{r_2} p_2\right) + \varepsilon r_1^k; \\ & \frac{dr_2}{dt} = \frac{r_1}{r_2} p_1 + \left(4 - \frac{r_1^2}{r_2^2}\right) p_2; \quad \frac{dp_2}{dt} = \frac{r_1}{r_2^2} p_2 \left(p_1 - \frac{r_1}{r_2} p_2\right) + \varepsilon r_2^k \end{aligned} \tag{55}$$

zu bestimmen.

Die erhaltenen Gleichungen können in dem Falle, daß die wirkenden Kräfte dem Kubus der Entfernung umgekehrt proportional sind, leicht integriert werden. Doch wollen wir erst nachweisen, wie unter der Voraussetzung, daß die Gleichungen (55) gelöst sind, die Bewegung der Pyramide $M_1M_2M_3M_4$ in bezug auf das Koordinatensystem M_4xyz bestimmt werden kann. Das in § 1 auseinandergesetzte Verfahren gestaltet sich im Falle (51), (52), (54) besonders einfach.

Wir beginnen mit der Bestimmung der Größen φ' aus den Integralen (40) oder, was nach (15) dasselbe ist, aus den Formeln:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial u_1'} = \frac{\partial \Theta}{\partial v_1'} \text{ usw.}$$

Dem Ausdrucke (18) für Θ gemäß bekommt man hieraus nach (19):

$$m_3[k_2 u_1' + h_3 v_2' + h_1 \varrho_3 \varrho_3' - (k_2\Omega_2 + h_3\Omega_1 + h_1\Omega_3)]$$
$$= m_2[k_3 v_1' + h_1 \varrho_2 \varrho_2' + h_2 u_3' - (k_3\Omega_3 + h_1\Omega_2 + h_2\Omega_1)] \text{ usw.},$$

oder, wenn man wieder die Bezeichnungen (27) einführt:

$$m_3\left[\gamma_2 - \frac{1}{M}(m_2\alpha_2 + m_1\beta_2 + m_3\gamma_2)\right] = m_2\left[\beta_3 - \frac{1}{M}(m_3\alpha_3 + m_2\beta_3 + m_1\gamma_3)\right]$$
usw.

Nun ist aber in unserem Falle (51), (52) und (54) nach (16), (17) und (15)

$$k_1 = k_2 = k_3 = -h_1 - 2h_2;\quad h_3 = h_2;$$
$$2u_1' = 2r_2r_2' - r_1r_1' + \varphi_1';\quad 2u_2' = r_1r_1' + \varphi_2';\quad 2u_3' = r_1r_1' + \varphi_3';$$
$$2v_1' = 2r_2r_2' - r_1r_1' - \varphi_1';\quad 2v_2' = r_1r_1' - \varphi_2';\quad 2v_3' = r_1r_1' - \varphi_3'.$$

Bestimmt man mit Hilfe dieser Formeln aus (27) die Größen α, β, γ und setzt dann in die gefundenen Integrale ein, so überzeugt man sich leicht, daß nach (51)

$$\varphi_1' = \varphi_2' = \varphi_3' = 0$$

sein müssen.

Ferner findet man aus (45)

$$(56)\qquad \lambda_1 = \mu_1 = \frac{1}{\sqrt{2}};\quad \lambda_2 = \mu_3 = \frac{r_1}{r_2}\frac{1}{\sqrt{2}};\quad \lambda_3 = \mu_2 = \sqrt{1 - \frac{1}{2}\frac{r_1^2}{r_2^2}}$$

und dann aus (46)

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0,$$

so daß die neun Größen a, b, c alle Konstante sind, von denen nach (43) drei willkürlich angenommen werden können.

Der Punkt M_1 bewegt sich zufolge (44) längs einer Geraden und die Punkte M_2 und M_3 beschreiben ebene Kurven, die in den Ebenen

$$x_2a_2 + y_2b_2 + z_2c_2 = 0;\quad x_3a_3 + y_3b_3 + z_3c_3 = 0$$

liegen.

Bezeichnet man

$$x_2a_3 + y_2b_3 + z_2c_3 = \xi_2;\quad x_2a_1 + y_2b_1 + z_2c_1 = \eta_2,$$

so ist nach (44) und (56)

$$\xi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}r_1 = \varphi(t);\quad \eta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2r_2^2 - r_1^2} = \psi(t).$$

Nach Elimination von t aus diesen Formeln erhält man die Gleichung der Kurve des Punktes M_2.

Auf ähnliche Weise kann auch die Kurve des Punktes M_3 bestimmt werden.

Ist die Kraft, die an den Punkten M_i und M_j angreift, dem Kubus der Entfernung $\overline{M_iM_j}$ umgekehrt proportional, d. h. ist in (55)

$$k = -3,$$

so lassen die Gleichungen (55) außer dem Integrale der lebendigen Kraft

$$p_1^2 + \left(4 - \frac{r_1^2}{r_2^2}\right) p_2^2 + 2\frac{r_1}{r_2}\, p_1 p_2 + \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{2}{r_2^2}\right) = \frac{h}{2},$$

noch die beiden folgenden:

$$r_1^2 + 2r_2^2 = 4(ht^2 + 2at + b); \quad r_1 p_1 + 2r_2 p_2 = ht + a$$

zu. Hier bezeichnen a und b willkürliche Konstanten.

Das vierte und letzte Integral muß der Jacobischen Theorie des letzten Multiplikators zufolge durch Quadraturen sich bestimmen lassen.

Aus den Formeln (55) leiten wir die Gleichung

$$r_1 \frac{dr_2}{dt} - r_2 \frac{dr_1}{dt} = \frac{r_1^2 - 2r_2^2}{r_2}\left(p_1 - \frac{r_1}{r_2}\, p_2\right)$$

her und führen in den Integralen und in dieser Gleichung die Substitution

$$r_1 = R\cos\varphi; \qquad p_1 = \omega\cos\varphi - \frac{\psi}{R}\sin\varphi;$$

$$r_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} R\sin\varphi; \quad p_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\omega\sin\varphi + \frac{\psi}{R}\cos\varphi\right)$$

aus. Wir erhalten dann:

$$2\left(\omega^2 + \frac{\psi^2}{R^2}\right) - \frac{1}{\sin^2\varphi}\frac{\psi^2}{R^2} + \frac{\varepsilon}{2R^2}\left(\frac{1}{\cos^2\varphi} + \frac{4}{\sin^2\varphi}\right) = \frac{h}{2}; \quad R^2 = 4(ht^2 + 2at + b);$$

$$R\omega = ht + a; \quad R^2\frac{d\varphi}{dt} = 2\psi(1 - \operatorname{ctg}^2\varphi).$$

Indem man hieraus die Variabelen ψ, ω und R eliminiert, kommt man in der Tat zur Quadratur

$$\int^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{F(\varphi)}} = \int \frac{dt}{2\sqrt{(ht^2 + 2at + b)}} + \text{const.},$$

wo

$$F(\varphi) = (1 - \operatorname{ctg}^2\varphi)\left[2(bh - a^2) - \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{1}{\cos^2\varphi} + \frac{4}{\sin^2\varphi}\right)\right]$$

gesetzt ist.

III.

1. Die meisten der in Kap. I und II benutzten Formeln sind unter der Voraussetzung, daß das Pyramidenvolumen Δ von Null verschieden ist, hergeleitet worden. Darum muß der Fall, daß die Punkte M_1, M_2, M_3, M_4 in jedem Momente der Bewegung in einer Ebene liegen, getrennt behandelt werden.

Wir führen wieder ein Koordinatensystem M_4xyz ein, das zum Ursprung den Punkt M_4 hat und dessen Achsen im Raume feste Richtungen haben.

Indem wir einer Idee von Sylvester*), welche Radau**) mit vielem Erfolg für das Dreikörperproblem verwertet hat, folgen, betrachten wir neben dem Systeme M_4xyz ein zweites Koordinatensystem $M_4\xi\eta\zeta$, das denselben Ursprung hat und dessen $\xi\eta$-Ebene mit der Ebene der Punkte M_1, M_2, M_3, M_4 zusammenfällt. Die Schnittlinie der $\xi\eta$- und xy-Ebenen wählen wir zur η-Achse und bezeichnen mit φ und ψ die Winkel zwischen den Ebenen xy und $\xi\eta$ und den Ebenen zx und $\zeta\xi$.

Dann hat die Winkelgeschwindigkeit des Systems $M_4\xi\eta\zeta$ in bezug auf das System M_4xyz, wie bekannt, die Projektionen

$$-\psi'\sin\varphi, \quad \varphi', \quad \psi'\cos\varphi.$$

Wir bezeichnen ferner mit ξ_i, η_i die Koordinaten des Punktes M_i in der $\xi\eta$-Ebene und mit u_i, v_i, w_i die Projektionen auf die ξ, η, ζ-Achsen der Geschwindigkeit dieses Punktes in bezug auf das System M_4xyz. Es ist dann:

$$(57)\quad u_i = \xi_i' - \eta_i\psi'\cos\varphi; \quad v_i = \eta_i' + \xi_i\psi'\cos\varphi; \quad w_i = -\eta_i\psi'\sin\varphi - \xi_i\varphi'.$$

Die lebendige Kraft des Punktsystems läßt sich nach (4) leicht durch die Größen u, v, w ausdrücken:

$$\begin{aligned}(58)\quad 2T = {} & m_1\left(1-\frac{m_1}{M}\right)(u_1^2+v_1^2+w_1^2) + m_2\left(1-\frac{m_2}{M}\right)(u_2^2+v_2^2+w_2^2)\\ & + m_3\left(1-\frac{m_3}{M}\right)(u_3^2+v_3^2+w_3^2)\\ & - 2\frac{m_2m_3}{M}(u_2u_3+v_2v_3+w_2w_3) - 2\frac{m_3m_1}{M}(u_3u_1+v_3v_1+w_3w_1)\\ & - 2\frac{m_1m_2}{M}(u_1u_2+v_1v_2+w_1w_2).\end{aligned}$$

Setzt man hier aus (57) ein, so wird

$$T = \Theta(\xi_i, \eta_i, \xi_i', \eta_i', \psi', \varphi, \varphi').$$

Die Kräftefunktion U hängt nur von den Variabelen ξ_i und η_i ab, so daß die Bewegungsgleichungen so geschrieben werden können:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\xi_i'}\right) = \frac{\partial(\Theta+U)}{\partial\xi_i}; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\eta_i'}\right) = \frac{\partial(\Theta+U)}{\partial\eta_i} \quad (i=1,2,3);$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\psi'}\right) = 0; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\varphi'}\right) = \frac{\partial\Theta}{\partial\varphi}.$$

---

*) Sylvester, On the Motion of a Rigid Body acted on by no external Forces. Philosoph. Transact. of the Royal Society of London, vol. 156, 1866, p. 778.

**) Radau, Sur une propriété des systèmes qui ont un plan invariable. Liouville Journ. de Mathém. s. 2. t. XIV, 1869.

Wendet man die Flächensätze auf die xy- und $\xi\xi$-Ebenen an und bemerkt, daß

$$\cos(x,\eta) = -\sin\psi; \quad \cos(y,\eta) = \cos\psi; \quad \cos(z,\eta) = 0$$

ist, so bekommt man zwei Flächenintegrale der Form

$$\frac{\partial\Theta}{\partial\psi'} = C; \quad \frac{\partial\Theta}{\partial\varphi'} = -A\sin\psi + B\cos\psi,$$

wo A, B, C dieselbe Bedeutung haben, wie in (8).

Die letzte der Bewegungsgleichungen gibt das dritte Integral

$$\frac{\partial\Theta}{\partial\varphi} = -(A\cos\psi + B\sin\psi)\psi'. \tag{59}$$

Nun ist aber nach (57)

$$\frac{\partial\Theta}{\partial\psi'} = \sum_{i=1}^{i=3}\left(\xi_i\frac{\partial T}{\partial v_i} - \eta_i\frac{\partial T}{\partial u_i}\right)\cos\varphi - \sum_{i=1}^{i=3}\frac{\partial T}{\partial w_i}\eta_i\sin\varphi; \quad \frac{\partial\Theta}{\partial\varphi'} = -\sum_{i=1}^{i=3}\frac{\partial T}{\partial w_i}\xi_i;$$

$$\frac{\partial\Theta}{\partial\varphi} = -\sum_{i=1}^{i=3}\left(\xi_i\frac{\partial T}{\partial v_i} - \eta_i\frac{\partial T}{\partial u_i}\right)\psi'\sin\varphi - \sum_{i=1}^{i=3}\frac{\partial T}{\partial w_i}\eta_i\psi'\cos\varphi$$

und nach (58) und (57)

$$\frac{\partial T}{\partial w_i} = m_i w_i - \frac{m_i}{M}\sum_{j=1}^{j=3} m_j w_j = \left(-m_i\eta_i + \frac{m_i}{M}\sum_{j=1}^{j=3} m_j\eta_j\right)\psi'\sin\varphi$$

$$+\left(-m_i\xi_i + \frac{m_i}{M}\sum_{j=1}^{j=3} m_j\xi_j\right)\varphi';$$

folglich erhält man aus den Integralen:

$$\sum_{i=1}^{i=3}\left(\xi_i\frac{\partial T}{\partial v_i} - \eta_i\frac{\partial T}{\partial u_i}\right)\cos\varphi - R\psi'\sin^2\varphi - Q\varphi'\sin\varphi = C;$$

$$Q\psi'\sin\varphi + P\varphi' = A\sin\psi - B\cos\psi; \tag{60}$$

$$\sum_{i=1}^{i=3}\left(\xi_i\frac{\partial T}{\partial v_i} - \eta_i\frac{\partial T}{\partial u_i}\right)\psi'\sin\varphi + R\psi'^2\sin\varphi\cos\varphi + Q\psi'\varphi'\cos\varphi$$
$$= (A\cos\psi + B\sin\psi)\psi',$$

wo

$$P = \frac{1}{M}\left(\sum_{i=1}^{i=3} m_i\xi_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{i=3} m_i\xi_i^2; \quad Q = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{i=3} m_i\eta_i\sum_{j=1}^{j=3} m_j\xi_j - \sum_{i=1}^{i=3} m_i\xi_i\eta_i;$$

$$R = \frac{1}{M}\left(\sum_{i=1}^{i=3} m_i\eta_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{i=3} m_i\eta_i^2 \tag{61}$$

gesetzt ist.

Jetzt unterscheiden wir drei Fälle.

Den aufgestellten drei Gleichungen genügt man, erstens wenn man voraussetzt, daß

$$\psi' = 0;\ \varphi' = 0;\ A = B = 0;\ \sum_{i=1}^{i=3}\left(\xi_i \frac{\partial T}{\partial v_i} - \eta_i \frac{\partial T}{\partial u_i}\right) = \text{const.}$$

ist. Die Ebene der Punkte M_1, M_2, M_3, M_4 hat eine im Raume feste Richtung und in dieser Ebene gilt der Satz von der Erhaltung der Flächenräume.

Zweitens möge

$$\psi = 0$$

und φ' von Null verschieden sein. Man hat dann

$$(62)\qquad \sum_{i=1}^{i=3}\left(\xi_i \frac{\partial T}{\partial v_i} - \eta_i \frac{\partial T}{\partial u_i}\right)\cos\varphi - Q\varphi' \sin\varphi = C;\quad P\varphi' = -B.$$

Die Ebene der Punkte M_1, M_2, M_3, M_4 rotiert um die y-Achse mit einer Winkelgeschwindigkeit, die der Größe P (61) umgekehrt proportional ist.

Eliminiert man aus den Bewegungsgleichungen mit Hilfe des zweiten Integrals (62) die Derivierte φ', so sind die neuen Bewegungsgleichungen

$$(63)\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \Theta_1}{\partial \xi_i'}\right) = \frac{\partial(\Theta_1 + U)}{\partial \xi_i};\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \Theta_1}{\partial \eta_i'}\right) = \frac{\partial(\Theta_1 + U)}{\partial \eta_i} \qquad (i = 1,2,3),$$

wo nach Routh*)

$$\Theta_1 = \Theta - B\varphi' = \Theta + \frac{B^2}{P}$$

ist. Da nach (59)

$$\frac{\partial \Theta_1}{\partial \varphi} = \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi} = 0$$

ist, so ändern diese Gleichungen ihre Form nicht, wenn man aus ihnen mit Hilfe des ersten Integrals (62) den Winkel φ eliminiert. Außerdem kann noch aus den erwähnten Gleichungen mit Hilfe des Integrals der lebendigen Kraft

$$\Theta_1 = U + h - B\varphi'$$

die Zeit eliminiert werden. Das Problem reduziert sich also in diesem Falle auf die Integration von fünf Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Sind, drittens, die φ' und ψ' beide von Null verschieden, so wählen wir die xy-Ebene parallel der invariabelen Ebene:

$$A = B = 0.$$

---

*) Routh, A treatise on the stability of a given state of motion, ch. IV, art. 20. London 1877.

Aus den Formeln (60) finden wir:

$$Q\psi' \sin\varphi + P\varphi' = 0; \quad R\psi' \sin\varphi + Q\varphi' = -C\sin\varphi;$$

$$\sum_{i=1}^{i=3}\left(\xi_i \frac{\partial T}{\partial v_i} - \eta_i \frac{\partial T}{\partial u_i}\right) = C\cos\varphi,$$

so daß

$$(Q^2 - PR)\psi' = CP; \quad (PR - Q^2)\varphi' = CQ\sin\varphi$$

wird.

Auch in diesem Falle lassen sich die Größen ψ', φ', φ aus den Bewegungsgleichungen eliminieren. Bezeichnet man

$$\Theta_2 = \Theta - C\psi' = \Theta - \frac{C^2 P}{Q^2 - PR} = \text{Funkt. } (\xi_i, \eta_i, \xi_i', \eta_i'),$$

so sind die neuen Bewegungsgleichungen

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \Theta_2}{\partial \xi_i'}\right) = \frac{\partial(\Theta_2 + U)}{\partial \xi_i}; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \Theta_2}{\partial \eta_i'}\right) = \frac{\partial(\Theta_2 + U)}{\partial \eta_i} \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Indem man aus diesen Formeln mit Hilfe des Integrals der lebendigen Kraft

$$\Theta_2 = U + h - C\psi'$$

die Zeit eliminiert, bekommt man auch hier fünf Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

2. Um eine Anwendung der Formeln des vorhergehenden Paragraphen zu erhalten, wollen wir etwas ausführlicher auf den zweiten Fall eingehen.

Die Formeln (57) geben in diesem Falle

$$u_i = \xi_i'; \quad v_i = \eta_i'; \quad w_i = -\xi_i\varphi',$$

so daß nach (58) und (62)

$$\begin{aligned} 2\Theta_1 = 2\Theta - 2B\varphi' = {} & m_1\left(1 - \frac{m_1}{M}\right)(\xi_1'^2 + \eta_1'^2) + m_2\left(1 - \frac{m_2}{M}\right)(\xi_2'^2 + \eta_2'^2) \\ & + m_3\left(1 - \frac{m_3}{M}\right)(\xi_3'^2 + \eta_3'^2) - 2\frac{m_2 m_3}{M}(\xi_2'\xi_3' + \eta_2'\eta_3') \\ & - 2\frac{m_3 m_1}{M}(\xi_3'\xi_1' + \eta_3'\eta_1') - 2\frac{m_1 m_2}{M}(\xi_1'\xi_2' + \eta_1'\eta_2') + \frac{B^2}{P} \end{aligned}$$

wird, wo nach (61)

$$P = \frac{1}{M}(m_1\xi_1 + m_2\xi_2 + m_3\xi_3)^2 - (m_1\xi_1^2 + m_2\xi_2^2 + m_3\xi_3^2)$$

ist.

Die Kräftefunktion nehmen wir in der Form (10) an.

Nun machen wir die Voraussetzung, daß die Massen zweier der Punkte M_1, M_2, M_3, M_4 einander gleich sind:

$$m_3 = m_1.$$

Man überzeugt sich leicht, daß unter dieser Bedingung die Bewegungsgleichungen (63) das System partikulärer Integrale

$$\xi_1 + \xi_3 = 0; \quad \eta_3 = \eta_1; \quad \xi_2 = 0$$

zulassen.

Die Integrale (62) geben nach (61)

$$C = 0; \quad 2m_1\xi_1^2\varphi' = B.$$

Wir sehen also, daß für das gegebene Punktsystem eine solche Bewegung möglich ist, bei welcher die Entfernung zwischen den Punkten M_1 und M_3 mit gleichen Massen von der Geraden, die die beiden anderen Massenpunkte M_2 und M_4 verbindet, senkrecht geschnitten und halbiert wird. Die Ebene, in der die Massenpunkte liegen, rotiert um die Gerade M_2M_4 mit einer Winkelgeschwindigkeit, die dem Quadrate der Entfernung $\overline{M_1M_3}$ umgekehrt proportional ist. Die Rotationsachse hat eine im Raume feste Richtung (senkrecht zur invariabelen Ebene).

Sind die Massen der Punkte M_2 und M_4 auch einander gleich:

$$m_2 = m_4 = 1,$$

so lassen die Bewegungsgleichungen (63) das partikuläre Integral

$$\eta_2 = 2\eta_1$$

zu, so daß die Punkte M_2 und M_4 in jedem Momente der Bewegung symmetrisch zur Geraden M_1M_3 liegen.

Wenn die Kraft, die an die Punkte M_i und M_j angreift, dem Kubus der Entfernung $\overline{M_iM_j}$ umgekehrt proportional ist, so kann unser Problem durch Quadraturen gelöst werden.

Das Integral der lebendigen Kraft und die Jacobische Formel (32) geben dann:

$$m_1\xi_1'^2 + \eta_1'^2 + \frac{B^2}{4m_1\xi_1^2} = -\frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{4m_1}{\xi_1^2+\eta_1^2} + \frac{1}{4\eta_1^2} + \frac{m_1^2}{4\xi_1^2}\right) + h;$$

$$m_1\xi_1^2 + \eta_1^2 = ht^2 + 2at + b,$$

wo a, b, h willkürliche Konstanten sind. Substituieren wir nun

$$\sqrt{m_1}\,\xi_1 = R\cos\omega; \quad \eta_1 = R\sin\omega,$$

so wird

$$R^2 = ht^2 + 2at + b;$$

$$R^2R'^2 + R^4\omega'^2 = hR^2 - \frac{B^2}{4\cos^2\omega} - \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{4m_1^2}{\cos^2\omega + m_1\sin^2\omega} + \frac{1}{4\sin^2\omega} + \frac{m_1^2}{4\cos^2\omega}\right)$$

$$= hR^2 - F(\omega).$$

Nach Elimination von R erhält man die Quadratur

$$\int \frac{d\omega}{\sqrt{bh - a^2 - F(\omega)}} = \int \frac{dt}{ht^2 + 2at + b} + \text{const.}$$

Kiew, November 1905.

Über meine Modifikationen des Ostwaldschen Prinzips und über den zweiten Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie.

Von

Moritz Réthy in Budapest.

I. Das Ostwaldsche Prinzip wird in der Mechanik von zwei Standpunkten aus betrachtet. Bei dem einen handelt es sich darum, welche Konsequenzen aus ihm fließen, wenn man es dem Wortlaute nach auffaßt. Bei dem anderen geht man davon aus, daß das Prinzip bei wortgetreuer Auffassung schon in sehr einfachen Fällen — z. B. beim horizontalen Wurf eines schweren freien materiellen Punktes im leeren Raum — den Tatsachen widerspricht, und stellt Modifikationen fest, durch welche der Widerspruch wegfällt.

Herr Fejér vertritt in einer in diesen Annalen, Bd. 61, p. 422—436, erschienenen schönen Arbeit den ersten, ich in einem Bd. 59, p. 554—572 erschienenen Aufsatz den zweiten Standpunkt.

Im ersten Teil seiner Arbeit beschreibt Herr Fejér die Bewegung eines materiellen Punktes in der Ebene, wenn für sie das Ostwaldsche Prinzip, laut welchem „von allen möglichen Energieumwandlungen diejenige erfolgt, welche in gegebener Zeit den größtmöglichen Umsatz ergibt", für eine *fest* gegebene Zeit bestehen soll. Er zeigt, daß eine solche Bewegung bei beliebig gegebenen Anfangsgeschwindigkeiten und fester Zeit nicht möglich ist, und daß die *Bewegung*, die bei passend gegebenen Daten in Übereinstimmung mit dem Prinzip erfolgt, *eine brachistochronale*, also nur ausnahmsweise die natürliche ist (pag. 430).

Im zweiten Teil beantwortet Herr Fejér die speziellere Frage nach den Bedingungen, die erforderlich sind und auch genügen, wenn die Ostwaldsche Maximumseigenschaft der Potentialdifferenz in der Bahn eines in der Ebene bewegten materiellen Punktes *zu jeder Zeit* erfüllt sein soll: *Die durch die Anfangslage gehende Kraftlinie muß eine Gerade und die Anfangsgeschwindigkeit gleich Null sein oder in die Gerade fallen. Die*

Bewegung erfolgt eben dieser Kraftlinie entlang und befriedigt die Gleichungen der Mechanik (p. 433).

Im ersten Teil meiner oben zitierten Arbeit zeige ich, daß das in Rede stehende Prinzip dadurch, daß man an Stelle der Energieen ihre mittleren Werte in fest gegebener Zeit setzt, in ein dem Hamiltonschen äquivalentes Prinzip übergeht.

Im zweiten Teil hingegen wird eine Modifikation des Ostwaldschen Prinzips gegeben, bei welcher die Energieen selbst, nicht ihre mittleren Werte, eine Rolle spielen, bei welcher aber an Stelle der Maximumseigenschaft nur das Verschwinden der Variation der Potentialdifferenz in einem engeren Variationsgebiet, wie es das Ostwaldsche ist, gefordert wird. Diese Modifikation führt zu einer Verallgemeinerung der Mechanik.

Von diesem zweiten Teile meiner Arbeit, und hauptsächlich auch vom zweiten Teil der von Fejér, soll hier die Rede sein; ich stecke mir nämlich die folgenden Ziele:

1. Der Übergang zur eben genannten Modifikation des Variationsgebietes ist in meiner Arbeit (p. 562, letztes Al.), wie mich mehrere Fachgenossen, in erster Linie Herr Fejér, aufmerksam zu machen die Güte hatten, eben nur analytisch angedeutet. Die ihm zugrunde liegende Voraussetzung soll in § 1 an der Hand einer nach meiner Methode geführten Ableitung der Fejérschen speziellen Sätze klargestellt, und der Übergang genau beschrieben werden.

Im Anschluß daran stelle ich ein diesem modifizierten Ostwaldschen äquivalentes Prinzip auf, das eine Verallgemeinerung des Hamiltonschen ist.

2. Ich will in § 2 zeigen, daß der so verallgemeinerten Mechanik neue Analogien zum zweiten Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie entspringen.*)

---

§ 1.

II. Das Ostwaldsche Maximum-Problem für einen freien Punkt, wenn die Maximumseigenschaft in jedem Punkte der Bahn erfüllt sein soll.

Die Koordinaten eines freien materiellen Punktes von der Masse 1 seien mit x, y, z, kürzer mit q_i $(i = 1, 2, 3)$ bezeichnet, die lebendige Kraft sei T, die potentielle Energie $-U$, und die Gesamtenergie E, demnach

*) Dieser Aufsatz unterscheidet sich in § 2 wenig von meiner in Mathematikai Értesitö 1906 erschienenen Abhandlung; § 1 hingegen ist anders geordnet, ausführlicher und infolge der Darstellung meiner Bewegungsgleichungen mittels einer Verallgemeinerung des Hamiltonschen Prinzips wesentlich vereinfacht.

$$(1') \qquad T \equiv \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} q_i'^2 = \frac{1}{2} (x'^2 + y'^2 + z'^2),$$

$$(1'') \qquad E \equiv T - U.$$

Ich stelle mir die Aufgabe, die p. 431 und p. 435 gestellten Fragen der Fejérschen Arbeit nach den in meinem Aufsatze angewandten Methoden für einen in der Ebene oder im Raume frei beweglichen Punkt zu behandeln. Das Ostwaldsche Prinzip lautet bei diesen Fragen wie folgt:

Von allen möglichen Energieumwandlungen wird diejenige eintreten, die in gegebener Zeit vom Beginn der Bewegung an fortwährend den größtmöglichen Umsatz ergibt.

Das Ostwaldsche Problem ist daher wie folgt zu formulieren:

Der materielle Punkt M, dessen Lage M_0 und Geschwindigkeit v_0 zur Zeit $t = 0$ gegeben ist, bewege sich unter Einhaltung der Gleichung der lebendigen Kraft

$$(2) \qquad T - T_0 = U - U_0$$

und beschreibe die Bahn P; man vergleiche seine Bewegung mit der eines anderen zu derselben Zeit von derselben Anfangslage und mit derselben Anfangsgeschwindigkeit (wenn $v_0 = 0$ sein sollte, in derselben Richtung) ausgehenden Punktes $\bar{M}$, der ebenfalls an die Einhaltung der Gleichung (2) gebunden ist. Die Werte des Potentials U seien zur beliebig gewählten Zeit t_1 im Falle der Bewegung von M

$$U(x_1, y_1, z_1),$$

im Falle der Bewegung von $\bar{M}$

$$U(\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1).$$

Wie muß die Bewegung des Punktes M beschaffen sein, wenn die Ungleichung

$$U(x_1, y_1, z_1) > U(\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1)$$

bei willkürlich gewählter Zeit t_1 stattfinden soll?

Ich denke mir die Bahn P des Punktes M bestimmt, und vergleiche sie, von $t = 0$ angefangen, immer zu einer und derselben Zeit t mit einer und derselben (im übrigen beliebig herausgegriffenen) zulässigen Bahn $\bar{P}$ des Punktes $\bar{M}$; dann muß, da t_1 bei einer und derselben Bahn P von willkürlicher Größe sein soll, die Ungleichung

$$U(x, y, z) > U(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$$

von $t = 0$ an immerfort stattfinden, wenn x, y, z die Koordinaten von M und $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ die von $\bar{M}$ zur Zeit t sind.

Die Forderungen des Problems ziehen also notwendigerweise die Gültigkeit der Variationsgleichungen

$$\delta t = 0, \quad \delta(T - U) = 0, \quad \delta U = 0 \tag{3}$$

nach sich, die während der Bewegung zu jeder Zeit t einzuhalten sind. Ich schreibe an Stelle der Gleichungen (3) das mit ihnen äquivalente Gleichungssystem

$$\delta t = 0, \quad \delta T = 0, \quad \delta U = 0. \tag{3'}$$

a) Im Fall des ebenen Problems genüge ich der Gleichung

$$\delta U \equiv \frac{\partial U}{\partial x}\delta x + \frac{\partial U}{\partial y}\delta y \equiv X\delta x + Y\delta y = 0$$

mittels des Ansatzes

$$\delta x = \frac{Y}{R}\delta s, \quad \delta y = -\frac{X}{R}\delta s, \quad R^2 = X^2 + Y^2. \tag{4'}$$

Daraus ergibt sich

$$x'\delta x + y'\delta y = \frac{x'Y - y'X}{R}\delta s, \quad x''\delta x + y''\delta y = \frac{x''Y - y''X}{R}\delta s$$

und daher

$$\begin{aligned}\delta T \equiv \frac{d}{dt}(x'\delta x + y'\delta y) - x''\delta x - y''\delta y)\\ - \frac{d}{dt}\left(\frac{x'Y - y'X}{R}\delta s\right) - \frac{x''Y - y''X}{R}\delta s.\end{aligned} \tag{3'}$$

Da $\delta T = 0$ sein muß für alle Bahnen, die von der gegebenen Anfangslage auf verlangte Weise ausgehen und der gesuchten wirklichen Bahn unendlich nahe gelegen sind, also auch für eine Bahn, bei der δs in einem beliebigen Intervall konstant ist, so muß vor allem

$$\frac{d}{dt}\frac{x'Y - y'X}{R} - \frac{x''Y - y''X}{R} = 0,$$

daher für beliebige Bahnen

$$\frac{x'Y - y'X}{R}\frac{d\delta s}{dt} = 0$$

erfüllt sein. Mithin muß zu jeder Zeit $t > 0$ die Doppelgleichung

$$\frac{x'Y - y'X}{R} = \frac{x''Y - y''X}{R} = 0 \tag{5}$$

stattfinden.

Wenn also das Problem überhaupt eine Lösung hat, so kann die Bahn nur eine geradlinige sein und die Richtung der Kraft muß kontinuierlich mit der dieser geraden Bahn zusammenfallen. Da den Voraussetzungen gemäß den Kräften ein Potential zukommt, und die Bewegung dem Prinzip (2) der lebendigen Kraft unterworfen ist, so befriedigt

diese der geraden Kraftlinie entlang erfolgende Bewegung die Gesetze der Mechanik.

Daß aber diese Bewegung, falls die Anfangsgeschwindigkeit $= 0$ ist oder im allgemeineren Fall der Richtung nach mit der geraden Kraftlinie zusammenfällt, dem gestellten Maximumproblem auch entspricht, das folgt daraus, daß sie bei dauernd wachsendem Potential eine Brachistochrone ist.

Ist die Richtung der Anfangsgeschwindigkeit von der der Kraftlinie verschieden, so hat das Problem keine Lösung.

Die für diese Spezialfälle gefundenen Sätze von Fejér sind hiermit auch auf diesem Wege abgeleitet.

b) Im Falle eines im Raume frei beweglichen materiellen Punktes geschieht der Gleichung $\delta U = 0$ durch einen jeden der beiden Ansätze

$$(4'') \qquad \begin{aligned} &\delta x = \frac{Z}{R_1}\delta s, \quad \delta y = 0, \qquad \delta z = -\frac{X}{R_1}\delta s, \quad R_1^2 = X^2 + Z^2, \\ &\delta x = 0, \qquad \delta y = \frac{Z}{R_2}\delta s, \quad \delta z = -\frac{Y}{R_2}\delta s, \quad R_2^2 = Y^2 + Z^2 \end{aligned}$$

Genüge; im Sinne des Gleichungssystems (3′) hat daher (bei $\delta t = 0$) δT zu verschwinden, sobald man an Stelle von δx, δy, δz das eine oder das andere System substituiert. Daher gelten die in a) bewiesenen Gesetze auch für einen im Raume frei beweglichen Punkt.

III. Modifikation des Ostwaldschen Problems im Falle eines im Raume frei beweglichen Punktes.

Da das Ostwaldsche Maximumproblem zu Resultaten führt, die mit der Erfahrung nur in ganz speziellen Fällen übereinstimmen, so kann man aus ihm ein den Erfahrungen nicht widersprechendes Problem nur mittels Einschränkung des Variationsgebietes gewinnen. Ich will den Versuch machen, das Problem derart umzuformen, daß ich die Forderung, daß die Variationsgleichungen

$$\delta t = 0, \quad \delta T = 0, \quad \delta U = 0$$

von $t = 0$ an fortwährend gelten sollen, nur in gewissem sogleich näher zu beschreibendem Sinne aufrecht erhalte.

Substituiert man (bei $Z \neq 0$) die Lösung von $\delta U = 0$ nach δz, nämlich

$$\delta z = -\frac{X}{Z}\delta x - \frac{Y}{Z}\delta y$$

in $\delta T = 0$, so hat man wegen

$$(6') \qquad x'\delta x + y'\delta y + z'\delta z = \frac{x'Z - z'X}{Z}\delta x + \frac{y'Z - z'Y}{Z}\delta y \equiv P_1\delta x + Q_1\delta y,$$

$$(6'') \qquad x''\delta x + y''\delta y + z''\delta z = \frac{x''Z - z''X}{Z}\delta x + \frac{y''Z - z''Y}{Z}\delta y \equiv P_2\delta x + Q_2\delta y$$

die Variationsgleichung

$$\frac{d}{dt}(P_1\delta x + Q_1\delta y) - P_2\delta x - Q_2\delta y = 0. \tag{7}$$

Fordert man, wie beim Maximumproblem, daß diese Gleichung sowohl bei $\delta y = 0$ als auch bei $\delta x = 0$ erfüllt sei, so ist sie bei beliebigen δx, δy erfüllt, und man kommt auf die in II. beschriebenen Bahnen und sonstigen einschränkenden Bedingungen.

Fordert man, daß diese Gleichung zwischen δx und δy ohne weiteres bestehe, so zeichnet man damit gar keine Bewegung vor einer anderen aus, sondern definiert nur zu einer jeden beliebigen Bewegung zugehörige Scharen von variierten Bewegungen.

Man hat daher nur einen Weg: dieser ist, zu fordern, daß die Gleichung (7) nur dann erfüllt sei, wenn zwischen δx und δy irgend eine, am einfachsten lineare Gleichung

$$\alpha\delta x + \beta\delta y = 0 \tag{7'}$$

von $t = 0$ an fortwährend besteht, wo α und β durch Lage und Geschwindigkeit bestimmte, einstweilen unbekannte Koeffizienten sind. Die Forderung, daß $\delta U = 0$ sei, bleibt dabei natürlich aufrecht, steht aber der Forderung des Maximums für U fern.

Es sei dieser Weg gewählt. Dann folgt hier ebenso wie in IIa, daß zu jeder Zeit die Gleichungen gelten müssen

$$\frac{P_1\beta - Q_1\alpha}{(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{1}{2}}} = 0, \quad \frac{P_2\beta - Q_2\alpha}{(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{1}{2}}} = 0, \tag{7''}$$

d. i.

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{P_1}{Q_1} = \frac{P_2}{Q_2}. \tag{8'}$$

Da P_1 und Q_1 durch Lage und Geschwindigkeit ausgedrückt sind, so ist hiermit das Verhältnis der Koeffizienten α und β bestimmt, andererseits sagt die Gleichung

$$P_1 : Q_1 = P_2 : Q_2,$$

daß die Bewegung der Differentialgleichung

$$\begin{vmatrix} x'' & y'' & z'' \\ x' & y' & z' \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = 0 \tag{8''}$$

gemäß vor sich geht. Diese Gleichung spricht aus, daß die Kraft zu jeder Zeit in der Oszillationsebene der Bahn wirkt.

Man erhält dasselbe Resultat auf symmetrischem Wege, wenn man bedenkt, daß infolge der Gleichungen (7'), (7'') sowohl $P_1\delta x + Q_1\delta y$

als auch $P_2\delta x + Q_2\delta y$ verschwinden, mithin den Gleichungen (6′), (6″) gemäß

$$x'\delta x + y'\delta y + z'\delta z = 0, \tag{9′}$$

$$x''\delta x + y''\delta y + z''\delta z = 0 \tag{9″}$$

stattfinden. Nimmt man noch hinzu, daß

$$\delta U \equiv X\delta x + Y\delta y + Z\delta z = 0 \tag{9‴}$$

gefordert wird, so folgt aus diesen Gleichungen einerseits das Bestehen jener Determinantengleichung, andererseits das Verhältnis der Variationen $\delta x : \delta y : \delta z$. Man hat so den Satz, daß durch die aufgestellten Forderungen die Richtung der Verschiebungen δx, δy, δz in jedem Punkte im allgemeinen eindeutig bestimmt ist, daß sie nämlich mit der Binormale der Bahn zusammenfällt.

IV. Fortsetzung. Aus dem Satze, daß die Bewegung eines freien materiellen Punktes so vor sich geht, daß die Kraft immer in der Oskulationsebene der Bahn liegt, folgt, daß, sobald nur die Verschiebungen δx, δy, δz in allen Punkten der Bahn in die Binormale fallen, für eine jede der betrachteten variierten Bewegungen die Gleichungen

$$\delta T = 0, \quad \delta U = 0 \quad (\text{bei } \delta t = 0)$$

bestehen. Dieser Satz läßt sich in der folgenden Form umkehren:

Wenn für alle betrachteten variierten Bewegungen die Gleichungen $\delta T = 0$, $\delta U = 0$ (bei $\delta t = 0$) bestehen sollen, sobald nur die Verschiebungen δs auf den Erzeugenden einer Regelfläche liegen, deren Leitlinie die wirkliche Bahn des materiellen Punktes ist, so liegt die Kraft in der Oskulationsebene der Bahn, und die Erzeugenden der Regelfläche sind die Binormalen der Bahn.

Man bezeichne nämlich die Winkel zwischen der Verschiebung δs und der Geschwindigkeit v resp. der Beschleunigung p mit φ resp. ψ, so daß man hat

$$\sum_{i=1}^{3} q_i'\delta q_i = v\cos\varphi\delta s, \quad \sum_{i=1}^{3} q_i''\delta q_i = p\cos\psi\delta s. \tag{10}$$

Die Gleichung $\delta T = 0$ schreibt sich dann in der Form

$$\frac{d}{dt}(v\cos\varphi\delta s) - p\cos\psi\delta s = 0; \tag{10′}$$

diese soll von $t = 0$ an fortwährend gelten, wenn nur die variierte Bewegung die wirkliche zur Zeit $t = 0$ berührt usw., hingegen $\frac{d\delta s}{dt}$ eine beliebige kontinuierliche Funktion der Zeit ist. Nimmt man daher eine solche variierte Bahn an, in der δs auf einer beliebigen gewählten Strecke konstant ist, so folgt aus der Gleichung (10′), daß hier

$$\frac{d}{dt}(v\cos\varphi) - p\cos\psi = 0$$

ist; daher fällt aus der Gleichung (10′) das mit δs multiplizierte Glied ganz allgemein fort, und wir folgern aus ihr, daß

$$v\cos\varphi = 0$$

sein muß. Da mithin infolge der voranstehenden Gleichung auch $p\cos\psi = 0$ ist, so zieht man aus (10) den Schluß, daß die beiden Gleichungen

$$\sum_{i=1}^{3} q_i'\delta q_i = 0, \qquad \sum_{i=1}^{3} q_i''\delta q_i = 0$$

immer erfüllt sein müssen.

Da außerdem auch

$$\delta U \equiv \sum_{i=1}^{3} Q_i\delta q_i = 0$$

gefordert wird, so ist die Umkehrbarkeit des Satzes bewiesen.

Die Gleichungen (9′), (9″), die die Grundlage meiner Formulierung des Ostwaldschen Problems (l. c. p. 563) bilden, sind hiermit für den Fall eines im Raume frei beweglichen Punktes auf zwei Wegen verifiziert; und ich bemerke hier, daß in meiner (l. c. p. 562) gegebenen weniger genauen Ableitung dieselbe Auffassung bezüglich der Verschiebungen zugrunde liegt wie hier in IV, und daß bei der Folgerung, daß die Gleichungen (14′), (14″) stattfinden müßten, die Gleichungen (13′) und (13″) als linear heterogen $\left(\text{in } \frac{\delta x}{\delta s}, \frac{\delta y}{\delta s}, \frac{\delta z}{\delta s}\right)$ betrachtet wurden.

V. Modifikation des Ostwaldschen Problems im Falle eines freien Punktsystems. Die Ausdehnung des Beweises IIIa) auf ein freies Punktsystem liegt auf der Hand. Ich löse die Gleichung

$$\delta U \equiv \sum_{i=1}^{3n} \frac{\partial U}{\partial q_i}\delta q_i \equiv \sum_{i=1}^{3n} Q_i\delta q_i = 0 \tag{11′}$$

nach δq_{3n} auf und substituiere in $\delta T = 0$. Da

$$\sum_{i=1}^{3n} q_i'\,\delta q_i = \sum_{i=1}^{3n-1} \frac{q_i'\,Q_{3n-1} - q_{3n-1}'\,Q_i}{Q_{3n}}\delta q_i \equiv \sum_{i=1}^{3n-1} \bar{Q}_i\delta q_i, \tag{11″}$$

$$\sum_{i=1}^{2n} q_i''\delta q_i = \sum_{i=1}^{3n-1} \frac{q_i''\,Q_{3n-1} - q_{3n-1}''\,Q_i}{Q_{3n}}\delta q_i \equiv \sum_{i=1}^{3n-1} \bar{\bar{Q}}_i\delta q_i \tag{11‴}$$

ist, so hat man, wenn T die lebendige Kraft des materiellen Systems ist, die Gleichung

$$\delta T' = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{3n-1} \bar{Q}_i \delta q_i - \sum_{i=1}^{3n-1} \bar{\bar{Q}}_i \delta q_i = 0 \tag{12}$$

zu erfüllen, vorausgesetzt, daß zwischen den $\delta q_1, \delta q_2, \cdots, \delta q_{3n-1}$ die lineare Gleichung

$$\alpha_1 \delta q_1 + \alpha_2 \delta q_2 + \cdots + \alpha_{3n-1} \delta q_{3n-1} = 0 \tag{12'}$$

besteht, wo die Koeffizienten $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{3n-1}$ aus der Forderung zu bestimmen sind, daß die Gleichung $\delta T = 0$ eben mittels dieser linearen Gleichung (für alle zulässigen variierten Kurven) in demselben Sinne wie in IIIa) zu einer identischen wird.

Mittels Elimination von δq_{3n-1} hat man

$$\sum_{i=1}^{3n-1} \bar{Q}_i \delta q_i = \sum_{i=1}^{3n-2} \frac{\bar{Q}_i \alpha_{3n-1} - \bar{Q}_{3n-1}\alpha_i}{\alpha_{3n-1}} \equiv \sum_{i=1}^{3n-2} \bar{R}_i \delta q_i, \tag{13'}$$

$$\sum_{i=1}^{3n-1} \bar{\bar{Q}}_i \delta q_i - \sum_{i=1}^{3n-2} \frac{\bar{\bar{Q}}_i \alpha_{3n-1} - \bar{\bar{Q}}_{3n-1}\alpha_i}{\alpha_{3n-1}} \equiv \sum_{i=1}^{3n-2} \bar{\bar{R}}_i \delta q_i, \tag{13''}$$

und aus der Forderung, daß

$$\delta T = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{3n-2} \bar{R}_i \delta q_i - \sum_{i=1}^{3n-2} \bar{\bar{R}}_i \delta q_i \equiv 0$$

sein soll, folgert man, wie früher,

$$\bar{R}_i = \bar{\bar{R}}_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, 3n-2).$$

Mittels der Gleichungen (11''), (11'''), (13'), (13'') erhält man nun, daß die Gleichungen

$$\sum_{i=1}^{3n} q_i' \delta q_i = 0, \tag{11'''}$$

$$\sum_{i=1}^{3n} q_i'' \delta q_i = 0 \tag{11^{IV}}$$

erfüllt sein müssen, wenn gleichzeitig

$$\delta U \equiv \sum_{i=1}^{3n} Q_i \delta q_n = 0$$

ist; und zwar haben diese drei Gleichungen zu bestehen, wenn man, beliebige drei ausgenommen, alle übrigen $\delta q_i = 0$ setzt. Auf diese Weise ergeben sich $3n - 2$ voneinander unabhängige Bewegungsgleichungen

$$\begin{vmatrix} q_1'' & q_2'' & q_i'' \\ q_1' & q_2' & q_i' \\ Q_1 & Q_2 & Q_i \end{vmatrix} = 0 \qquad (i = 3, 4, \cdots, 3n) \tag{14}$$

und die Verhältnisse $\delta q_1 : \delta q_2 : \delta q^i$ $(i = 3, 4, \cdots, 3n)$. Zu den Bewegungsgleichungen gesellt sich noch die vorgeschriebene Gleichung

$$T - T_0 = U - U_0.$$

VI. Hamiltonsche Form des modifizierten Ostwaldschen Prinzips. Man kommt zu denselben Gleichungen sowohl in diesem Fall wie auch in den allgemeinsten Fällen, jedoch weit einfacher, wenn man das auf dieser Grundlage beruhende, in meiner Arbeit ausführlich dargestellte modifizierte Ostwaldsche Prinzip nach dem Hamiltonschen Vorbilde formuliert. Für den Fall eines nur holonomen Bedingungsgleichungen unterworfenen materiellen Systems lautet es wie folgt:

Es seien $q_1, q_2, \cdots, q_{n_1}$ die unabhängigen Koordinaten des materiellen Systems, und τ, v Funktionen (von t, T, $\cdots$), die wir einstweilen als irgendwie gegeben betrachten. Man drücke die lebendige Kraft T in den q_i, q_i' und das Potential U in den q_i aus.

Die Bewegungsgleichungen des materiellen Systems werden durch die Forderung geliefert, daß bei einer beliebigen Überführung aus der Anfangslage in die Endlage die symbolische Gleichung

$$\int_0^{t_1} (\tau\, \delta T + v\, \delta U)\, dt = 0 \qquad (\delta t = 0) \tag{15}$$

erfüllt sein soll.

Man hat nämlich bei der üblichen Bezeichnung

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial q_i'},$$

die identische Gleichung

$$\tau\, \delta T \equiv \sum_{i=1}^{n_1} \left[\left(\tau \frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{d(\tau p_i)}{dt} \right) \delta q + \frac{d}{dt} (\tau p_i\, \delta q_i) \right];$$

daher folgt aus der symbolischen Gleichung (15) auf bekanntem Wege, daß die Bewegungsgleichungen des Systems die folgenden sind:

$$\tau \frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{d(\tau p_i)}{dt} + v \frac{\partial U}{\partial q_i} = 0,$$

d. i.

$$\frac{\partial U}{\partial q_i} = (1 + \lambda) \left(\frac{dp_i}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q_i} \right) + \mu p_i, \tag{16}$$

$$(i = 1, 2, \cdots, n_1),$$

wo gesetzt ist

$$1+\lambda=\frac{\tau}{v}, \qquad \mu=\frac{1}{v}\frac{d\tau}{dt}. \tag{16'}$$

Ist $\tau=v=1$, so ist die symbolische Gleichung die Hamiltonsche und die Bewegung die zum Potential U gehörige natürliche.

Ist $\tau=-v=\frac{1}{T}$, so ist die symbolische Gleichung die zum Potential U gehörige brachistochronale; sie drückt demnach in diesem Falle den wesentlichen Teil der im Ostwaldschen Prinzip (bei fest gegebener Zeit) enthaltenen Forderung aus, — das von ihr nicht ausgedrückte bezieht sich nämlich bloß auf die Konstantenbestimmung.

Sind die Kräfte und Bedingungsgleichungen explizit unabhängig von t, und

$$\mu=-\frac{\lambda}{2T}\frac{dT}{dt},$$

so ist in der Bewegung das Prinzip (2) der lebendigen Kraft erfüllt. Ist $\lambda=0$, so ist die Bewegung die natürliche; ist $\lambda=-2$, so ist die Bewegung die brachistochronale. Ist λ beliebig, so hat man

$$\frac{\partial U}{\partial q_i}=\frac{dp_i}{dt}-\frac{\partial T}{\partial q_i}+\lambda A_i,$$

wo

$$A_i\equiv\frac{dp_i}{dt}-\frac{p_i}{2T}\frac{dT}{dt}-\frac{\partial T}{\partial q_i}.$$

Ist daher die Anfangsgeschwindigkeit des materiellen Systems $=0$, so verschwindet A_i beim Beginn der Bewegung, und die Beschleunigungen sind in diesem Zeitpunkt, falls λ endlich bleibt, dieselben wie bei der natürlichen Bewegung.*) Da nämlich T eine homogene quadratische Funktion von den q_i' ist, so verschwinden alle $\frac{\partial T}{\partial q_i}$; man hat ferner zu Beginn der Bewegung von unendlich Kleinen höherer Ordnung abgesehen

$$p_i=p_i'\Delta t, \qquad q_i'=q_i''\Delta t,$$

daher

$$\frac{p_i}{2T}\frac{dT}{dt}=\frac{p_i\sum(p_j'q_j'+p_jq_j'')}{2\sum p_jq_j'}=p_i'.$$

VII. Verallgemeinerte Hamiltonsche Form des Prinzips für den Fall von Ungleichungen. Im Hinblick auf die im § 2 folgende Anwendung mögen hier die Bewegungsgleichungen eines materiellen Punktsystems abgeleitet werden, zwischen dessen Koordinaten $q_1, q_2, \cdots, q_{n_1}$ durch Gleichungen oder Ungleichungen

$$F_j(q_1, q_2, \cdots, q_{n_1}, t)\gtreqless 0 \qquad (j=1, 2, \cdots, \nu) \tag{17}$$

*) Vergl. meine Arbeit p. 564, die Fejérsche Arbeit p. 434.

ausgedrückte Beziehungen stattfinden. An Stelle der symbolischen Gleichung (15) hat man dann

$$(15') \qquad \int_0^{t_1} (\tau \delta U + v \delta U) dt \gtrless 0 \qquad (v > 0, \delta t = 0)$$

zu setzen, wo zwischen den δq_i lineare Gleichungen bestehen, vorgeschrieben durch diejenigen Beziehungen F_j, die eben zur gegebenen Zeit erfüllt sein müssen.

Die Bewegungsgleichungen des materiellen Systems sind daher zur Zeit t

$$(18') \qquad \frac{\partial U}{\partial q_i} = (1+\lambda)\left(\frac{dp_i}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q_i}\right) + \mu p_i + \sum_{j=1}^{r} \bar{\lambda}_j \frac{\partial F_j}{\partial q_i},$$
$$(i = 1, 2, 3, \cdots, n_1),$$

wo λ und μ dieselbe Bedeutung haben wie in IV., $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \cdots, \bar{\lambda}_r$ hingegen Lagrangesche Multiplikatoren sind.

Das Prinzip der lebendigen Kraft soll nicht vorausgesetzt werden.

§ 2.

Analogien zum zweiten Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie.

VIII. Ich werde in den folgenden Betrachtungen ein materielles Punktsystem von der in VII. beschriebenen Art voraussetzen, jedoch einen Punkt von der Masse $m_i = m_{i+1} = m_{i+2}$ durch Cartesische Koordinaten q_i, q_{i+1}, q_{i+2} festlegen, die mit x_i bezeichnet werden sollen. Die Bewegungsgleichungen des Systems sind dann im Sinne von (18')

$$(18) \qquad X_i = (1+\lambda) m_i x_i'' + \mu m_i x_i' + \sum_{j=1}^{r} \bar{\lambda}_j \frac{\partial F_j}{\partial x_i},$$
$$(i = 1, 2, 3, \cdots, 3n).$$

Ich will mir die Bewegung fürs erste so vorstellen, daß das materielle Punktsystem sich in einem Mittel bewegt, das an seiner Bewegung auf folgende Weise teilnimmt: ein Teil des Mittels von der veränderlichen Masse λm_i um den Punkt m_i herum bewegt sich mit derselben Geschwindigkeit v_i wie m_i selbst; der übrige Teil des Mittels ruht und übt auf m_i eine Reibungskraft im entgegengesetzten Sinne der Geschwindigkeit v_i aus, deren Größe $= \mu m_i v_i$ ist, wo μ nicht negativ sei. Die beiden Größen λ und μ sollen für $t_0 \leqq t \leqq t_1$ eindeutig gegebene Funktionen von t sein, und der Anfangswert von λ sei gleich seinem Wert zur Zeit t_1.

Bezeichnet man die lebendige Kraft des materiellen Punktsystems mit T, so ist bei Zugrundelegung dieser Vorstellung die lebendige Kraft des mitbewegten Mittels $= \lambda T$, während

$$-\sum_{i=1}^{3n} \mu m_i x_i' x_i' dt = -2\mu T dt$$

die Arbeit der Reibungskräfte im Zeitelement dt darstellt.

Die Verbindungen zwischen den materiellen Punkten seien zweierlei: von der Zeit explizit unabhängige und solche, die von der Zeit abhängen. Im Falle der Verbindungen erster Art ist

$$\sum_{i=1}^{3n} \frac{\partial F_j}{\partial x_i} x_i' = 0;$$

im Falle der Verbindungen zweiter Art ist

$$\sum_{i=1}^{3n} \frac{\partial F_j}{\partial x_i} x_i' = -\frac{\partial F_j}{\partial t}.$$

Nun setze ich voraus, daß die Verbindungen dieser Art davon herrühren, daß das Punktsystem mit äußeren, nach gegebenem Gesetz sich bewegenden Massen zusammenhängt oder durch solche in der Bewegung beschränkt wird, so daß

$$\frac{\partial F_j}{\partial t} = \frac{\partial F_j}{\partial \mathfrak{a}_j} \mathfrak{a}_j' + \frac{\partial F_j}{\partial \mathfrak{b}_j} \mathfrak{b}_j' + \frac{\partial F_j}{\partial \mathfrak{c}_j} \mathfrak{c}_j'$$

ist, wo die $\mathfrak{a}_j$, $\mathfrak{b}_j$, $\mathfrak{c}_j$ die Koordinaten eines Punktes A_j bezeichnen, durch dessen Bewegung die jener äußern Masse M_j bestimmt wird, die die Verbindung F_j beeinflußt. Dann stellen aber die Ausdrücke

$$-\bar{\lambda}_j \frac{\partial F_j}{\partial \mathfrak{a}_j}, \quad -\bar{\lambda}_j \frac{\partial F_j}{\partial \mathfrak{b}_j}, \quad -\bar{\lambda}_j \frac{\partial F_j}{\partial \mathfrak{c}_j}$$

die auf die äußere Masse M_j infolge der Verbindung F_j ausgeübte Kraft dar, und daher ist

$$-\bar{\lambda}_j \left(\frac{\partial F_j}{\partial \mathfrak{a}_j} \mathfrak{a}_j' + \frac{\partial F_j}{\partial \mathfrak{b}_j} \mathfrak{b}_j' + \frac{\partial F_j}{\partial \mathfrak{c}_j} \mathfrak{c}_j' \right) dt = -\bar{\lambda}_j \frac{\partial F_j}{\partial t} dt$$

die infolge von F_j während der Zeit dt auf die Bewegung der äußern Masse durch unser materielles System geleistete Arbeit. Daher ist

$$-\sum_{j=1}^{\nu} \bar{\lambda}_j \sum_{i=1}^{3n} \frac{\partial F_j}{\partial x_i} x_i' dt$$

die während des Zeitelementes dt unserem Punktsystem von außen zu-

geführte Arbeit. Es gibt selbstverständlich viel allgemeinere Arten von Verbindungen, bei denen dasselbe zutrifft.

Setzen wir noch voraus, daß den Kräften X_i ein von der Zeit explizite unabhängiges Potential U zukommt, so ist die Summe

$$(19) \qquad d[(1+\lambda)T-U]+\sum_{j=1}^{\nu}\bar{\lambda}_j\sum_{i=1}^{3n}\frac{\partial F_j}{\partial x_i}x_i'\,dt\equiv dQ$$

d. i. der Zuwachs an totaler Energie (des durch das Mittel ergänzten materiellen Systems) minus der von außen dem System zugeführten Arbeit, wie aus dem Gleichungssystem (18) folgt,

$$(19') \qquad = Td\lambda-2\mu T dt.$$

Die Bewegung des durch das Mittel ergänzten materiellen Punktsystems befolgt demnach ein dem zweiten Hauptsatz der Wärmetheorie formal analoges Gesetz, und es ist von Interesse, daß im Falle eines reibungslosen Systems

$$dQ=Td\lambda,$$

also für einen Kreisprozeß im Verlauf der Zeit $t_0\leqq t\leqq t_1$, da λ zu Ende desselben zu seinem Anfangswert zurückkehrt,

$$\int\frac{dQ}{T}=0$$

sich ergibt, hingegen im Falle des Vorhandenseins einer Reibung an Stelle dieser Gleichung die Beziehung

$$\int\frac{dQ}{T}=-2\int\mu\,dt<0$$

gültig ist. Selbstverständlich gilt für einen vollen Kreisprozeß ebenso auch der Ausspruch

$$\int\frac{dQ}{Tf(\lambda)}\gtrless 0,$$

wenn nur $f(\lambda)$ eine reelle positive Funktion von λ bezeichnet.

IX. Eine zweite Interpretation der Gleichungen (18) ist die folgende: Es sei speziell

$$\mu=\frac{d\lambda}{dt},$$

so daß die Gleichungen (18) zu schreiben sind

$$(18') \qquad X_i=\frac{d}{dt}((1+\lambda)m_ix_i')+\sum_{j=1}^{\nu}\bar{\lambda}_j\frac{\partial F_j}{\partial x_i},\qquad (i=1,2,\cdots,3n).$$

Aus diesen folgt im Falle von Kräften, denen ein von der Zeit explizite unabhängiges Potential zukommt, die Gleichung:

$$(19') \qquad d((1+\lambda)T-U)+\sum_{j=1}^{r}\bar{\lambda}_j\sum_{i=1}^{3n}\frac{\partial F_j}{\partial x_i}x_i'\,dt=-Td\lambda.$$

Bei derselben Vorstellung von der Bewegung des Mittels, die wir in Nr. VIII. beschrieben, mit dem Unterschiede, daß jetzt Reibung ausgeschlossen ist, wird durch diese Gleichung ausgesprochen, daß die dem ergänzten Punktsystem zugeführte Energie

$$(19'') \qquad dQ=-Td\lambda$$

ist.

In den beiden Spezialfällen führt demnach die Vorstellung von dem Mitbewegtsein der umgebenden Materie zu ganz verschiedenen Resultaten; denn im ersten Fall war eine zugeführte positive Energie mit einer Zunahme, in diesem zweiten Fall hingegen mit einer Abnahme der mitbewegten Materie verbunden. Der Unterschied zwischen beiden wird durch das folgende mechanische Modell im weitern Sinn klargemacht: Man verbinde einmal zwei mit gleicher Geschwindigkeit v bewegte, keiner äußern Wirkung unterworfene Massen M und $Md\lambda$ starr miteinander, ein andres Mal die mit der Geschwindigkeit v bewegte Masse M mit der ruhenden Masse von der Größe $Md\lambda$; im ersten Fall ist die lebendige Kraft von $M+Md\lambda$ um $\frac{Mv^2}{2}d\lambda$ größer, im zweiten Fall (von unendlich Kleinen höherer Ordnung abgesehen) um $\frac{Mv^2}{2}d\lambda$ kleiner als die von M. Die Zunahme an Masse ist also im ersten Fall mit einer Zunahme, im zweiten Fall mit einer Abnahme der lebendigen Kraft verbunden. Wird umgekehrt die Masse $Md\lambda$ von der festen Verbindung mit M befreit und auf die Weise weggeführt, daß dabei kein Stoß erfolgt, so wird die lebendige Kraft von M um $\frac{Mv^2}{2}d\lambda$ kleiner sein, als die der vereinten Massen war. Es ist jedoch unmöglich, die Masse $Md\lambda$ auf eine Weise zu entfernen, daß dabei die lebendige Kraft der zurückgebliebenen Masse M sich vergrößere. Bei Voraussetzung negativer Massen $Md\lambda$, bei deren fester Verknüpfung mit M der Satz von der Erhaltung der Bewegungsgröße gültig bleiben soll, wird die Schwierigkeit gehoben. Im Fall von negativen Massen ist das Modell ein mechanisches im weitern Sinn. Denkt man sich demgemäß allgemeiner die Massen $m_i d\lambda$ mit den Anfangsgeschwindigkeiten v_i resp. 0 den Systempunkten m_i kontinuierlich (von t_0 bis zur Zeit t_1) zugeführt und mit denselben starr verknüpft, und sind die m_i dabei den freien Kräften X_i, den Widerstandskräften $\mu m_i x_i'$ und

den Verbindungen F kontinuierlich unterworfen, so bestehen für die Bewegung die Gleichungssysteme (18) resp. (18′), also auch die Analogien (19′), (19‴).

X. Ich vereinige die in VIII. und IX. beschriebenen Spezialfälle, indem ich setze

$$(18'') \qquad X_i = \lambda_1 m_i x_i' + \frac{d}{dt}((1+\lambda_2) m_i x_i') + r m_i x_i' + \sum_{j=1}^{\nu} \bar{\lambda}_j \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, \cdots, 3n);$$

dabei bestehen zwischen den früheren λ, μ und diesen λ_1, λ_2, r, (wo $r \geqq 0$ vorausgesetzt sei) die Gleichungen

$$(18''') \qquad \begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 &= \lambda, \\ r + \frac{d\lambda_2}{dt} &= \mu. \end{aligned}$$

Bei der soeben beschriebenen Vorstellung von der mitbewegten Materie des Mittels und bei denselben Annahmen bezüglich der Kräfte und der Verbindungen wie früher, folgt jetzt, daß die dem ergänzten materiellen System im Zeitelement zugeführte Energie

$$(19^{IV}) \qquad dQ = Td(\lambda_1 - \lambda_2) - 2rTdt$$

ist, wo dQ auch hier die linke Seite der Gleichung (19″) zum Ausdruck hat. Ist keine Reibung vorhanden, so hat man

$$(19^{V}) \qquad dQ = Td(\lambda_1 - \lambda_2).$$

Werden die Massen $m_i d\lambda$ in den Zeitelementen dt dem System kontinuierlich zugeführt, so eignet sich das, am Ende von Nr. X., beschriebene Modell selbstredend auch zur Darstellung der durch (18″) bestimmten Bewegung.

XI. Man kann an Stelle der in VIII. und IX. gegebenen Interpretationen auch die folgende setzen: Ich stelle mir die Größen $-\lambda_1 m_i x_i''$ und $-\lambda_2 m_i x_i''$ als von dem Mittel herrührende Kräfte vor; die diesen Kräften zukommende potentielle Energie ist bei konstanten Werten von λ_1 und λ_2 gewiß

$$(\lambda_1 + \lambda_2) T;$$

derselbe Ausdruck soll für den allgemeineren Fall veränderlicher λ_1 und λ_2 zur Definition der potentiellen Energie der Kräfte dienen. Für die im Zeitelement dem materiellen System zugeführte Energie dQ ergibt sich dann derselbe Ausdruck wie früher.

Die Vorstellung der mitbewegten Materie des Mittels ist gewiß anschaulicher; dafür ist die Vorstellung von Kräften, die das Mittel auf das in ihm bewegte materielle System ausübt, allgemeinerer Natur.

XII. Bei einem Versuche, das beschriebene mechanische Modell auf die Wärmebewegungen anzuwenden, ist vor allem die Frage zu beantworten,

welche Beziehungen zwischen der absoluten Temperatur ϑ und der Entropie S einerseits, und den Größen λ_1, λ_2 und T andererseits dann bestehen müssen? *Eine* Gleichung zwischen diesen Größen wird am einfachsten durch die Betrachtung idealer Gase erhalten. Die innere Energie eines idealen Gases von der Masse m ist nämlich

$$= m C_v \vartheta,$$

wo C_v die spezifische Wärme des Gases bei konstantem Volumen in dynamischem Maß bezeichnet und als vollständig konstant zu betrachten ist, da doch hier nur von einem idealen Zustande die Rede ist. Da die Anziehungskräfte zwischen den Molekülen eines idealen Gases zu vernachlässigen sind, so ist die innere Energie der Bewegung bei Zugrundelegung unserer Darstellung

$$= (1 + \lambda_1 + \lambda_2) T;$$

daraus ergibt sich die Beziehung

$$m C_v \vartheta = (1 + \lambda_1 + \lambda_2) T. \tag{20'}$$

Diese Gleichung soll im Falle eines beliebigen Körpers die absolute Temperatur *definieren*, wenn C_v eine dem Körper eigentümliche Konstante ist.

Es ist andererseits bei reversiblen Kreisprozessen ganz allgemein

$$dQ = m \vartheta dS;$$

da die Reibung bei umkehrbaren Vorgängen $= 0$ zu setzen ist, so haben wir bei Zugrundelegung unserer Darstellung im Sinne der Gleichung (19$^{\text{V}}$)

$$dQ = T d(\lambda_1 - \lambda_2)$$

zu setzen. Wir haben also die weitere Beziehung

$$m \vartheta dS = T d(\lambda_1 - \lambda_2). \tag{20''}$$

Aus den Gleichungen (20') und (20'') folgt daher

$$(1 + \lambda_1 + \lambda_2) dS = C_v d(\lambda_1 - \lambda_2), \tag{20'''}$$

Außer dieser ergibt sich keine weitere Beziehung zwischen λ_1, λ_2 und S; ich kann daher zwischen diesen Größen eine weitere Beziehung beliebig annehmen, wodurch ich eine unendliche Mannigfaltigkeit der möglichen Darstellungen erreiche.

Diese weitere Beziehung sei

$$\lambda_1 - \lambda_2 = f(S), \tag{21'}$$

wo $f(S)$ eine eindeutige, endliche, differentiierbare Funktion von S bedeutet; dann folgt aus (20''')

$$1 + \lambda_1 + \lambda_2 = C_v f'(S), \tag{21''}$$

wo $f'(S)$ die Derivierte von $f(S)$ nach S bedeutet und im Sinne von (20')

$= \frac{m\vartheta}{T}$, also gewiß nicht negativ ist. Wählt man $f(S)$ diesen Bestimmungen gemäß, so ist dadurch die Darstellung festgelegt, und einer jeden kontinuierlichen in sich zurückkehrenden Wertreihe des realen Parameters S entspricht ein geschlossener Kreisprozeß.

Die einfachsten Annahmen für $f(S)$ ergeben sich wie folgt:

Annahme α):

$$\lambda_2 = 0;$$

dann hat man (wenn C eine positive Konstante bezeichnet)

$$f(S) = Ce^{\frac{S}{C_v}} - 1 = \lambda_1.$$

Annahme β):

$$\lambda_1 = 0;$$

dann hat man

$$f(S) = -Ce^{-\frac{S}{C_v}} + 1 = -\lambda_2.$$

Annahme γ):

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 0;$$

dann hat man (wenn S_0 eine Konstante bezeichnet)

$$f(S) = \frac{S - S_0}{C_v} = 2\lambda_1 = -2\lambda_2.$$

Bei dieser Annahme hat man ferner im Sinne der Beziehung (20′)

$$T = mC_v\vartheta.$$

Diese Gleichung spricht im wesentlichen das bekannte Clausiussche Gesetz aus.*)

Annahme δ):

$$\lambda_1 + \lambda_2 = A\cos\frac{S - S_0}{c} \qquad (|A| < 1),$$

wo A und c Konstanten bedeuten. Die frühere Annahme ergibt sich hieraus für $\lim A = 0$.

Annahme ε):

$$\lambda_1 + \lambda_2 = A_1 e^{\frac{S}{c}} + A_2 e^{-\frac{S}{c}},$$

wo A_1, A_2 und c Konstanten bedeuten. Ich erwähne diese Annahme als allgemeineres Beispiel für eine reelle Darstellung unseres Modells, da man bei gehöriger Wahl der genannten Konstanten erreichen kann, daß sowohl $\lambda_1 + \lambda_2$ als auch λ_2 für beliebige Werte des reellen Parameters S nicht negativ sind.

*) Pogg. Ann. 100, S. 370. 1857.

Für die zugehörigen Werte von τ und v im verallgemeinerten Hamiltonschen Integral (in VII., (15')) findet man mittels (16'), (18'''), (21'), (21'') leicht

$$\tau = e^{-\frac{S}{2C_v}} (Cf'(S))^{\frac{1}{2}},$$

$$v = e^{-\frac{S}{2C_v}} (Cf'(S))^{-\frac{1}{2}},$$

also im einfachsten Fall γ)

$$\tau = v = e^{-\frac{S}{2C_v}};$$

Zur Festlegung der Bewegungsgleichungen muß nur noch S als Funktion von $T, U, \cdots$ gegeben sein.

Ich erlaube mir zum Schluß das dieser Annahme γ) entsprechende Modell näher zu beschreiben: die Ähnlichkeit mit dem altbekannten, zur Versinnlichung der elektrodynamischen Erscheinungen dienenden Modell verleiht ihm, wie ich glaube, besonderes Interesse.

Ich gehe von der Annahme aus, daß die Körper ein Aggregat von in lebhafter Bewegung begriffenen Molekülen sind; ein jedes Molekül bestehe aus einem ponderablen, von Atomen gebildeten Kern und einer imponderablen Hülle, deren Stoff auch den Kern durchdringt und in getrennte Massen von gleicher Größe und von entgegengesetztem Vorzeichen zerlegt ist; die Summe aus den absoluten Werten dieser getrennten Massen verhalte sich zur Masse des Kerns wie die Entropie zu der mit C_v bezeichneten eigentümlichen Konstanten des Körpers. Der intermolekulare Raum sei durch zweierlei Imponderabilien, deren Teile wir „Elektronen" nennen wollen, erfüllt: die Elektronen von der Art I seien in Bewegung begriffen mit Geschwindigkeiten, die in die der benachbarten Moleküle stetig übergehen, — die von der Art II ruhen; und beiderlei Arten befinden sich in polarisiertem Zustand, indem ein jedes Elektron in zwei gleiche „Ionen" von entgegengesetztem Vorzeichen zerfüllt. In ein jedes Molekül des Körpers dringen im Fall einer Wärmeaufnahme Ionen von beiderlei Arten in gleichen Massen ein, und zwar + Ionen von der Art I in die positiven, und — Ionen von der Art II in die negativen Teile der Hülle, wo alle die Geschwindigkeiten des Moleküls annehmen. Im Falle einer Wärmeabgabe hingegen treten — Ionen der Art I in die positiven, und + Ionen der Art II in die negativen Teile der Hülle.

Ist die Temperatur eines Körpers A kleiner als die eines angrenzenden Körpers B und der Unterschied unendlich klein, so strömen + Ionen von der Art I in die positiven, — Ionen von der Art II in die negativen

Teile der Hüllen der A Moleküle, und zu gleicher Zeit strömen $-$Ionen von der Art I in die positiven und $+$Ionen von der Art II in die negativen Massenteile der B Molekülhüllen in gleicher Menge ein, wo alle Ionen die Geschwindigkeiten der betreffenden Moleküle annehmen. Infolge der Gleichheit der entgegengesetzten Ströme und der unendlich kleinen Temperaturdifferenz von A und B ist die Wärmeabgabe von B gleich der Wärmeaufnahme von A.

Budapest, Februar 1906.

Verlag von B. G. TEUBNER in LEIPZIG.

Elektrizitäts-Durchgang in Gasen.

Von **J. J. Thomson,**

D. Sc. LL. D. Ph. D. for. M. Fellow etc.

Deutsche autorisierte Ausgabe unter Mitwirkung des Autors besorgt und ergänzt

von **Dr. Erich Marx,**

Privatdozent an der Universität Leipzig.

Mit 187 Figuren im Text. [VI u. 557 S.] gr. 8. 1906. geh. n. ℳ 18.—,

in Leinwand geb. n. ℳ 19.—

Mit der Entdeckung und dem Studium der Kathodenstrahlen, der Röntgenstrahlen, der photoelektrischen Erscheinungen und der Radioaktivität hat eine neue Epoche in der Physik begonnen. Das neu erforschte Gebiet, das je länger je mehr in die Interessensphären der gesamten Naturwissenschaft eingreift, hat durch J. J. Thomsons, des bahnbrechenden Erforschers, Hand seine Darstellung gefunden. Die 10 Kapitel des Werkes bilden in sich abgerundete Monographien der Spezialgebiete der Gasentladung, der Radioaktivität und der Röntgenstrahlung. In der deutschen Ausgabe ist den Fortschritten, die die Wissenschaft seit Erscheinen des englischen Werkes zu verzeichnen hat, Rechnung getragen. Die schnelle Aufklärung des Gebietes ist ein glänzender Beweis der Fruchtbarkeit gaskinetischer Vorstellungen, die stets auf den Mechanismus der physikalischen Vorgänge gerichtete Fragestellung zeitigte im Cavendish Laboratorium die ersten Messungen der Wanderungsgeschwindigkeiten der Ionen im Gase, führte J. J. Thomson zuerst an der Trockenbatterie, die Erscheinungen der Funkenentladung soll beherrschenden Idee, der Ionisation durch Ionenstoß, und in der Kathodenstrahlung die Elektronen erkennen gelehrt und hat neuerdings zu einer die Erscheinungen der Radioaktivität umfassenden, für die Vorstellung vom Aufbau der Materie tiefbedeutenden Hypothese geführt. Die vom Bilde ausgehende, vor Einsetzen der mathematischen Analyse die dem Vorgange zugrunde liegende Mechanik der Erscheinungen klar explizierende Darstellung wird es auch dem der analytischen Methode ferner Stehenden ermöglichen, einen Einblick in das neue Gebiet zu gewinnen. Um hier dem Leser das Studium zu erleichtern, ist die deutsche Ausgabe mit Marginalien versehen, die den Inhalt der einzelnen Abschnitte sofort beim Durchblättern erkenntlich machen.

Grünbaum's
Lehrbuch der Differential-Rechnung

für technische Lehranstalten, sowie zum Selbststudium

findet die beste Aufnahme in wissenschaftlichen Kreisen.

Soeben ist 2. Auflage wesentlich verbessert herausgegeben worden.

Preis geheftet Mk. 2.—, gebunden Mk. 2.25.

Zu beziehen durch alle Buchhandlungen oder direkt von **J. Frank's Verlagsbuchhandlung, Ludwig Lecturos in Würzburg.**

Verlag von B. G. TEUBNER in LEIPZIG.

Serret-Scheffers Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung.

Nach Axel Harnacks Übersetzung. In 3 Bänden. 3. Auflage, neu bearbeitet von

Dr. Georg Scheffers,

Professor an der Technischen Hochschule zu Darmstadt.

I. Band. **Differentialrechnung.** Mit 70 Figuren im Text. [XVI u. 824 S.] gr. 8. 1908. geb. in ℳ 12.—, in Leinwand geb. in ℳ 13.—

Diese neue Auflage ist durchaus neu bearbeitet. Vor allem war es nötig, die zu grossen Stoffmassen wieder wenig scharfen Zusammenfassungen zerlegt zu zerteilen. Deshalb waren kaum an Anfangen eine knappe Darstellung der Entwicklung des Zahlbegriffes gegeben. Von den wichtigen neueren Änderungen in Gefüge der Werke seien hier nur folgende erwähnt: Die Betrachtungen, die man über implizite gegebene Funktionen anstellte, wurden für sich in einem besonderen Kapitel zusammengefaßt, da sie ja auf viel weiter gehende Voraussetzungen basieren als die über explizite Funktionen. Der Begriff der Unabhängigkeit von Funktionen und Gleichungen und die Funktionaldeterminante wurden sehr ausführlich erörtert. Die Theorie der Maxima und Minima erfuhr eine scharfere Betrachtung. Bei der Anwendung der Differentialrechnung auf Kurven und Flächen hat die bisherige Bearbeitung fast durchweg die notwendige, einige exakte Bestimmung der Veränderlen der auftretenden Quadratwurzeln vermissen. Hierin wurde gründlich Wandel geschafft.

Kurz etwas bezeugt die bisher Vorzüge des vorliegenden Werkes so deutlich wie der Umstand, daß man bisher ausländische die vielen sprachlichen Unbeholfenheiten, die Harnack hinterlassen hat, das ganze Buch mußte in stilistischer Beziehung gründlich durchgearbeitet werden. Ferner wurden die Lehrsätze besonders formuliert. Das Figurenmaterial wurde vollständig neu hergestellt.

Verlag von B. G. TEUBNER in LEIPZIG.

Lehrbuch der analytischen Geometrie.

Von

Dr. L. Heffter, Professor an der Universität Kiel

und **Dr. C. Koehler,** Professor an der Universität Heidelberg.

I. Band. **Geometrie in den Grundgebilden erster Stufe und in der Ebene.** Mit 130 Figuren im Text. [XVI u. 526 S.] gr. 8. 1905. In Leinwand geb. in ℳ 14.—

Obwohl dieses Lehrbuch völlig elementar einsetzt und über quadratische Gleichungen nicht hinausgeht, hofft es den Leser dennoch in kurzer Zeit auf einen höheren wissenschaftlichen Standpunkt zu heben. Hierzu erwies es sich als zweckmäßig, mit der projektiven Geometrie zu beginnen, diese durch Auszeichnung der imaginären Ebene zunächst nur zur „affinen" Geometrie und diese weiß durch Auszeichnung des imaginären Kugelkreises innerhalb der imaginären Ebene zur „euklidischen" Geometrie, d. h. zu dem Gesamtbereich der geometrischen Eigenschaften zu erweitern. — Auch die äußere Einteilung: Gemäß in den Gebilden I. Stufe (Punktreihe, Strahlbüschel, Kreisenbüschel); II. Stufe (Ebene, Bündel), III. Stufe (Raum) rechtfertigt sich pädagogisch, indem sie jede Frage schon in dem Gebilde möglichst niederer Stufe zu erledigen gestattet und so zu einer natürlichen Entfaltung der Geometrie in den Gebilden höherer Stufe beiträgt. — Geeignete Aufgaben wollen zur Anwendung und Ergänzung der Theorie anregen. — Ein besonderer Anhang am Schluß des vorliegenden Bandes gibt das Notwendigste über die Determinantentheorie. — Band I ist der Geometrie in den Gebilden I. Stufe und in der (projektiven) Ebene gewidmet; Band II wird die Geometrie im Bündel und im Raum behandeln.

Verlag von B. G. TEUBNER in LEIPZIG.

Lehrbuch der Elastizität.

Von **A. E. H. Love,**
M. A., D. Sc., F. R. S., Professor an der Universität Oxford.

Autorisierte deutsche Ausgabe. Unter Mitwirkung des Verfassers besorgt von

Dr. Aloys Timpe,
Assistent an der Technischen Hochschule zu Danzig.

Mit 75 Abbildungen im Text. [XVI u. 604 S.] gr. 8. 1907. In Leinwand geb. u. ℳ 16.—

Der Love'sche „Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity" hat sich durch präzisen und klaren Darstellungsweise und des ersprießlichen Inhalts wegen auch in deutschen Mathematiker-, Physiker- und Ingenieurkreisen rasch eingebürgert. Eine deutsche Übersetzung der eben jetzt erscheinenden zweiten Auflage des englischen Werkes dürfte daher von vornherein auf die Sympathien vieler rechnen, um so mehr als wir, von den inzwischen veralteten klassischen Darstellungen der Elastizitätstheorie abgesehen, bisher kein umfassendes Lehrbuch der Elastizität in Deutschland besitzen. Der Charakter des Buches ist derselbe geblieben, wie ihn der Verfasser in seinem Vorwort zur 1. Auflage gekennzeichnet hat: ein vollständiger Abriß des gegenwärtigen Standes der Elastizitätstheorie, der in gleicher Weise auf die Behandlung der auftretenden mathematischen Probleme wie auf die unmittelbar für die praktischen Anwendungen fruchtbaren Untersuchungen eingeht. Dabei sind weitschweifige analytische Entwicklungen und Ausführungen von ausschließlich abstrakt-mathematischem Interesse, in denen sich die Elastiker der italienischen Schule zuweilen verlieren, ebenso wie technische Einzelheiten. Was die Anlage des Buches anbetrifft, so sind durch den im letzten Dezennium gewaltig angeschwollenen Stoff einschneidende Änderungen gegenüber der ersten Auflage nötig geworden. Überall sind, soweit irgend möglich, auch die neuesten einschlägigen Arbeiten mit berücksichtigt, wie auch aus der Fülle von Literaturnachweisen hervorgeht. — Die deutsche Ausgabe erstrebt in der Ausdrucksweise und speziell in der Terminologie eine möglichst getreue Wiedergabe der Eigenart des Originals.

Wahrscheinlichkeitsrechnung

u. ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik u. Lebensversicherung.

Von **Dr. Emanuel Czuber,**
Professor an der Technischen Hochschule zu Wien.

[XV u. 594 S.] gr. 8. 1903. In Leinwand geb. u. ℳ 24.—
(Auch in 2 Hälften geb. je u. ℳ 12.—)

Der Verfasser bietet in dem vorliegenden Buche eine Darstellung der Wahrscheinlichkeitstheorie und ihrer hauptsächlichsten Anwendungsgebiete: Fehlerausgleichung, mathematische Statistik und Lebensversicherungsrechnung.

In dem grundlegenden ersten Teile wird auf die fundamentalen Fragen der Wahrscheinlichkeitsrechnung eingegangen; eine große Auswahl von Problemen, darunter selbstverständlich die klassischen, ist dazu bestimmt, in den Geist der Wahrscheinlichkeitssätze und ihren richtigen Gebrauch einzuführen.

Der zweite Teil begründet die Fehlertheorie und die aus ihr entspringende Methode der kleinsten Quadrate; Beispiele aus verschiedenen Wissensgebieten geben eine zureichende Vorstellung von der Verwendung dieses wichtigen Instrumentes zur Bearbeitung von Beobachtungsergebnissen.

Im dritten Teile werden die modernen Hilfsmittel der mathematischen Beurteilung und Auswertung von Erfahrungstatsachen auf statistischem Gebiete erörtert, die Probleme der Sterblichkeits- und Invaliditätsmessung stehen im Vordergrunde der Betrachtung.

Der vierte Teil erklärt das Wesen und behandelt alle heutzutage üblichen Probleme der Lebensversicherungsrechnung; um auch einen Einblick in die Anwendung der hier maßgebenden Formeln und die aufretenden Zahlwerte zu gewähren, sind Tabellen und Rechnungsbeispiele in größerer Zahl eingefügt.

Mathematische Annalen.

Herausgegeben von F. Klein, W. v. Dyck, D. Hilbert, O. Blumenthal.

Neudruck der vergriffenen Bände.

Durch anastatischen Neudruck der seither vergriffenen Bände 3, 4, 5, 6, 7, 31, 32, 33, 50, 51, 52, 53, bin ich wieder in der Lage komplette Serien liefern zu können. Der Einzelpreis für diese Bände beträgt je 28 Mark.

Leipzig. B. G. Teubner.

INHALT.

Seite

Bemerkung zu dem Kontinuitätsbeweise für die Lösbarkeit des Riemannschen Problems. Von Ludwig Schlesinger in Klausenburg 379

Über asymptotische Darstellungen der Lösungen linearer Differentialsysteme als Funktionen eines Parameters. Von Ludwig Schlesinger in Klausenburg 377

Über lineare homogene Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit drei im Endlichen gelegenen wesentlich singulären Stellen. Von Richard Fuchs in Steglitz bei Berlin 401

Über die Abhängigkeit der Konvergenz einer Potenzreihe von der Konvergenz ihrer reellen oder imaginären Komponente. Von Rogen Kälmän in Göttingen. (Mit 1 Figur im Text) 433

Sur les fonctions dérivées. Par D. Pompeiu à Jassy 326

Bericht über den Stand der Herausgabe von Gauß' Werken. VII. Von Felix Klein in Göttingen 368

Die Fokaltheorie der linearen Strahlenkongruenzen. Von Stanislaus Jolles in Berlin 331

Über das Problem der Bewegung von vier Massenpunkten unter dem Einfluss von inneren Kräften. Von P. Worouets in Kiew 361

Über meine Modifikationen des Ostwaldschen Prinzips und über den zweiten Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie. Von Moritz Réthy in Budapest 413

Wir ersuchen unsere geehrten Herren Mitarbeiter, etwaige, den Abhandlungen beizufügende Figuren — gleichviel ob dieselben im Texte selbst oder auf besonderen Tafeln veröffentlicht werden sollen — im Interesse einer raschen und exakten Ausführung stets auf besonderen Blättern resp. möglich in der gewünschten Größe und in tadelloser präziser Zeichnung dem Manuskripte beilegen zu wollen. Außerdem wird um möglichst genaue Angabe der Adresse gebeten.

Die Redaktion.

☞ Jeder Band der Annalen besteht aus 4 Heften und umfaßt ca. 30 Druckbogen. Um jedoch in jedem Heft nur abgeschlossene Artikel zu geben, werden die einzelnen Hefte mitunter von ungleicher Stärke sein.

Der Preis für den Band von 4 Heften beträgt 20 Mark; jährlich erscheinen etwa 2 – 3 Hefte. Alle Buchhandlungen und Postanstalten nehmen Bestellungen an.

Verantwortl. Redaktoren: **F. Klein**, Göttingen, Wilh.-Weber-Str. 3, **W. v. Dyck**, München, Hilbertstr. 1½, **David Hilbert**, Göttingen, Wilh.-Weber-Str. 29, **Otto Blumenthal**, Aachen, Bötchenstraße 37.

Zusendungen sind zu richten an die Mitglieder der auf der Titelseite genannten Gesamtredaktion.

Hierzu Beilagen von B. G. Teubner in Leipzig, *welche wir der Beachtung unserer Leser bestens empfehlen.*

Reinde.

MATHEMATISCHE ANNALEN.

21
1907

BEGRÜNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN.

Unter Mitwirkung der Herren

PAUL GORDAN, ADOLPH MAYER, CARL NEUMANN, MAX NOETHER,
KARL VONDERMÜHLL, HEINRICH WEBER

gegenwärtig herausgegeben

von

Felix Klein
in Göttingen.

Walther v. Dyck
in München.

David Hilbert
in Göttingen.

Otto Blumenthal
in Aachen.

63. Band. 4. Heft.

Ausgegeben am 28. März 1907.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1907.

☞ Generalregister zu den Mathematischen Annalen. Band 1—50. Zusammengestellt von A. Sommerfeld. Mit einem Bildnis von A. Clebsch in Heliogravüre. [XI u. 202 S.] gr. 8. geh. n. Mk. 7.—

Grünbaum's

Lehrbuch der Differential-Rechnung

für technische Lehranstalten, sowie zum Selbststudium

findet die beste Aufnahme in wissenschaftlichen Kreisen.

Soeben ist 2. Auflage wesentlich verbessert herausgegeben worden.

Preis geheftet Mk. 2.—, gebunden Mk. 2.25.

Zu beziehen durch alle Buchhandlungen oder direkt von **J. Frank's Verlagsbuchhandlung, Ludwig Lazarus in Würzburg.**

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin.

Die philosophischen Grundlagen der Wissenschaften.

Vorlesungen gehalten an der Universität Berlin

von

Professor Dr. B. Weinstein.

[XIV u. 543 S.] 8. 1906. In Leinwand geb. 9 Mark.

Das Buch enthält eine Auseinandersetzung über die Grundlagen der Wissenschaften, vornehmlich der Naturwissenschaften. Zunächst wird der Inhalt der Grundlagen untersucht und sodann ein System der Grundlagen abgeleitet. Darauf folgt eine Darlegung der psychischen Tätigkeiten, die für die Ermittelung der Grundlagen maßgebend sind. Nach Beschreibung der Art, wie bei Gewinnung von Grundlagen vorgegangen wird, folgt eine Auseinandersetzung der Bezeichnungen unserer Wahrnehmungen der Außen- und Innenwelt, wobei insbesondere physiologische und psychologische Verhältnisse zur Sprache kommen. Hierauf werden die Hauptgrundlagen vom Standpunkte der Erfahrung und der Metaphysik einer genaueren Zergliederung und Untersuchung unterworfen. Insbesondere werden die Begriffe der Zeitlichkeit, Räumlichkeit, Substantialität und Ursächlichkeit behandelt, und im Anschluß an diese wird das Wesen von Zeit, Raum, Substanz und Ursache dargelegt. Den Schluß bildet die Behandlung derjenigen Grundlagen, die der Weiterbildung und Weiterleitung dienen, sowie der Grundlagen, aus denen Erklärungen der Natur- und Lebenserscheinungen fließen. Trotz strenger Wissenschaftlichkeit ist das Buch gemeinverständlich geschrieben, alle philosophischen Auseinandersetzungen sind durch Beispiele erläutert, und überall, wo eingehenderes Wissen erforderlich war, ist dieses zur Mitteilung gelangt. Fremder Wort ist auf beste Sprache gelegt. Das Buch ist für die weitesten Kreise bestimmt. Es soll den Gebildeten eine bessere Einsicht in das Wesen der Wissenschaften und in den Wert der Wissenschaften vermitteln.

Alle Gebiete des Wissens

zu pflegen ist dem Einzelnen heute nicht mehr möglich, aber an einem Punkte sich über den engen Kreis, in den ihn heute meist der Beruf einschließt, zu erheben, an einem Punkte die Freiheit und Selbständigkeit des geistigen Lebens zu gewinnen, sollte jeder versuchen. Wege dazu zeigt:

B. G. Teubners Allgemeiner Katalog

eine reich illustrierte, durch ausführliche Inhaltsangaben, Proben, Besprechungen eingehend über jedes einzelne Werk unterrichtende Übersicht aller derjenigen Veröffentlichungen des Verlages, die von allgemeinem Interesse für die weiteren Kreise der Gebildeten sind. Der Katalog liegt in folgenden Abteilungen vor, die jedem Interessenten auf Wunsch umsonst und postfrei übersandt werden:

1. *Allgemeines (Sammelwerke, Zeitschriften, Bildungswesen).*
2. *Klassisches Altertum (Literatur, Sprache, Mythologie, Religion, Kunst, Geschichte, Recht und Wirtschaft).*
3. *Religion. Philosophie.*
4. *Geschichte. Kulturgeschichte. Kunst.*
5. *Deutsche Sprache und Literatur.*
6. *Neuere fremde Literaturen und Sprachen.*
7. *Länder- u. Völkerkunde.*
8. *Volkswirtschaft. Handel und Gewerbe. Fortbildungsschulwesen.*
9. *Pädagogik.*
10. *Mathematik. Technik. Naturwissenschaften.*

Vollständige Ausgabe.

Leipzig, Poststraße 3. **B. G. Teubner.**

Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen.

I. Teil: Entwicklung willkürlicher Funktionen nach Systemen vorgeschriebener.*)

Von

Erhard Schmidt in Bonn.

Einleitung.

Fredholm**) hat eine Auflösungsformel der inhomogenen linearen Integralgleichung

$$f(s) = \varphi(s) - \lambda \int_a^b K(s, t)\, \varphi(t)\, dt$$

entdeckt, welche das Resultat enthielt, daß diese Gleichung nach $\varphi(s)$ stets aufgelöst werden kann, wenn λ nicht eine der Nullstellen einer gewissen ganzen Transzendenten $\delta(\lambda)$ ist. Für diese Werte von λ, in Hilbertscher Bezeichnung die sogenannten „*Eigenwerte des Kernes* $K(s,t)$“, und *nur* für diese läßt, wie Fredholm ferner zeigte, die homogene Gleichung

$$0 = \varphi(s) - \lambda \int_a^b K(s, t)\, \varphi(t)\, dt$$

Lösungen zu, die nach Hilbert „*zum betreffenden Eigenwert des Kernes* $K(s, t)$ *gehörige Eigenfunktionen*“ genannt werden. Hilbert***) hat die in der Theorie der partiellen und gewöhnlichen Differentialgleichungen so wichtigen Fragen nach der Existenz sogenannter Normalfunktionen und der Entwickelbarkeit willkürlicher Funktionen nach ihnen durch Einführung der Greenschen Funktion auf das viel allgemeinere Problem zurückgeführt, die Existenz von Eigenfunktionen eines in s und t *sym-*

*) Dieser Teil ist bis auf das neu hinzugekommene IV^te Kapitel, den § 13 und unwesentliche Änderungen in den übrigen Kapiteln ein Abdruck meiner im Juli 1905 erschienenen Göttinger Inauguraldissertation.

**) Acta Mathematica Bd. 27.

***) Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathem.-Phys. Cl. 1904 Heft 3.

metrischen Kernes $K(s,t)$ zu beweisen und die Gesetze der Entwickelbarkeit willkürlicher Funktionen nach ihnen aufzustellen. Die Greensche Funktion selbst wird durch eine Integralgleichung mit unsymmetrischem Kerne bestimmt, wobei die Fredholmschen Formeln zur Anwendung kommen. Indem nun Hilbert*) das für die willkürlichen stetigen Funktionen $x(s)$ und $y(t)$ gebildete Doppelintegral

$$\int_a^b\int_a^b K(s,t)\,x(s)\,y(t)\,ds\,dt$$

als quadratische Form von unendlich viel Variabelen betrachtet, erhält er durch Grenzübergang den der kanonischen Orthogonalzerlegung quadratischer Formen entsprechenden Zerlegungssatz

$$\int_a^b\int_a^b K(s,t)\,x(s)\,y(t)\,ds\,dt = \sum_\nu \frac{1}{\lambda_\nu}\int_a^b x(s)\,\varphi_\nu(s)\,ds\cdot\int_a^b y(t)\,\varphi_\nu(t)\,dt.$$

Hierbei durchläuft $\varphi_\nu(s)$ alle Eigenfunktionen des Kernes — jede mit einem solchen Faktor versehen, daß das Integral über ihr Quadrat 1 gibt — und λ_ν die zugehörigen Eigenwerte. Aus diesem Satze folgt zunächst unmittelbar, daß jeder symmetrische Kern Eigenfunktionen hat. Unter der Voraussetzung, daß der Kern ein *„allgemeiner"* ist, d. h. daß es zu jeder stetigen Funktion $\alpha(s)$ und jeder beliebig kleinen positiven Größe ε eine stetige Funktion $\beta(s)$ gibt, so daß

$$\int_a^b\{\alpha(s)-\int_a^b K(s,t)\,\beta(t)\,dt\}^2 ds < \varepsilon$$

ist, leitet dann Hilbert den grundlegenden Entwicklungssatz ab, daß jede unter Vermittelung einer stetigen Funktion $h(s)$ durch das Integral

$$g(s)=\int_a^b K(s,t)\,h(t)\,dt$$

darstellbare Funktion $g(s)$ in eine absolut und gleichmäßig konvergente, nach Eigenfunktionen des Kernes $K(s,t)$ fortschreitende Reihe entwickelbar ist. Diese Sätze enthalten implicite auch die analogen für die Integralgleichung

$$0=\psi(s)-\lambda\int_a^b G(s,t)\,p(t)\,\psi(t)\,dt$$

— wo $G(s,t)$ symmetrisch und $p(t)>0$ ist —, welche durch die Substitution

$$\sqrt{p(s)}\cdot\psi(s)=\varphi(s),\quad \sqrt{p(s)}\cdot G(s,t)\cdot\sqrt{p(t)}=K(s,t)$$

*) Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathem.-Phys. Cl. 1904 Heft 1.

auf die obige Gleichung

$$0 = \varphi(s) - \lambda \int_a^b K(s,t)\,\varphi(t)\,dt$$

zurückgeführt wird. Eine Reihe verwandter und z. T. äquivalenter Theoreme hat Stekloff*) mit Hilfe der von ihm weit ausgebildeten Schwarz-Poincaréschen Methoden erhalten.

Nach Erledigung einiger Hilfssätze im ersten Kapitel der vorliegenden Arbeit finden im zweiten die Hilbertschen Sätze, unter Vermeidung des Grenzübergangs aus dem Algebraischen, sehr einfache Beweise. Zunächst wird die Existenz von Eigenwerten durch ein Verfahren bewiesen, das, einem berühmten Beweise von H. A. Schwarz nachgebildet**), in der Sprache der Fredholmschen Formeln darauf hinauskommen würde, daß die Gleichung

$$\delta(\lambda) = 0$$

nach der Bernoullischen Methode aufgelöst wird. Aus dem Existenzsatz ergeben sich die Entwicklungssätze in analoger Weise, wie aus dem Fundamentalsatz der Algebra die Entwicklung einer ganzen Funktion in ein Produkt von Linearfaktoren. Hierbei stellt sich die Gültigkeit des Hilbertschen Entwicklungssatzes als unbeschränkt heraus, postuliert also insbesondere nicht die von Hilbert gemachte Voraussetzung der „Allgemeinheit" des Kernes. Das erwähnte, der kanonischen Orthogonalzerlegung quadratischer Formen entsprechende Hilbertsche Zerlegungstheorem kann dann aus dem Entwicklungssatz durch Integration unmittelbar gewonnen werden. Die durch mehrfache Nullstellen der Funktion $\delta(\lambda)$ verursachten Komplikationen treten bei der hier gegebenen Beweisanordnung nicht auf. Die Fredholmschen Formeln werden nicht benutzt, vielmehr liefert die unbeschränkte Gültigkeit der Entwicklungssätze für den Fall des symmetrischen Kernes eine neue Gestaltung der Auflösung der inhomogenen linearen Integralgleichung.***) Jede *unsymmetrische* lineare Integralgleichung läßt sich aber, wie in § 13 gezeigt wird, durch eine einfache Substitution auf eine *symmetrische* zurückführen.

Indem im dritten Kapitel die Voraussetzung der Symmetrie des Kernes fallen gelassen wird, werden die Funktionen $\varphi_\nu(s)$ und $\psi_\nu(s)$ dann als

*) Mémoires de l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg 1904 p. 7 etc. Annales de la Fac. de Toulouse 2^2 S., VI 1905.

**) H. A. Schwarz, Gesammelte Abhandlungen Bd. 1, S. 241—262.

***) Vergl. noch die während des Druckes vorliegender Arbeit von Hilbert veröffentlichte umfassende Neubegründung der Theorie der Integralgleichungen auf Grund der von ihm geschaffenen Theorie der quadratischen Formen von unendlich viel Variabelen. Göttinger Nachrichten 1906, Vierte und Fünfte Mitteilung.

ein zum Eigenwerte λ_ν gehöriges Paar von adjungierten Eigenfunktionen des Kernes $K(s, t)$ definiert, wenn die Gleichungen

$$\varphi_\nu(s) = \lambda_\nu \int_a^b K(s, t)\, \psi_\nu(t)\, dt$$

$$\psi_\nu(s) = \lambda_\nu \int_a^b K(t, s)\, \varphi_\nu(t)\, dt$$

bestehen; $\varphi_\nu(s)$ möge eine Eigenfunktion der ersten, $\psi_\nu(s)$ eine der zweiten Art heißen. Es ergeben sich dann die Entwicklungssätze in folgender Gestalt: Ist die stetige Funktion $g(s)$ unter Vermittelung der stetigen Funktion $h(s)$ durch das Integral

$$g(s) = \int_a^b K(s, t)\, h(t)\, dt$$

darstellbar, so ist $g(s)$ in eine absolut und gleichmäßig konvergente nach Eigenfunktionen erster Art fortschreitende Reihe entwickelbar; ist

$$g(s) = \int_a^b K(t, s)\, h(t)\, dt,$$

so läßt sich $g(s)$ in gleicher Weise nach Eigenfunktionen zweiter Art entwickeln. Aus diesen Sätzen wird durch Integration der der kanonischen Orthogonalzerlegung bilinearer Formen entsprechende Zerlegungssatz gewonnen

$$\int_a^b \int_a^b K(s, t)\, x(s)\, y(t)\, ds\, dt = \sum_\nu \frac{1}{\lambda_\nu} \int_a^b x(s)\, \varphi_\nu(s)\, ds \int_a^b y(t)\, \psi_\nu(t)\, dt.$$

Die Sätze des dritten Kapitels sind meines Wissens bisher nicht bekannt.

Die Entwicklungen von Funktionen zweier Variabelen nach Potenzen, nach trigonometrischen, nach Kugel- und vielen anderen Funktionen lassen sich in Gestalt einer Reihe schreiben, welche nach Produkten einer Funktion der einen Variabelen mit einer Funktion der anderen fortschreitet.

Im Anschluß an diese Bemerkung entspringt für die Variationsrechnung folgende Frage, welche den Gegenstand des vierten Kapitels bildet: Gegeben sei eine stetige Funktion $K(s, t)$ von zwei Variabelen s und t. Gesucht wird ein System von höchstens m Paaren einer stetigen Funktion von s und einer stetigen Funktion von t, so daß die Summe ihrer Produkte die gegebene Funktion $K(s, t)$ möglichst gut approximiert. Das Maß der Approximation, dessen Minimum die Problemstellung fordert, soll wie gewöhnlich durch das Doppelintegral über das Fehlerquadrat definiert werden. Es wird bewiesen, daß die Lösung des Problems durch die m ersten Paare adjungierter Eigenfunktionen des unsymmetrischen

Kernes $K(s,t)$ gebildet wird. Für das Maß der besten Approximation M_m ergibt sich die Formel

$$M_m = \int_a^b \int_a^b (K(s,t))^2 \, ds \, dt - \sum_{\nu=1}^{\nu=m} \frac{1}{\lambda_\nu^2},$$

wo λ_ν die m ersten Eigenwerte des Kernes $K(s,t)$ durchläuft, und es zeigt sich, daß das Maß der besten Approximation mit wachsendem m verschwindet.

Alle Sätze und Beweise der vier ersten Kapitel behalten ihre Gültigkeit, wenn s und t Punkte eines n-dimensionalen ganz im Endlichen liegenden, aus einer endlichen Anzahl analytischer Stücke bestehenden Gebildes in einem $(n+m)$-dimensionalen Raum bedeuten, und ds und dt die entsprechenden Elemente.

Das fünfte Kapitel setzt das zweite, dritte und vierte nicht voraus, sondern nur die im ersten bewiesenen Hilfssätze. Die Theorie der Entwicklung von Funktionen nach Potenzen und Polynomen, nach Fourierschen Reihen und unendlichen Reihen endlicher trigonometrischer Reihen, nach Kugelfunktionen und nach Normalfunktionen partieller und gewöhnlicher Differentialgleichungen legt die Frage nahe: Gegeben sei eine unendliche Reihe im Intervall $a \leqq x \leqq b$ definierter reeller stetiger Funktionen $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_\nu(x), \cdots$. Was sind die Bedingungen dafür, daß jede im Intervall $a \leqq x \leqq b$ definierte stetige Funktion sich in eine gleichmäßig konvergente, nach den Funktionen $\varphi_\nu(x)$ oder endlichen linearen Aggregaten derselben fortschreitende Reihe entwickeln läßt? Oder mit andern Worten: Was sind die Bedingungen dafür, daß jede im Intervall $a \leqq x \leqq b$ definierte stetige Funktion durch Funktionen des Funktionenkörpers, welcher aus der Reihe der $\varphi_\nu(x)$ durch die Operationen der Multiplikation mit Konstanten und der Addition entsteht, gleichmäßig approximiert werden kann? Und wenn das der Fall ist, wie bestimmen sich die Koeffizienten einer solchen Entwicklung?

Nennt man nun das gegebene Funktionensystem der $\varphi_\nu(x)$ dann ein *abgeschlossenes*, wenn es keine von Null verschiedene stetige Funktion $f(x)$ gibt, so daß für jedes ν

$$\int_a^b f(x) \varphi_\nu(x) \, dx = 0$$

ist, so erhellt vorweg, daß die *Abgeschlossenheit* des Systems der $\varphi_\nu(x)$ eine notwendige Bedingung für unsere Forderung darstellt.*) Anderenfalls müssten nämlich alle entwickelbaren Funktionen der Bedingung genügen,

*) Diese Bemerkung ist schon von J. P. Gram, Crelles Journal Bd. 94, S. 58 gemacht worden.

daß ihr Produkt, mit $f(x)$ von a bis b integriert, Null ergibt, und diese Bedingung würde z. B. von der Funktion $f(x)$ selber und allen genügend wenig von ihr abweichenden nicht erfüllt werden.

Es wird nun gezeigt, *daß ebenso wie die Abgeschlossenheit des vorgeschriebenen Funktionensystems eine notwendige Bedingung für unsere Forderung darstellt, die Abgeschlossenheit des Systems seiner zweiten Ableitungen eine hinreichende ist,* wenn noch nötigenfalls die Funktionen 1 und x adjungiert werden. *Ist die darzustellende Funktion einmal stetig differenzierbar, so ergeben sich für die Koeffizienten der Darstellung ganz allgemein gültige einfache Formeln.*

In einer an die hier vorliegende sich unmittelbar anschließenden Abhandlung wird zunächst eine neue und sehr einfache Methode zur Auflösung der linearen unsymmetrischen Integralgleichung auseinandergesetzt werden. Die dieser Methode zugrunde liegenden Prinzipien ermöglichen auch eine Behandlung der nicht linearen Integralgleichungen, welche den Gegenstand des zweiten Teiles dieser Abhandlung bilden wird. Unter einer nicht linearen Integralgleichung verstehe ich eine Funktionalgleichung, welche eine solche Bestimmung der gesuchten Funktionen fordert, daß eine gegebene Funktion einer konvergenten unendlichen Reihe gleich wird, deren Glieder aus den gesuchten Funktionen und weiteren gegebenen Funktionen durch die Operationen der Integration und Multiplikation und also auch Potenzierung zu positiven ganzzahligen Exponenten entstehen. So ist z. B.

$$f(s) - \int\int K(s, t, r)\,(\varphi(t))^m\,(\varphi(r))^n\,dt\,dr = 0,$$

wo $\varphi(s)$ gesucht und $f(s)$ und $K(s, t, r)$ gegeben sind, eine solche nicht lineare Integralgleichung. Ebenso nun wie die gewöhnliche nicht lineare Gleichung

$$y = f(x)$$

in der Umgebung einer Lösung eine und nur eine Lösung zuläßt, wenn $f'(x)$ nicht verschwindet, im anderen Falle aber Verzweigungen eintreten, so hängt auch der Lösbarkeitscharakter einer nicht linearen Integralgleichung in der Umgebung einer Lösung von einer abgeleiteten linearen Integralgleichung ab. Verschwindet für diese der Fredholmsche Nenner $\delta(\lambda)$ nicht, so hat die nicht lineare Integralgleichung in der Umgebung eine und nur eine Lösung, verschwindet aber $\delta(\lambda)$, so treten *funktionale* Verzweigungen ein, für welche es gelingt die den Puiseuxschen entsprechenden Sätze aufzustellen.

Diese Theoreme ermöglichen es z. B. bei den nicht linearen elliptischen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung die Abhängigkeit der Lösungsflächen von den Randwerten zu verfolgen und zwar mit vollständiger

Beherrschung der Verzweigungen d. h. derjenigen Lösungen, in deren Umgebung es für willkürlich aber wenig veränderte Randwerte nicht mehr eine sondern mehrere Lösungsflächen gibt. Der Verzweigungscharakter hängt davon ab, ob die Jacobische derivierte lineare Differentialgleichung bei den Randwerten Null von Null verschiedene Lösungen hat oder nicht, was durch die Betrachtung einer linearen Integralgleichung zu entscheiden ist.

Auch die von Poincaré entdeckte Bifurkation in der Theorie der rotierenden Gleichgewichtsfiguren ist eine solche Verzweigung einer nicht linearen Integralgleichung. In einer dritten Abhandlung werde ich diese und noch mehrere andere Anwendungen ausführlich auseinandersetzen.

Erstes Kapitel.

Vorbereitende Sätze über orthogonale Funktionen.

§ 1.

Die Besselsche und die Schwarzsche Ungleichung.

Es seien $\psi_1(x), \psi_2(x), \cdots, \psi_n(x)$ n stetige im Intervall $a \leqq x \leqq b$ definierte reelle Funktionen, welche sämtlich zueinander *orthogonal* sein, d. h. für jedes Paar voneinander verschiedener Indizes μ und ν der Gleichung

$$\int_a^b \psi_\mu(x)\,\psi_\nu(x)\,dx = 0$$

genügen mögen, und welche außerdem noch sämtlich *normiert* sein, d. h. für jedes ν der Gleichung

$$\int_a^b (\psi_\nu(x))^2 dx = 1$$

genügen mögen. Dann gilt für die beliebige reelle stetige Funktion $f(x)$ die *Besselsche Identität*

$$\int_a^b \Big(f(x) - \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \psi_\nu(x) \int_a^b f(y)\psi_\nu(y)\,dy\Big)^2 dx = \int_a^b (f(x))^2\,dx - \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \Big(\int_a^b f(y)\,\psi_\nu(y)\,dy\Big)^2$$

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=n} \Big(\int_a^b f(y)\,\psi_\nu(y)\,dy\Big)^2 \leqq \int_a^b (f(x))^2 dx.$$

Ist die gegebene Reihe der zueinander orthogonalen und normierten Funktionen unendlich, so ergibt diese letzte Ungleichung wegen des positiven Vorzeichens aller Summanden die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \Big(\int_a^b f(y)\,\psi_\nu(y)\,dy\Big)^2.$$

Es seien nun $f(x)$ und $\varphi(x)$ zwei reelle stetige Funktionen. Setzt man $\psi_1(x) = \frac{\varphi(x)}{\sqrt{\int_a^b (\varphi(y))^2 dy}}$, so ist $\psi_1(x)$ normiert, und die obige Besselsche Ungleichung für den Fall $n = 1$ ergibt

$$\left(\int_a^b f(x)\,\psi_1(x)\,dx\right)^2 \leqq \int_a^b (f(x))^2\,dx$$

$$\left(\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx\right)^2 \leqq \int_a^b (f(x))^2\,dx \cdot \int_a^b (\varphi(x))^2\,dx.$$

Das ist die bekannte *Ungleichung von Schwarz*. Die Besselsche Identität und alle in diesem Paragraphen aus ihr gezogenen Folgerungen bleiben gültig, wenn $f(x)$ eine reelle integrabele Funktion ist, deren Quadrat von a bis b integriert auch einen endlichen Wert gibt, woraus wegen

$$2\,f(x)\cdot\psi_\nu(x) \leqq (f(x))^2 + (\psi_\nu(x))^2$$

auch die Endlichkeit und Bestimmtheit von

$$\int_a^b f(x)\,\psi_\nu(x)\,dx$$

folgt.

§ 2.

Ein Konvergenzsatz.

Es sei $Q(z, x)$ innerhalb des Gebietes $a \leqq x \leqq b$, $a \leqq z \leqq b$ als reelle nach x integrabele Funktion von z und x definiert, und es gelte für $a \leqq z \leqq b$ die Ungleichung

$$\int_a^b (Q(z, x))^2\,dx \leqq A,$$

wo A eine Konstante bedeutet; es sei ferner $\psi_1(x), \psi_2(x), \cdots, \psi_\nu(x), \cdots$ eine unendliche Reihe reeller stetiger Funktionen, welche in der Bezeichnungsweise der vorigen Paragraphen normiert und zueinander orthogonal sein mögen. Dann konvergiert, wenn $f(x)$ eine beliebige reelle integrabele Funktion bedeutet, deren Quadrat von a bis b integriert auch einen endlichen Wert ergibt, die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \int_a^b f(y)\,\psi_\nu(y)\,dy \cdot \int_a^b Q(z, x)\,\psi_\nu(x)\,dx = \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} U_\nu(z)$$

für $a \leqq z \leqq b$ absolut und gleichmäßig; und zwar ist

$$\sum_{\nu=n}^{\nu=\infty} |U_\nu(z)| \leqq 2\sqrt{A}\sqrt{\sum_{\nu=n}^{\nu=\infty}\Big(\int_a^b f(y)\,\psi_\nu(y)\,dy\Big)^2},$$

wo der Ausdruck auf der rechten Seite, wegen der im vorigen Paragraphen bewiesenen Konvergenz der Reihe $\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty}\Big(\int_a^b f(y)\,\psi_\nu(y)\,dy\Big)^2$ mit wachsendem n verschwindet.

Beweis. Es ist

$$\sum_{\nu=n}^{\nu=n+m} |U_\nu(z)| = \sum_k U_k(z) - \sum_\varrho U_\varrho(z),$$

wo k diejenigen der Indizes $n, n+1, \cdots, n+m$ durchläuft, welche für den betrachteten Wert von z positiven Gliedern der Summe, und ϱ diejenigen, welche negativen entsprechen.

Vertauscht man auf der linken Seite das Summen- mit dem Integralzeichen, so ergibt sich gemäß der im vorigen Paragraphen gegebenen Ungleichung von Schwarz

$$\sum_k U_k(z) \leqq \sqrt{\int_a^b (Q(z,x))^2\,dx}\cdot\sqrt{\int_a^b\Big(\sum_k \psi_k(x)\int_a^b f(y)\,\psi_k(y)\,dy\Big)^2 dx}.$$

Da nun die Funktionen $\psi_k(x)$ zueinander orthogonal und normiert sind, so ist

$$\int_a^b\Big(\sum_k \psi_k(x)\int_a^b f(y)\,\psi_k(y)\,dy\Big)^2 dx = \sum_k\Big(\int_a^b f(y)\,\psi_k(y)\,dy\Big)^2$$

$$\leqq \sum_{\nu=n}^{\nu=\infty}\Big(\int_a^b f(y)\,\psi_\nu(y)\,dy\Big)^2$$

und mithin ist

$$\sum_k U_k(z) \leqq \sqrt{A}\sqrt{\sum_{\nu=n}^{\nu=\infty}\Big(\int_a^b f(y)\,\psi_\nu(y)\,dy\Big)^2}.$$

Dieselbe Ungleichung erhält man für

$$-\sum_\varrho U_\varrho(z),$$

und durch Addition dieser beiden Ungleichungen ergibt sich die zu beweisende.

Zusatz. Wählt man für $Q(z, x)$ diejenige unstetige Funktion, welche für $x \leqq z$ gleich $+1$ und für $x > z$ gleich 0 ist, so folgt, daß die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \int_a^b f(y)\,\psi_\nu(y)\,dy \cdot \int_a^z \psi_\nu(x)\,dx$$

für $a \leqq z \leqq b$ absolut und gleichmäßig konvergiert.

§ 3.

Ersetzung linear unabhängiger Funktionensysteme durch orthogonale.

Es seien $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_n(x)$ n für $a \leqq x \leqq b$ definierte reelle stetige Funktionen, die als linear unabhängig vorausgesetzt werden. Dann konstruieren wir die Funktionen*)

$$\psi_1(x) = \frac{\varphi_1(x)}{\sqrt{\int_a^b (\varphi_1(y))^2\,dy}}$$

$$\psi_2(x) = \frac{\varphi_2(x) - \psi_1(x)\int_a^b \varphi_2(z)\,\psi_1(z)\,dz}{\sqrt{\int_a^b \left(\varphi_2(y) - \psi_1(y)\int_a^b \varphi_2(z)\,\psi_1(z)\,dz\right)^2 dy}}$$

$$\vdots$$

$$\psi_n(x) = \frac{\varphi_n(x) - \sum_{\varrho=1}^{\varrho=n-1} \psi_\varrho(x)\int_a^b \varphi_n(z)\,\psi_\varrho(z)\,dz}{\sqrt{\int_a^b \left(\varphi_n(y) - \sum_{\varrho=1}^{\varrho=n-1} \psi_\varrho(y)\int_a^b \varphi_n(x)\,\psi_\varrho(x)\,dz\right)^2 dy}}.$$

Durch diese Formeln ist für jedes ν $\psi_\nu(x)$ rekursiv durch $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x), \cdots, \varphi_\nu(x)$ linear homogen mit konstanten Koeffizienten darstellbar und umgekehrt auch $\varphi_\nu(x)$ durch $\psi_1(x), \psi_2(x), \cdots, \psi_\nu(x)$. In keiner der Formeln kann nämlich der Nenner verschwinden; denn wäre ν der erste Index, für welchen das geschähe, so müßte

$$\varphi_\nu(x) - \sum_{\varrho=1}^{\varrho=\nu-1} \psi_\varrho(x)\int_a^b \varphi_\nu(z)\,\psi_\varrho(z)\,dz = 0$$

sein, und da die $\psi_\varrho(x)$ aus den $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_{\nu-1}(x)$ linear homogen

*) Im wesentlichen dieselben Formeln sind von J. P. Gram in der Abhandlung „Ueber die Entwickelung reeller Functionen in Reihen mittelst der Methode der kleinsten Quadrate", Crelles Journal Bd. 94, aufgestellt worden.

mit konstanten Koeffizienten zusammengesetzt werden können, so würde sich ein Widerspruch zur vorausgesetzten linearen Unabhängigkeit der Funktionen $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_n(x)$ ergeben. *Die Funktionen* $\psi_1(x), \psi_2(x), \cdots, \psi_n(x)$ *bilden ferner ein normiertes und orthogonales Funktionensystem* d. h. genügen den Gleichungen

$$\int_a^b \psi_\mu(x)\,\psi_\nu(x)\,dx = 0 \quad \text{oder} \quad 1,$$

je nachdem ν und μ verschieden oder gleich sind. Das ist zunächst klar für die Funktionen $\psi_1(x)$ und $\psi_2(x)$; nehmen wir nun das Normiertsein und die Orthogonalität des Funktionensystems $\psi_1(x), \psi_2(x), \cdots, \psi_{\nu-1}(x)$ an, so folgt dasselbe auch für das Funktionensystem $\psi_1(x), \psi_2(x), \cdots, \psi_{\nu-1}(x), \psi_\nu(x)$, denn es ist

$$\int_a^b (\psi_\nu(x))^2 dx = 1 \quad \text{und} \quad \int_a^b \psi_\nu(x)\,\psi_\varrho(x) = 0 \quad \text{für} \quad \varrho \leqq \nu - 1.$$

Wenn die Funktionen $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_{n-1}(x)$ zwar ein linear unabhängiges System bilden, aber nicht die Funktionen $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_n(x)$, dann ist die lineare Abhängigkeit der letzteren gegeben durch die Gleichung

$$\varphi_n(x) = \sum_{\varrho=1}^{\varrho=n-1} \psi_\varrho(x) \int_a^b \varphi_n(z)\,\psi_\varrho(z)\,dz = 0.$$

Denn verschwände dieser Ausdruck nicht identisch, so wären die Funktionen $\psi_1(x), \psi_2(x), \cdots, \psi_n(x)$ linear homogen mit konstanten Koeffizienten darstellbar durch die Funktionen $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_n(x)$ und mithin auch wegen der vorausgesetzten linearen Abhängigkeit der letzteren durch die Funktionen $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_{n-1}(x)$. Es müssen also die Funktionen $\psi_1(x), \psi_2(x), \cdots, \psi_n(x)$ linear voneinander abhängig sein. Das ist aber unmöglich; denn in einem orthogonalen System kann keine Gleichung von der Form

$$\sum_\nu c_\nu \psi_\nu(x) = 0$$

bestehen, wo nicht sämtliche $c_\nu = 0$ sind, wie sich durch Multiplikation dieser Gleichung mit $\psi_\nu(x)\,dx$ und Integration von a bis b ergibt.

Wir haben also in den Zählern der diskutierten Ausdrücke eine Reihe von linearen homogenen Formen der Funktionen $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_n(x)$, *deren Eigenschaft es ist, im Falle einer linearen Abhängigkeit zwischen den letzteren dieselbe durch das identische Verschwinden einer der Formen nicht bloß als notwendiges und hinreichendes Kriterium anzuzeigen, sondern auch darzustellen.*

Schlußbemerkung. Alle Formeln und Sätze dieses Kapitels mit Ausnahme des Zusatzes zu § 2 behalten ihre Gültigkeit, wenn x, y, z Punkte eines n-dimensionalen, ganz im Endlichen liegenden, aus einer endlichen Anzahl analytischer Stücke bestehenden Gebildes in einem $n+m$-dimensionalen Raum bedeuten, und dx, dy, dz die entsprechenden Elemente.

Zweites Kapitel.

Über die lineare symmetrische Integralgleichung.

§ 4.

Begriff der Eigenfunktion.

Es sei $K(s,t)$ eine für $a \leqq s \leqq b$, $a \leqq t \leqq b$ definierte, reelle, stetige Funktion, die in s und t symmetrisch ist. Dann heißt jede stetige, nicht identisch verschwindende, reelle oder komplexe Funktion $\varphi(s)$, welche identisch in s der Gleichung

$$\varphi(s) = \lambda \int_a^b K(s,t)\, \varphi(t)\, dt$$

genügt, wo λ eine Konstante bedeutet, eine zu dem betreffenden *Eigenwerte* von λ gehörige *Eigenfunktion des Kernes* $K(s,t)$.

Zwei zu verschiedenen Werten von λ *gehörige Eigenfunktionen* $\varphi_\mu(s)$ *und* $\varphi_\nu(s)$ *sind zueinander orthogonal*, d. h. genügen der Gleichung

$$\int_a^b \varphi_\mu(s)\, \varphi_\nu(s)\, ds = 0.$$

Denn es sei

$$\varphi_\mu(s) = \lambda_\mu \int_a^b K(s,t)\, \varphi_\mu(t)\, dt,$$

$$\varphi_\nu(s) = \lambda_\nu \int_a^b K(s,t)\, \varphi_\nu(t)\, dt;$$

multipliziert man die erste dieser Gleichungen mit $\lambda_\nu \varphi_\nu(s)\, ds$, die zweite mit $\lambda_\mu \varphi_\mu(s)\, ds$, integriert von a bis b und subtrahiert, so ergibt sich bei Berücksichtigung der Symmetrie von $K(s,t)$

$$(\lambda_\nu - \lambda_\mu) \int_a^b \varphi_\mu(s)\, \varphi_\nu(s)\, ds = 0,$$

woraus die zu beweisende Gleichung folgt.

Wäre $\varphi_\nu(s)$ eine zu einem komplexen Eigenwerte von $K(s,t)$ gehörige Eigenfunktion, so würde die zu $\varphi_\nu(s)$ konjugierte Funktion zum konjugierten Eigenwerte gehören, wegen der Verschiedenheit dieser beiden Eigenwerte müßten dann $\varphi_\nu(s)$ und die zu $\varphi_\nu(s)$ konjugierte Funktion zueinander orthogonal sein, was unmöglich ist, da das Integral über das Produkt zweier konjugierter Funktionen stets größer als 0 ist. *Also sind alle Eigenwerte des Kernes $K(s,t)$ reell.*

Ist $\psi(s)$ eine komplexe Eigenfunktion, so folgt, weil, wie eben gezeigt, der zugehörige Eigenwert reell sein muß, daß $\psi(s) = \varphi(s) + i\bar{\varphi}(s)$, wo $\varphi(s)$ und $\bar{\varphi}(s)$ *reelle* Eigenfunktionen desselben Eigenwertes sind. Aus diesem Grunde sollen in allen folgenden Sätzen dieses Kapitels nur die *reellen Eigenfunktionen* betrachtet und unter der Bezeichnung *„Eigenfunktion"* verstanden sein.

§ 5.

Das vollständige normierte Orthogonalsystem.

Die Anzahl linear unabhängiger zu einem bestimmten Eigenwerte λ gehöriger Eigenfunktionen ist endlich.

Beweis: Da jedes aus zum selben Eigenwerte gehörigen Eigenfunktionen mit konstanten Koeffizienten gebildete lineare homogene Aggregat wieder eine zum betreffenden Eigenwerte gehörige Eigenfunktion liefert, so ergibt die Konstruktion des § 3 zu jedem System von n linear unabhängigen zum Eigenwerte λ gehörigen Eigenfunktionen ein System von ebensovielen Eigenfunktionen desselben Eigenwertes, welche *normiert und zueinander orthogonal* sind; dieselben mögen jetzt durch $\varphi_1(s)$, $\varphi_2(s), \cdots, \varphi_n(s)$ bezeichnet werden. Die im § 1 gegebene Besselsche Ungleichung liefert dann für jedes s

$$\int_a^b (K(s,t))^2\,dt \geqq \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \Big(\int_a^b K(s,t)\,\varphi_\nu(t)\,dt\Big)^2 = \frac{1}{\lambda^2} \sum_{\nu=1}^{\nu=n} (\varphi_\nu(s))^2;$$

multipliziert man diese Ungleichung mit ds und integriert von a bis b, so ergibt sich bei Berücksichtigung der Gleichungen

$$\int_a^b (\varphi_\nu(s))^2\,ds = 1$$

die Beziehung

$$n \leqq \lambda^2 \int_a^b \int_a^b (K(s,t))^2\,ds\,dt,$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

Ist die Anzahl der linear unabhängigen zu einem Eigenwert gehörigen Eigenfunktionen gleich m, so heißt der betreffende Eigenwert ein m-facher.

Ein *vollständiges normiertes Orthogonalsystem des Kernes* $K(s,t)$ soll ein solches System von normierten und zueinander orthogonalen Eigenfunktionen dieses Kernes heißen, daß jede Eigenfunktion dieses Kernes sich linear homogen mit konstanten Koeffizienten durch eine endliche Anzahl von Funktionen des Systems darstellen läßt.

Die in der Darstellung einer Eigenfunktion durch Funktionen des Systems vorkommenden Funktionen desselben müssen alle zum selben Eigenwerte gehören wie die darzustellende Funktion; denn es sei die Gleichung

$$\psi(s) = \sum_{\nu} c_\nu \varphi_\nu(s)$$

eine solche Darstellung für die Eigenfunktion $\psi(s)$ durch Funktionen des Systems; dann ist wegen der Orthogonalität der letzteren

$$c_\nu = \int_a^b \psi(s)\, \varphi_\nu(s)\, ds,$$

und dieser Ausdruck verschwindet, wenn $\psi(s)$ und $\varphi_\nu(s)$ zu verschiedenen Eigenwerten gehören, wie im vorigen Paragraphen gezeigt wurde.

Man erhält ein solches vollständiges normiertes Orthogonalsystem des Kernes $K(s,t)$, *indem man zu jedem Eigenwerte* λ *durch die Konstruktion des* § 3 *ein System von ebenso vielen normierten und zueinander orthogonalen Eigenfunktionen bildet, als die Vielfachheit des betreffenden Eigenwertes beträgt.*

Durchläuft $\varphi_\varrho(t)$ eine beliebige endliche Anzahl von Funktionen eines vollständigen normierten Orthogonalsystems des Kernes $K(s,t)$ und λ_ϱ die entsprechenden Eigenwerte, so folgt aus der Besselschen Ungleichung

$$\int_a^b (K(s,t))^2\, dt \geqq \sum_{\varrho} \Big(\int_a^b K(s,t)\, \varphi_\varrho(t)\, dt \Big)^2 = \sum_{\varrho} \frac{1}{\lambda_\varrho^2} (\varphi_\varrho(s))^2,$$

$$\int_a^b \int_a^b (K(s,t))^2\, ds\, dt \geqq \sum_{\varrho} \frac{1}{\lambda_\varrho^2}.$$

Hieraus ergibt sich, daß die Eigenwerte des Kernes $K(s,t)$, *jeder nach seiner Vielfachheit gezählt, keine Häufungspunkte im Endlichen haben können. Also lassen sie sich ihrem absoluten Betrage nach in eine Reihe anordnen, und wenn es ihrer unendlich viele gibt, so wachsen die absoluten Beträge über alle Grenzen.*

§ 6.

Die iterierten Kerne.*)

Wir definieren

$$K^1(s,t) = K(s,t),$$

$$K^2(s,t) = \int_a^b K(s,r)\, K^1(r,t)\, dr,$$

$$K^\nu(s,t) = \int_a^b K(s,r)\, K^{\nu-1}(r,t)\, dr.$$

Denkt man sich dann $K^{n+1}(s,t)$ als n-faches Integral über das Produkt von $n+1$ Kernen explizite ausgedrückt, so erhellt sofort

$$K^{\mu+\nu}(s,t) = \int_a^b K^\mu(s,r)\, K^\nu(r,t)\, dr, \tag{1}$$

$$K^\nu(s,t) = K^\nu(t,s).$$

Ferner kann keine der Funktionen $K^n(s,t)$ identisch in s und t verschwinden. Denn wäre

$$K^n(s,t) = 0,$$

so wäre auch

$$K^{n+1}(s,t) = 0,$$

und gemäß (1) wäre auch

$$\int_a^b K^{n_1}(s,r)\, K^{n_1}(r,t)\, dr = 0,$$

wo n_1 die ganze unter den beiden Zahlen $\frac{n}{2}$ und $\frac{n+1}{2}$ bedeutet; mithin wäre auch

$$0 = \int_a^b K^{n_1}(s,r)\, K^{n_1}(r,s)\, dr = \int_a^b (K^{n_1}(s,r))^2\, dr,$$

woraus das in s und t identische Verschwinden von $K^{n_1}(s,t)$ folgen würde. Durch genügend häufige Wiederholung dieses Schlußverfahrens würde sich das identische Verschwinden von $K(s,t)$ im Widerspruch zur Voraussetzung ergeben.

Es sei

$$\varphi(s) = \lambda \int_a^b K(s,t)\, \varphi(t)\, dt.$$

Dann ist

$$\varphi(s) = \lambda^n \int_a^b K^n(s,t)\, \varphi(t)\, dt.$$

*) Vergl. H. A. Schwarz l. c. Fredholm l. c. S. 384. Hilbert l. c. S. 244—247.

Es ist also jede Eigenfunktion des Kernes $K(s,t)$ auch eine Eigenfunktion des Kernes $K^n(s,t)$. Ist andererseits

$$\psi(s) = c\int_a^b K^n(s,t)\,\psi(t)\,dt,$$

so definiere man die Funktionen $\chi_\nu(s)$ durch die Gleichungen

$$n\chi_\nu(s) = \psi(s) + h_\nu\int_a^b K(s,t)\,\psi(t)\,dt + h_\nu^2\int_a^b K^2(s,t)\,\psi(t)\,dt + \cdots$$
$$+ h_\nu^{n-1}\int_a^b K^{n-1}(s,t)\,\psi(t)\,dt \qquad (\nu = 1, 2, 3, \cdots, n),$$

wobei h_ν die n Wurzeln der Gleichung $h^n = c$ durchläuft. Dann ist, weil $\sum_{\nu=1}^{\nu=n} h_\nu^k$ nur dann von Null verschieden ist, wenn k durch n teilbar ist,

$$\psi(s) = \sum_{\nu=1}^{\nu=n}\chi_\nu(s). \tag{2}$$

Ferner erhält man

$$\chi_\nu(s) = h_\nu\int_a^b K(s,t)\,\chi_\nu(t)\,dt.$$

Also sind die $\chi_\nu(s)$, sofern sie nicht identisch verschwinden, was wegen (2) nicht für alle ν der Fall sein kann, Eigenfunktionen des Kernes $K(s,t)$. Da derselbe nach § 4 nur reelle Eigenwerte hat, muß $\chi_\nu(s)$ für alle nicht reellen h_ν identisch verschwinden. Ist folglich n ungerade, und bezeichnet man mit $h_1 = \sqrt[n]{c}$ die reelle Wurzel der Gleichung $h^n = c$, so ist

$$\psi(s) = \sqrt[n]{c}\int_a^b K(s,t)\,\psi(t)\,dt.$$

Ist aber n gerade, so muß $c > 0$ sein, und wenn dann $h_1 = +\sqrt[n]{c}$, $h_2 = -\sqrt[n]{c}$ die beiden reellen Wurzeln der Gleichung $h^n = c$ bezeichnen, so ist

$$\psi(s) = \chi_1(s) + \chi_2(s),$$
$$\chi_1(s) = +\sqrt[n]{c}\int_a^b K(s,t)\,\chi_1(t)\,dt,$$
$$\chi_2(s) = -\sqrt[n]{c}\int_a^b K(s,t)\,\chi_2(t)\,dt,$$

wobei noch eine der beiden Funktionen $\chi_1(s)$ und $\chi_2(s)$ identisch verschwinden kann. *Ist also n ungerade, so ist jede Eigenfunktion von*

$K^n(s,t)$ auch eine Eigenfunktion von $K(s,t)$; ist aber n gerade, so ist jede Eigenfunktion von $K^n(s,t)$ entweder eine Eigenfunktion von $K(s,t)$ oder die Summe zweier solcher.

Jedes vollständige normierte Orthogonalsystem des Kernes $K(s,t)$ ist auch ein solches für den Kern $K^n(s,t)$.

§ 7.

Fundamentalsatz.

Zu jedem nicht identisch verschwindenden Kerne $K(s,t)$ gibt es mindestens eine Eigenfunktion. Den Beweis dieses Fundamentalsatzes lasse ich, um hier den Ideengang nicht zu unterbrechen, in § 11 nachfolgen.

§ 8.

Entwicklung des Kernes und seiner Iterationen.*)

Es mögen die Funktionen $\varphi_1(s), \varphi_2(s), \cdots, \varphi_\nu(s), \cdots$ ein vollständiges normiertes Orthogonalsystem des Kernes $K(s,t)$ bilden, denen die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_\nu, \cdots$ der absoluten Größe nach geordnet entsprechen mögen. *Wenn dann die Reihe*

$$\sum_\nu \frac{\varphi_\nu(s)\,\varphi_\nu(t)}{\lambda_\nu}$$

gleichmäßig für $a \leqq s \leqq b$, $a \leqq t \leqq b$ konvergiert, so ist

$$K(s,t) = \sum_\nu \frac{\varphi_\nu(s)\,\varphi_\nu(t)}{\lambda_\nu}; \tag{3}$$

insbesondere ergibt sich hieraus, daß diese Gleichung stets gültig ist, wenn die Anzahl der Eigenfunktionen des vollständigen normierten Orthogonalsystems endlich ist.

Beweis: Wir setzen:

$$K(s,t) - \sum_\nu \frac{\varphi_\nu(s)\,\varphi_\nu(t)}{\lambda_\nu} = Q(s,t).$$

Dann ist $Q(s,t)$ auch eine stetige symmetrische Funktion von s und t, und es ist

$$\int_a^b Q(s,t)\,\varphi_\nu(t)\,dt = 0 \tag{4}$$

für alle Werte von ν. Wäre nun $Q(s,t)$ nicht identisch Null, so müßte

*) Vergl. Hilbert l. c. S. 69—72. — Stekloff l. c. S. 404—425.

es nach dem Fundamentalsatz des vorhergehenden Paragraphen eine stetige Funktion $\psi(s)$ geben, so daß

$$\psi(s) = c\int_a^b Q(s,t)\,\psi(t)\,dt$$

ist. Aus (4) folgt, daß für alle Werte von ν

$$\int_a^b \psi(s)\,\varphi_\nu(s)\,ds = 0, \tag{5}$$

mithin ist auch

$$\int_a^b Q(s,t)\,\psi(t)\,dt = \int_a^b K(s,t)\,\psi(t)\,dt,$$

also ist

$$\psi(s) = c\int_a^b K(s,t)\,\psi(t)\,dt,$$

$\psi(s)$ wäre also eine Eigenfunktion des Kernes $K(s,t)$, welche wegen ihrer durch Gleichung (5) gegebenen Orthogonalität zu allen Funktionen $\varphi_\nu(s)$ sich nicht durch eine endliche Anzahl von ihnen linear homogen mit konstanten Koeffizienten darstellen ließe — im Widerspruch zur Voraussetzung, daß die Funktionen $\varphi_1(s), \varphi_2(s), \cdots, \varphi_\nu(s), \cdots$ ein *vollständiges* normiertes Orthogonalsystem des Kernes $K(s,t)$ bilden. Also ist $Q(s,t)$ identisch gleich Null, was zu beweisen war.

Hieraus schließen wir: *es ist stets*

$$K^4(s,t) = \sum_\nu \frac{\varphi_\nu(s)\,\varphi_\nu(t)}{\lambda_\nu^4} \tag{6}$$

und die Reihe auf der rechten Seite konvergiert absolut und gleichmäßig. Denn da nach § 6 die Funktionen $\varphi_\nu(s)$ auch ein vollständiges normiertes Orthogonalsystem des Kernes $K^4(s,t)$ bilden, denen die Eigenwerte λ_ν^4 entsprechen, so folgt unsere Behauptung aus der eben bewiesenen, wenn nur die absolute und gleichmäßige Konvergenz der Reihe rechts dargetan werden kann. Es ist aber

$$\sum_{\nu=n}^{\nu=n+m} \left|\frac{\varphi_\nu(s)\,\varphi_\nu(t)}{\lambda_\nu^4}\right| \leqq \frac{1}{2\lambda_n^2}\left(\sum_{\nu=n}^{\nu=n+m}\frac{(\varphi_\nu(s))^2}{\lambda_\nu^2} + \sum_{\nu=n}^{n=n+m}\frac{(\varphi_\nu(t))^2}{\lambda_\nu^2}\right)$$

und da nach der Besselschen Ungleichung

$$\int_a^b (K(s,t))^2\,dt \geqq \sum_{\nu=n}^{\nu=n+m}\left(\int_a^b K(s,t)\,\varphi_\nu(t)\,dt\right)^2 = \sum_{\nu=n}^{\nu=n+m}\frac{(\varphi_\nu(s))^2}{\lambda_\nu^2},$$

so folgt

$$\sum_{\nu=n}^{\nu=n+m} \frac{\varphi_\nu(s)\,\varphi_\nu(t)}{\lambda_\nu^4} \leqq \frac{1}{\lambda_n^2} \int_a^b (K(s,t))^2\,dt,$$

woraus die zu beweisende absolute und gleichmäßige Konvergenz sich ergibt.

§ 9.

Entwicklung willkürlicher Funktionen.*)

Es mögen wie im vorigen Paragraphen die Funktionen $\varphi_1(s), \varphi_2(s), \cdots, \varphi_\nu(s), \cdots$ *ein vollständiges normiertes Orthogonalsystem des Kernes* $K(s,t)$ *bilden, denen die Eigenwerte* $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_\nu, \cdots$ *dem absoluten Betrage nach geordnet entsprechen mögen. Ist dann* $h(s)$ *eine stetige Funktion, so daß*

$$\int_a^b K(s,t)\,h(t)\,dt = 0$$

ist, dann ergibt sich durch Multiplikation dieser Gleichung mit $\varphi_\nu(s)\,ds$ *und Integration von* a *bis* b *die für alle* ν *gültige Gleichung*

$$\int_a^b h(s)\,\varphi_\nu(s)\,ds = 0.$$

Umgekehrt folgt aber auch aus dem Bestehen dieser Gleichungen für alle ν *die Gleichung*

$$\int_a^b K(s,t)\,h(t)\,dt = 0.$$

Beweis. Multipliziert man die im vorigen Paragraphen bewiesene Gleichung

$$K^4(s,t) = \sum_\nu \frac{\varphi_\nu(s)\,\varphi_\nu(t)}{\lambda_\nu^4}$$

mit $h(s)\,h(t)\,ds\,dt$ und integriert nach s und t von a bis b, so folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b \int_a^b K^4(s,t)\,h(s)\,h(t)\,ds\,dt \\ &= \int_a^b dr \int_a^b K^2(s,r)\,h(s)\,ds \int_a^b K^2(t,r)\,h(t)\,dt \\ &= \int_a^b dr \left(\int_a^b K^2(s,r)\,h(s)\,ds\right)^2; \end{aligned}$$

*) Vergl. Hilbert l. c. S. 72—78. Stekloff l. c. S. 404—425.

mithin ist identisch in r

$$\int_a^b K^2(s,r)\,h(s)\,ds = 0;$$

daher ist auch

$$0 = \int_a^b \int_a^b K^2(s,t)\,h(s)\,h(t)\,ds\,dt,$$

und durch Wiederholung des eben angewandten Schlußverfahrens ergibt sich identisch in r

$$\int_a^b K(r,s)\,h(s)\,ds = 0,$$

was zu beweisen war.

Es sei die stetige Funktion $g(s)$ darstellbar durch die Gleichung

$$g(s) = \int_a^b K(s,t)\,p(t)\,dt,$$

wo $p(t)$ eine stetige Funktion bedeutet, dann ist

$$g(s) = \sum_\nu \varphi_\nu(s) \int_a^b g(t)\,\varphi_\nu(t)\,dt = \sum_\nu \frac{\varphi_\nu(s)}{\lambda_\nu} \int_a^b p(t)\,\varphi_\nu(t)\,dt$$

$$= \sum_\nu \int_a^b K(s,t)\,\varphi_\nu(t)\,dt \int_a^b p(t)\,\varphi_\nu(t)\,dt,$$

und die Reihe rechts konvergiert absolut und gleichmäßig.

Beweis. Aus der dritten Darstellungsform ihres allgemeinen Gliedes erlaubt uns der in § 2 bewiesene Konvergenzsatz die behauptete absolute und gleichmäßige Konvergenz der Reihe abzulesen.

Setzt man

$$g(s) - \sum_\nu \varphi_\nu(s) \int_a^b g(t)\,\varphi_\nu(t)\,dt = h(s),$$

so ist für alle ν

$$\int_a^b h(s)\,\varphi_\nu(s)\,ds = 0 \tag{7}$$

und mithin nach dem eben bewiesenen Theorem

$$\int_a^b K(s,t)\,h(t)\,dt = 0. \tag{8}$$

Nun ist

$$\int_a^b (h(s))^2\,ds = \int_a^b h(s)\,g(s)\,ds - \sum_\nu \int_a^b h(s)\,\varphi_\nu(s)\,ds \int_a^b g(t)\,\varphi_\nu(t)\,dt$$

und da wegen der Gleichungen (7) die Summe rechts verschwindet, so ist

$$\int_a^b (h(s))^2\,ds - \int_a^b h(s)\,g(s)\,ds = \int_a^b p(r)\,dr \int_a^b K(s,r)\,h(s)\,ds = 0$$

wegen Gleichung (8). Also ist $h(s)$ identisch gleich Null, was zu beweisen war.

Es mögen $p(s)$ und $q(s)$ zwei stetige Funktionen bedeuten; dann ergibt sich durch Multiplikation der eben bewiesenen Gleichung mit $q(s)ds$ und Integration von a bis b

$$\int_a^b \int_a^b K(s,t)\,q(s)\,p(t)\,ds\,dt = \sum_\nu \frac{1}{\lambda_\nu} \int_a^b q(s)\,\varphi_\nu(s)\,ds \int_a^b p(t)\,\varphi_\nu(t)\,dt.$$

Dies ist die Fundamentalformel von Hilbert, welche er aus der kanonischen Zerlegung einer quadratischen Form durch Grenzübergang gewinnt, und aus welcher er dann die Sätze des § 8 und das erste Theorem des § 9 für alle Kerne und das Entwicklungstheorem für „allgemeine" Kerne ableitet.

§ 10.

Die inhomogene lineare Integralgleichung.

Es sei $f(s)$ eine gegebene stetige Funktion; es soll eine stetige Funktion $\varphi(s)$ bestimmt werden, so daß

$$f(s) = \varphi(s) - \lambda \int_a^b K(s,t)\,\varphi(t)\,dt \tag{9}$$

ist. Wir setzen

$$\varphi(s) = f(s) + g(s).$$

Dann ist

$$g(s) = \lambda \int_a^b K(s,t)\,(f(t) + g(t))\,dt, \tag{10}$$

es ist folglich nach dem Entwicklungssatze des vorigen Paragraphen

$$g(s) = \sum_\nu \varphi_\nu(s) \int_a^b g(t)\,\varphi_\nu(t)\,dt, \tag{11}$$

wo $\varphi_\nu(s)$ ein vollständiges normiertes Orthogonalsystem des Kernes $K(s,t)$ durchläuft, und die Reihe rechts absolut und gleichmäßig konvergiert. Multipliziert man (10) mit $\varphi_\nu(s)ds$ und integriert, so folgt

$$\int_a^b g(s)\,\varphi_\nu(s)\,ds = \lambda \int_a^b (f(t)+g(t))\,dt \int_a^b K(s,t)\,\varphi_\nu(s)\,ds,$$

$$\int_a^b g(t)\,\varphi_\nu(t)\,dt = \frac{\lambda}{\lambda_\nu}\int_a^b f(t)\,\varphi_\nu(t)\,dt + \frac{\lambda}{\lambda_\nu}\int_a^b g(t)\,\varphi_\nu(t)\,dt, \tag{12}$$

$$\int_a^b g(t)\,\varphi_\nu(t)\,dt = \frac{\lambda}{\lambda_\nu-\lambda}\int_a^b f(t)\,\varphi_\nu(t)\,dt,$$

und also gemäß (11)

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \sum_\nu \frac{\varphi_\nu(s)}{\lambda_\nu-\lambda}\int_a^b f(t)\,\varphi_\nu(t)\,dt. \tag{13}$$

Umgekehrt konvergiert aber auch, wenn λ von allen λ_ν verschieden ist, die letzte Reihe nach § 2 absolut und gleichmäßig, weil

$$\frac{\varphi_\nu(s)}{\lambda_\nu-\lambda}\int_a^b f(t)\,\varphi_\nu(t)\,dt = \frac{1}{1-\frac{\lambda}{\lambda_\nu}}\int_a^b K(s,t)\,\varphi_\nu(t)\,dt \int_a^b f(t)\,\varphi_\nu(t)\,dt$$

ist, und es stellt die rechte Seite der Gleichung (13) eine Lösung der Gleichung (9) dar, wie sich durch Einführung derselben in Gleichung (9) bei Berücksichtigung der aus dem Entwicklungssatz des vorigen Paragraphen folgenden Gleichung

$$\int_a^b K(s,t)\,f(t)\,dt = \sum_\nu \frac{\varphi_\nu(s)}{\lambda_\nu}\int_a^b f(t)\,\varphi_\nu(t)\,dt$$

ergibt. *Wir sehen also, daß, wenn λ kein Eigenwert des Kernes $K(s,t)$ ist, die Gleichung* (9) *immer eine und nur eine durch die Gleichung* (13) *gegebene Lösung hat. Ist aber λ ein k-facher Eigenwert, so ergibt die Gleichung* (12), *daß, damit die Gleichung* (9) *eine Lösung hat, $f(s)$ den k Gleichungen*

$$\int_a^b f(t)\,\varphi_{n+\nu}(t)\,dt = 0$$

genügen muß, wo $n+1, n+2, \cdots, n+k$ die Indizes der zum betreffenden k-fachen Eigenwerte gehörigen Eigenfunktionen des vollständigen normierten Orthogonalsystems bedeuten; dann ist, wie die Einführung in die Gleichung (9) *zeigt,*

$$\varphi(s) = f(s) + a_1\varphi_{n+1}(s) + a_2\varphi_{n+2}(s) + \cdots + a_k\varphi_{n+k}(s) + \lambda \sum_\nu \frac{\varphi_\nu(s)}{\lambda_\nu-\lambda}\int_a^b f(t)\,\varphi_\nu(t)\,dt,$$

wo ν alle Indizes des Orthogonalsystems mit Ausnahme von $n+1, n+2, \cdots, n+k$ durchläuft, und $a_1, a_2, \cdots, a_k$ beliebige Konstanten bedeuten. Dies sind für den symmetrischen Kern die wesentlichsten derjenigen Sätze, welche von Fredholm durch seine Reihen bewiesen worden sind.

§ 11.

Beweis des Fundamentalsatzes.*)

Jetzt gehen wir zu dem in § 7 schuldig gebliebenen Beweise des Fundamentalsatzes über, daß es zu jedem Kerne mindestens eine Eigenfunktion gibt.

Wir setzen

$$U_1 = \int_a^b K^1(s,s)\,ds,\quad U_2 = \int_a^b K^2(s,s)\,ds, \cdots, U_n = \int_a^b K^n(s,s)\,ds, \cdots.$$

Dann folgt aus § 6 (1)

$$U_{\mu+\nu} = \int_a^b\int_a^b K^\mu(s,r)\,K^\nu(s,r)\,dr\,ds, \tag{14}$$

$$U_{2\nu} = \int_a^b\int_a^b (K^\nu(s,r))^2\,dr\,ds. \tag{15}$$

Da nun $K^\nu(s,t)$, wie in § 6 gezeigt, nicht identisch verschwinden kann, so folgt, daß alle $U_{2\nu}$ von Null verschieden und positiv sind. Es sei $n \geqq 2$; setzt man dann in (14) $n+1$ für μ und $n-1$ für ν und wendet die in § 1 gegebene Schwarzsche Ungleichung an, welche gemäß der Schlußbemerkung des ersten Kapitels auch für vielfache Integrale ihre Gültigkeit behält, so folgt

$$U_{2n}^2 \leqq U_{2n-2}\cdot U_{2n+2},$$

$$\frac{U_{2n}}{U_{2n-2}} \leqq \frac{U_{2n+2}}{U_{2n}}.$$

Setzt man nun

$$\frac{U_{2n+2}}{U_{2n}} = c_n, \tag{16}$$

so ist also

$$c_{n-1} \leqq c_n. \tag{17}$$

Nun ist nach § 6 Gleichung (1)

*) Vergl. H. A. Schwarz l. c.

$$K^{\mu+\nu}(s,t) = \int_a^b K^{\mu}(s,r)\, K^{\nu}(r,t)\, dr,$$

$$(K^{\mu+\nu}(s,t))^2 \leqq \int_a^b (K^{\mu}(s,r))^2\, dr \int_a^b (K^{\nu}(t,r))^2\, dr,$$

$$\int_a^b\int_a^b (K^{\mu+\nu}(s,t))^2\, ds\, dt \leqq \int_a^b\int_a^b (K^{\mu}(s,r))^2\, dr\, ds \cdot \int_a^b\int_a^b (K^{\nu}(t,r))^2\, dr\, dt.$$

Also nach (15)

$$U_{2\mu+2\nu} \leqq U_{2\mu} \cdot U_{2\nu},$$

$$U_{2\nu} \geqq \frac{U_{2\mu+2\nu}}{U_{2\mu}}$$

und wegen (16) und (17)

$$U_{2\nu} \geqq c_{\mu}^{\nu}. \tag{18}$$

Bei Berücksichtigung von (17) ergibt sich hieraus, daß

$$\lim_{\mu=\infty} c_{\mu} = c,$$

wo c eine endliche positive Größe bedeutet und

$$\frac{U_{2\nu}}{c^{\nu}} \geqq 1 \tag{19}$$

ist.

Aus (16) folgt, weil $c_n \leqq c$ ist, daß

$$\frac{U_{2n+2}}{c^{n+1}} \leqq \frac{U_{2n}}{c^{n}}. \tag{20}$$

Aus (19) und (20) folgt, daß

$$\lim_{n=\infty} \frac{U_{2n}}{c^{n}} = U \tag{21}$$

ist, wo U eine endliche Zahl $\geqq 1$ ist.

Nun ist

$$\frac{K^{2n+2m}(s,t)}{c^{n+m}} - \frac{K^{2n}(s,t)}{c^{n}}$$

$$= \frac{1}{c}\int_a^b\int_a^b K(s,r_1)\left\{\frac{K^{2n+2m-2}(r_1,r_2)}{c^{n+m-1}} - \frac{K^{2n-2}(r_1,r_2)}{c^{n-1}}\right\} K(r_2,t)\, dr_1\, dr_2,$$

$$\left(\frac{K^{2n+2m}(s,t)}{c^{n+m}} - \frac{K^{2n}(s,t)}{c^{n}}\right)^2 \leqq \frac{1}{c^2}\int_a^b\int_a^b (K(s,r_1)K(r_2,t))^2 dr_1\, dr_2 \times$$

$$\times \int_a^b\int_a^b dr_1\, dr_2 \left\{\left(\frac{K^{2n+2m-2}(r_1,r_2)}{c^{n+m-1}}\right)^2 - 2\frac{K^{2n+2m-2}(r_1,r_2)K^{2n-2}(r_1,r_2)}{c^{2n+m-2}} + \left(\frac{K^{2n-2}(r_1,r_2)}{c^{n-1}}\right)^2\right\}$$

Bei Berücksichtigung von (14) und (15) ergibt sich hieraus

$$\left(\frac{K^{2n+2m}(s,t)}{c^{n+m}}-\frac{K^{2n}(s,t)}{c^n}\right)^2 \leqq \frac{1}{c^2}\int_a^b (K(s,r_1))^2 dr_1 \int_a^b (K(t,r_2))^2 dr_2 \prec$$

$$\prec \left\{\frac{U_{4n+4m-4}}{c^{2n+2m-2}}-2\frac{U_{4n+2m-2}}{c^{2n+m-2}}+\frac{U_{4n-4}}{c^{2n-2}}\right\}.$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite wird aber wegen (21) mit wachsendem n, unabhängig von m, s und t, unendlich klein. Hieraus folgt, daß $\frac{K^{2n}(s,t)}{c^n}$ mit wachsendem n gleichmäßig gegen eine mithin stetige Funktion $u(s,t)$ konvergiert, welche wegen

$$\int_a^b u(s,s)\,ds = \lim_{n=\infty}\int_a^b \frac{K^{2n}(s,s)\,ds}{c^n} = \lim_{n=\infty}\frac{U_{2n}}{c^n} = U \geqq 1$$

nicht identisch in s und t verschwinden kann. Ferner folgt aus

$$\frac{K^{2n+2}(s,t)}{c^{n+1}} = \frac{1}{c}\int_a^b K^2(s,r)\,\frac{K^{2n}(r,t)}{c^n}\,dr$$

$$u(s,t) = \frac{1}{c}\int_a^b K^2(s,r)\,u(r,t)\,dr.$$

Wählt man nun für t einen solchen Wert t_1, daß $u(s,t_1)$ nicht identisch in s verschwindet, so ist gemäß der letzten Gleichung $u(s,t_1)$ eine Eigenfunktion des Kernes $K^2(s,t)$. Daraus folgt aber nach § 6, daß auch $K(s,t)$ eine Eigenfunktion haben muß, was zu beweisen war.

§ 12.

Erweiterung der Voraussetzungen.

Auch Unstetigkeiten des symmetrischen Kernes können in einem durch folgende Voraussetzungen beschränkten Umfange zugelassen werden.

I. Die Punktmenge in der s,t-Ebene, welche aus den Unstetigkeitsstellen von $K(s,t)$ gebildet wird und daher in der s,t-Ebene abgeschlossen ist, soll auf jeder Geraden $s = \text{const.}$ den äußeren Inhalt Null haben.

II. $\int_a^b (K(s,t))^2 dt$ soll für $a \leqq s \leqq b$ endlich und bestimmt sein und eine stetige Funktion von s darstellen.

Man teile das quadratische Definitionsgebiet von $K(s,t)$ durch Parallelen zu den Seiten in 2^{2n} gleiche Quadrate und bezeichne mit Q_n

das aus der Gesamtheit derjenigen Quadrate gebildete Gebiet, welche im Inneren oder auf der Umgrenzung Unstetigkeitsstellen von $K(s,t)$ enthalten. Dann kann aus I und II ohne Schwierigkeit das Ergebnis bewiesen werden: zu jeder beliebig kleinen positiven Größe ε gibt es eine Zahl n, so daß für alle Geraden $s = \text{const.}$ sowohl die Gesamtlänge der auf ihnen von Q_n überdeckten Gebiete als auch der Wert des über die Gesamtheit dieser Gebiete erstreckten Integrals

$$\int_{Q_n} (K(s,t))^2 \, dt^*)$$

$< \varepsilon$ sind.

Hieraus folgt zunächst, daß auch für alle Geraden $s = \text{const.}$

$$\int_{Q_n} |K(s,t)| \, dt < \varepsilon$$

ist; denn gemäß der Schwarzschen Ungleichung ist

$$\Big(\int_{Q_n} |K(s,t)| \, dt\Big)^2 \leqq \int_{Q_n} (K(s,t))^2 dt \cdot \int_{Q_n} dt \leqq \varepsilon^2.$$

Aus den bewiesenen Ungleichungen ergibt sich leicht: Der planare Inhalt der aus den Unstetigkeitsstellen von $K(s,t)$ bestehenden Punktmenge ist gleich Null. Für jede stetige Funktion $m(t)$ sind $\int_a^b (K(s,t))\, m(t)\, dt$ und $\int_a^b (K(s,t))^2 m(t)\, dt$ für $a \leqq s \leqq b$ endlich und bestimmt und stellen eine stetige Funktion von s dar. Ähnlich beweist man leicht bei Anwendung der Schwarzschen Ungleichung auf das Integral über das Produkt der beiden Kerne, daß auch

$$K^2(s,t) = \int_a^b K(s,r)\, K(r,t)\, dr$$

für $a \leqq s \leqq b$, $a \leqq t \leqq b$ endlich und bestimmt ist und eine stetige Funktion von s und t darstellt, welche wegen

$$K^2(s,s) = \int_a^b (K(s,r))^2 \, dr$$

nur dann identisch verschwinden kann, wenn $K(s,t)$ in seinem ganzen Stetigkeitsbereich identisch verschwindet.

Diese aus den Voraussetzungen I und II gewonnenen Folgerungen gestatten leicht alle in den §§ 4, 5, 6 vorkommenden Operationen wie namentlich die häufigen Vertauschungen der Integrationsordnung auch für

*) Es kann statt der Voraussetzungen I und II auch I und die Gültigkeit dieser Ungleichung gefordert werden, aus welchen Voraussetzungen sich leicht II ergibt.

den Fall des unstetigen Kernes zu legitimieren.*) Die Sätze und Beweise der §§ 4, 5, 6 bleiben daher ungeändert gültig. Der in § 7 ausgesprochene Fundamentalsatz bleibt bestehen, weil $K^2(s, t)$ als stetiger Kern Eigenfunktionen haben muß und hieraus gemäß § 6 die Existenz von Eigenfunktionen von $K(s, t)$ folgt.

Im § 8 muß die Gültigkeit der Gleichung (3) auf den Stetigkeitsbereich des Kernes beschränkt werden, während die Gleichung (6) unverändert gültig bleibt. In den §§ 9 und 10 bleiben alle Sätze und Beweise unverändert bestehen.

Es ist auch zulässig, daß I und II längs einer endlichen Anzahl von Geraden $s = \text{const.}$ unerfüllt sind, indem der Kern auf beiden Rändern dieser verschiedene Wertefolgen annimmt, I und II müssen dann aber in jedem der Rechtecke, in welche das Definitionsquadrat des Kernes durch die genannten Geraden zerlegt wird, *einschließlich* der Ränder postuliert werden, und es müssen an den betreffenden Werten von s beiden Eigenfunktionen sowie der Lösungsfunktionen der inhomogenen Integralgleichung Sprünge zugelassen werden.

Ferner kann der Gültigkeitsbereich des in § 9 erhaltenen Entwicklungssatzes noch dahin erweitert werden, daß die Voraussetzung der Stetigkeit der Funktion $p(t)$ durch die Voraussetzung der Integrabilität und der Integrabilität ihres Quadrates ersetzt wird.

Ebenso ändert sich nichts in den Sätzen und Beweisen dieses Kapitels, wenn $s, t, r, \cdots$, Punkte eines n-dimensionalen, ganz im Endlichen liegenden, aus einer endlichen Anzahl analytischer Stücke bestehenden Gebildes in einem $(n + m)$-dimensionalen Raum bedeuten und $ds, dt, dr, \cdots$ die entsprechenden Elemente.

Auch in diesem Fall bestimmen die Bedingungen I und II einen Bereich der Zulässigkeit von Unstetigkeiten.

Drittes Kapitel.

Über die lineare unsymmetrische Integralgleichung.

§ 13.

Die inhomogene Integralgleichung.

Es seien der nicht mehr als symmetrisch vorausgesetzte Kern $K(s, t)$ und $f(s)$ für $a \leqq s \leqq b$, $a \leqq t \leqq b$ als reelle stetige Funktionen definiert. Gesucht wird eine reelle stetige Funktion $\varphi(s)$, welche die Integralgleichung

*) Siehe z. B. Jordan, Cours d'Analyse Bd. II, Cap. II, II.

$$f(s) = \varphi(s) - \int_a^b K(s,t)\,\varphi(t)\,dt \tag{22}$$

erfüllt.

Setzt man

$$g(t) = \chi(t) - \int_a^b K(s,t)\,\chi(s)\,ds, \tag{23}$$

so ergeben sich die Identitäten

$$g(s) - \int_a^b K(s,t)\,g(t)\,dt = \chi(s) - \int_a^b Q(s,t)\,\chi(t)\,dt, \tag{24}$$

$$\int_a^b (g(s))^2\,ds = \int_a^b \chi(s)\left(\chi(s) - \int_a^b Q(s,t)\,\chi(t)\,dt\right)ds, \tag{25}$$

wo

$$Q(s,t) = K(s,t) + K(t,s) - \int_a^b K(s,r)\,K(t,r)\,dr$$

und mithin *symmetrisch* ist.

Man bezeichne jede von Null verschiedene reelle stetige Funktion, welche, für $\varphi(s)$ substituiert, die rechte Seite der Gleichung (22) identisch verschwinden läßt, als *Nullösung in s des Kernes* und jede von Null verschiedene reelle stetige Funktion, welche für $\chi(t)$ substituiert die rechte Seite der Gleichung (23) identisch verschwinden läßt, als *Nullösung in t.* Gemäß dem ersten Theorem des § 5 für $\lambda = 1$, bei dessen Beweis von der Voraussetzung der Symmetrie des Kernes kein Gebrauch gemacht wird, sind die Anzahlen der *linearunabhängigen* Nulllösungen in s sowie in t *endlich.* Ist $\chi(t)$ eine Nulllösung in t, so folgt aus (23) und (24), daß $\chi(t)$ eine zum Eigenwerte $\lambda = 1$ gehörige Eigenfunktion des symmetrischen Kernes $Q(s,t)$ ist; aus (25) und (23) folgt das umgekehrte. Mithin erhält man die Gesamtheit der ersteren Funktionen, indem man die mit ihr als *identisch* erwiesene Gesamtheit der letzteren bildet.

Nun ist die notwendige und hinreichende Bedingung für die Lösbarkeit der Gleichung (22) *die Orthogonalität von* $f(s)$ *zu allen eventuell vorhandenen Nullösungen in t, und aus einer Lösung ergeben sich dann alle durch additive Hinzufügung aller Nulllösungen in s**).

Denn die Notwendigkeit dieser Bedingung erhellt vorweg bei Multiplikation der Gleichung (22) mit einer Nulllösung in t und Integration; und daß die Bedingung hinreichend ist, zeigt die unmittelbare Anwendung der Auflösungstheoreme des § 10 auf die symmetrische Integralgleichung

*) Dieses Theorem ist auch zuerst von Fredholm l. c. bewiesen worden.

$$f(s) = \chi(s) - \int_a^b Q(s,t)\,\chi(t)\,dt,$$

auf welche gemäß (24) die Gleichung (22) durch die Substitution

$$\varphi(t) = \chi(t) - \int_a^b K(s,t)\,\chi(s)\,ds$$

zurückgeführt wird.

§ 14.

Begriff der Eigenfunktion.

Es sei $K(s,t)$ eine für $a \leqq s \leqq b$, $a \leqq t \leqq b$ definierte reelle stetige Funktion, die nicht als symmetrisch vorausgesetzt werden soll. Wenn dann die beiden reellen oder komplexen stetigen nicht identisch verschwindenden Funktionen $\varphi(s)$ und $\psi(s)$ den Gleichungen

$$\varphi(s) = \lambda \int_a^b K(s,t)\,\psi(t)\,dt \tag{26}$$

$$\psi(s) = \lambda \int_a^b K(t,s)\,\varphi(t)\,dt \tag{27}$$

genügen, so sollen sie als ein *Paar zum betreffenden Eigenwert λ gehöriger adjungierter Eigenfunktionen des Kernes $K(s,t)$* bezeichnet werden.

Wir definieren nun

$$\overline{K}(s,t) = \int_a^b K(s,r)\,K(t,r)\,dr \tag{28}$$

$$\underline{K}(s,t) = \int_a^b K(r,s)\,K(r,t)\,dr. \tag{29}$$

Dann sind $\overline{K}(s,t)$ und $\underline{K}(s,t)$ symmetrisch.

Führt man (27) in (26) und (26) in (27) ein, so ergeben sich die Gleichungen

$$\varphi(s) = \lambda^2 \int_a^b \overline{K}(s,t)\,\varphi(t)\,dt \tag{30}$$

$$\psi(s) = \lambda^2 \int_a^b \underline{K}(s,t)\,\psi(t)\,dt. \tag{31}$$

Wäre nun

$$\varphi(s) = \varphi_1(s) + i\varphi_2(s) \quad \text{und} \quad \psi(s) = \psi_1(s) + i\psi_2(s),$$

so würde, da λ^2 als Eigenwert des symmetrischen Kernes $\overline{K}(s,t)$, wie in § 4 gezeigt, reell sein muß, aus (30) folgen

$$\varphi_1(s) = \lambda^2 \int_a^b \overline{K}(s,t)\,\varphi_1(t)\,dt$$

$$\int_a^b (\varphi_1(s))^2\,ds = \lambda^2 \int_a^b \int_a^b \varphi_1(s)\,\overline{K}(s,t)\,\varphi_1(t)\,ds\,dt$$

$$= \lambda^2 \int_a^b dr \int_a^b K(s,r)\,\varphi_1(s)\,ds \int_a^b K(t,r)\,\varphi_1(t)\,dt$$

$$\int_a^b (\varphi_1(s))^2 ds = \lambda^2 \int_a^b dr \left(\int_a^b K(s,r)\,\varphi_1(s)\,ds\right)^2.$$

Ebenso ergibt sich

$$\int_a^b (\varphi_2(s))^2 ds = \lambda^2 \int_a^b dr \left(\int_a^b K(s,r)\,\varphi_2(s)\,ds\right)^2.$$

Da nun in mindestens einer dieser beiden Gleichungen nicht beide Seiten identisch verschwinden können, so folgt, *daß λ^2 positiv und mithin λ reell ist.* Es müßten mithin $\varphi_1(s)$ und $\psi_1(s)$, $\varphi_2(s)$ und $\psi_2(s)$ je ein Paar zum Eigenwerte λ gehöriger adjungierter Eigenfunktionen des Kernes $K(s,t)$ bilden. Aus diesem Grunde sollen im folgenden nur *reelle* Paare von adjungierten Eigenfunktionen betrachtet und unter dieser Bezeichnung verstanden werden. Indem wir über das Vorzeichen von $\psi(s)$ geeignet verfügen, können wir die Eigenwerte eines unsymmetrischen Kernes sämtlich als *positiv* voraussetzen.

Aus (30) folgt, wenn $\psi(s)$ durch (27) definiert wird, (26) und durch Einführung von (26) in (27) (31); ebenso folgt aus (31), wenn $\varphi(s)$ durch (26) definiert wird, (27) und durch Einführung von (27) in (26) (30). *Es entspricht also jeder Eigenfunktion des symmetrischen Kernes $\overline{K}(s,t)$ eine Eigenfunktion des symmetrischen Kernes $\underline{K}(s,t)$ und umgekehrt — und zwar so, daß das betreffende Funktionenpaar ein Paar adjungierter Eigenfunktionen des unsymmetrischen Kernes $K(s,t)$ bildet.*

§ 15.

Das vollständige normierte Orthogonalsystem eines unsymmetrischen Kernes.

Die adjungierten Funktionen eines vollständigen normierten Orthogonalsystems des Kernes $\overline{K}(s,t)$ bilden wieder ein vollständiges normiertes Orthogonalsystem des Kernes $\underline{K}(s,t)$ und umgekehrt.

Beweis.

$$\int_a^b \psi_\mu(r)\,\psi_\nu(r)\,dr = \int_a^b dr\,\lambda_\mu \int_a^b K(t,r)\,\varphi_\mu(t)\,dt\,\lambda_\nu \int_a^b K(s,r)\,\varphi_\nu(s)\,ds$$

$$= \lambda_\mu \lambda_\nu \int_a^b \overline{K}(s,t)\,\varphi_\mu(t)\,\varphi_\nu(s)\,ds\,dt;$$

wegen (30) ergibt sich hieraus

$$\int_a^b \psi_\mu(s)\,\psi_\nu(s)\,ds = \frac{\lambda_\nu}{\lambda_\mu} \int_a^b \varphi_\mu(s)\,\varphi_\nu(s)\,ds.$$

Bilden also die Funktionen $\varphi_1(s), \varphi_2(s), \cdots, \varphi_n(s), \cdots$ ein vollständiges normiertes Orthogonalsystem des Kernes $\overline{K}(s,t)$, so folgt aus der letzten Gleichung, daß auch die adjungierten Funktionen $\psi_1(s), \psi_2(s), \cdots, \psi_n(s), \cdots$ sämtlich normiert und zueinander orthogonal sind. Es sei nun $\psi(s)$ eine Eigenfunktion von $K(s,t)$ und $\varphi(s)$ ihre adjungierte, also eine Eigenfunktion von $\overline{K}(s,t)$. Dann ist gemäß Voraussetzung

$$\varphi(s) = \sum_\varrho c_\varrho \varphi_\varrho(s),$$

wo ϱ eine endliche Anzahl von Indizes durchläuft, und nach § 5 sämtliche $\varphi_\varrho(s)$ zum selben Eigenwerte gehören wie $\varphi(s)$. Dann folgt wegen der Gleichungen

$$\psi_\varrho(s) = \lambda \int_a^b K(t,s)\,\varphi_\varrho(t)\,dt,$$

$$\psi(s) = \lambda \int_a^b K(t,s)\,\varphi(t)\,dt$$

das Resultat

$$\psi(s) = \sum_\varrho c_\varrho \psi_\varrho(s).$$

Also bilden die Funktionen $\psi_1(s), \psi_2(s), \cdots, \psi_n(s), \cdots$ auch ein *vollständiges* normiertes Orthogonalsystem des Kernes $K(s,t)$, was zu beweisen war; die Umkehrung ergibt sich in analoger Weise. Unter einem *vollständigen normierten Orthogonalsystem des unsymmetrischen Kernes $K(s,t)$ wollen wir das Paar zweier solcher adjungierter vollständiger normierter Orthogonalsysteme der Kerne $\overline{K}(s,t)$ und $K(s,t)$ verstehen.*

§ 16.

Entwicklung willkürlicher Funktionen.

Es mögen die Funktionen

$$\varphi_1(s),\ \varphi_2(s),\cdots,\varphi_n(s),\cdots$$
$$\psi_1(s),\ \psi_2(s),\cdots,\psi_n(s),\cdots,$$

denen die Eigenwerte $\lambda_1,\ \lambda_2,\cdots,\lambda_n,\cdots$ der Größe nach geordnet entsprechen mögen, ein vollständiges normiertes Orthogonalsystem des unsymmetrischen Kernes $K(s,t)$ in der Definition des vorigen Paragraphen bilden. Dann gelten folgende Sätze:

Wenn identisch in s

$$\int_a^b K(t,s)\,h(t)\,dt = 0$$

ist, wo $h(s)$ eine stetige Funktion bedeutet, so ist auch für jedes ν

$$\int_a^b h(s)\,\varphi_\nu(s)\,ds = 0,$$

wie die Multiplikation der Gleichung (26) *mit $h(s)\,ds$ und Integration von a bis b ergibt; ebenso ist, wenn identisch in s*

$$\int_a^b K(s,t)\,h(t)\,dt = 0$$

ist, für jedes ν

$$\int_a^b h(s)\,\psi_\nu(s)\,ds = 0.$$

Umgekehrt gilt aber auch, wenn für jedes ν

$$\int_a^b h(s)\,\varphi_\nu(s)\,ds = 0$$

ist, die Gleichung

$$\int_a^b K(t,s)\,h(t)\,dt = 0,$$

und wenn für jedes ν

$$\int_a^b h(s)\,\psi_\nu(s)\,ds = 0$$

ist, die Gleichung

$$\int_a^b K(s,t)\,h(t)\,dt = 0.$$

Beweis. Wir beweisen nur die erste Behauptung, da der Beweis der zweiten derselbe ist. Da $h(s)$ gemäß Voraussetzung zu allen Funktionen eines vollständigen normierten Orthogonalsystems des symmetrischen Kernes $\overline{K}(s,t)$ orthogonal ist, so folgt nach § 9, daß

$$\int_a^b \overline{K}(s,t)\,h(t)\,dt = 0,$$

$$0 = \int_a^b \overline{K}(s,t)\,h(s)\,h(t)\,ds\,dt = \int_a^b dr \int_a^b K(s,r)\,h(s)\,ds \int_a^b K(t,r)\,h(t)\,dt$$

$$= \int_a^b dr \left(\int_a^b K(s,r)\,h(s)\,ds\right)^2;$$

folglich ist identisch in r

$$\int_a^b K(s,r)\,h(s)\,ds = 0,$$

was zu beweisen war.

Wenn

$$g(s) = \int_a^b K(s,t)\,h(t)\,dt$$

ist, wo $h(t)$ eine stetige Funktion bedeutet, so ist

$$g(s) = \sum_\nu \varphi_\nu(s) \int_a^b g(t)\,\varphi_\nu(t)\,dt = \sum_\nu \frac{\varphi_\nu(s)}{\lambda_\nu} \int_a^b h(t)\,\psi_\nu(t)\,dt$$

$$= \sum_\nu \int_a^b K(s,t)\,\psi_\nu(t)\,dt \int_a^b h(t)\,\psi_\nu(t)\,dt;$$

wenn

$$g(s) = \int_a^b K(t,s)\,h(t)\,dt$$

ist, so ist

$$g(s) = \sum_\nu \psi_\nu(s) \int_a^b g(t)\,\psi_\nu(t)\,dt = \sum_\nu \frac{\psi_\nu(s)}{\lambda_\nu} \int_a^b h(t)\,\varphi_\nu(t)\,dt$$

$$= \sum_\nu \int_a^b K(t,s)\,\varphi_\nu(t)\,dt \int_a^b h(t)\,\varphi_\nu(t)\,dt,$$

und die Reihen rechts konvergieren in beiden Gleichungen absolut und gleichmäßig.

Beweis. Wir wollen nur die erste Behauptung beweisen, da der Beweis der zweiten derselbe ist. Aus der dritten Darstellungsform ihres allgemeinen Gliedes gestattet der im § 2 bewiesene Konvergenzsatz die

behauptete absolute und gleichmäßige Konvergenz der Reihe abzulesen. Setzt man nun

$$g(s) - \sum_{\nu} \varphi_\nu(s) \int_a^b g(t)\, \varphi_\nu(t)\, dt = f(s),$$

so folgt

$$\int_a^b f(s)\, \varphi_\nu(s)\, ds = 0, \tag{32}$$

und hieraus ergibt sich nach dem eben bewiesenen Theorem

$$\int_a^b K(t, s) f(t)\, dt = 0. \tag{33}$$

Nun ist

$$\int_a^b (f(s))^2\, ds = \int_a^b f(s)\, g(s)\, ds = \int_a^b h(t)\, dt \int_a^b K(s, t) f(s)\, ds = 0$$

wegen (33). Folglich ist $f(s) = 0$, was zu beweisen war.

Es seien $p(s)$ und $q(s)$ zwei stetige Funktionen. Der eben bewiesene Satz liefert dann

$$\int_a^b K(s, t)\, q(t)\, dt = \sum \frac{\varphi_\nu(s)}{\lambda_\nu} \int_a^b q(t)\, \psi_\nu(t)\, dt$$

und nach Multiplikation dieser Gleichung mit $p(s)\, ds$ und Integration von a bis b erhält man

$$\int_a^b \int_a^b K(s, t)\, p(s)\, q(t)\, ds\, dt = \sum_a \frac{1}{\lambda_\nu} \int_a^b p(s)\, \varphi_\nu(s)\, ds \int_a^b q(t)\, \psi_\nu(t)\, dt.$$

Dieser Satz entspricht der kanonischen Zerlegung einer bilinearen Form.

Aus der eben bewiesenen Gleichung ergibt sich, daß, wenn $\sum_{\nu} \frac{\varphi_\nu(s)\, \psi_\nu(t)}{\lambda_\nu}$ gleichmäßig konvergiert,

$$K(s, t) = \sum_{\nu} \frac{\varphi_\nu(s)\, \psi_\nu(t)}{\lambda_\nu} \tag{34}$$

ist, und daß also insbesondere *diese Gleichung stets gültig ist, wenn das vollständige normierte Orthogonalsystem des Kernes $K(s, t)$ nur aus einer endlichen Anzahl von Funktionenpaaren besteht.*

§ 17.

Erweiterung der Voraussetzungen.

Wie eine der in § 13 auseinandergesetzten völlig analoge Schlußweise zeigt, können auch Unstetigkeiten des unsymmetrischen Kernes in einem durch folgende Voraussetzungen beschränkten Umfange zugelassen werden.

I. Die Punktmenge in der s, t-Ebene, welche aus den Unstetigkeitsstellen von $K(s,t)$ gebildet wird, soll auf jeder Geraden $s = \text{const.}$, $t = \text{const.}$ den äußeren Inhalt Null haben.

II. $\int_a^b (K(s,t))^2\,dt$ und $\int_a^b (K(t,s))^2\,dt$ sollen für $a \leqq s \leqq b$ endlich und bestimmt sein und stetige, nicht identisch verschwindende Funktionen von s darstellen.

Dann bleiben alle Sätze und Beweise dieses Kapitels bestehen, nur muß die Gültigkeit der Gleichung (34) auf den Stetigkeitsbereich von $K(s,t)$ beschränkt werden.

Ebenso ändert sich nichts in den Sätzen und Beweisen dieses Kapitels, wenn $s, t, r, \cdots$ Punkte eines n-dimensionalen, ganz im Endlichen liegenden, aus einer endlichen Anzahl analytischer Stücke bestehenden Gebildes in einem $(n+m)$-dimensionalen Raum bedeuten und $ds, dt, dr, \cdots$ die entsprechenden Elemente. Auch in diesem Fall bestimmen die Bedingungen I und II einen Bereich der Zulässigkeit von Unstetigkeiten.

Viertes Kapitel.

Über die beste Approximation von Funktionen zweier Variabeler durch Produktsummen von Funktionen einer Variabelen.

§ 18.

Das Approximationstheorem.

Es sei $K(s,t)$ eine gegebene, für $a \leqq s \leqq b$, $a \leqq t \leqq b$ definierte reelle stetige Funktion *Es werde verlangt, sie durch eine Summe von höchstens m Produkten einer stetigen Funktion von s mit einer stetigen Funktion von t möglichst gut zu approximieren*, wobei, wie gewöhnlich, als Maß der Approximation das über das Definitionsgebiet der gegebenen Funktion erstreckte Doppelintegral des Fehlerquadrates betrachtet wird.

Es mögen die Funktionen

$$\varphi_1(s),\ \varphi_2(s),\ \cdots,\ \varphi_\nu(s),\ \cdots;$$
$$\psi_1(s),\ \psi_2(s),\ \cdots,\ \psi_\nu(s),\ \cdots,$$

denen die positiven Eigenwerte $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_\nu,\ \cdots$ der wachsenden Größe nach geordnet entsprechen, ein *vollständiges normiertes Orthogonalsystem des unsymmetrischen Kernes* $K(s,t)$ in der Definition des § 15 bilden. Im speziellen Falle, daß die Anzahl der vom Index ν durchlaufenen Paare adjungierter Eigenfunktionen $\varphi_\nu(s),\ \psi_\nu(s) \leqq m$ ist, liefert die Gleichung (34) eine unmittelbare und triviale Lösung des gestellten Problems. Ist aber jene Anzahl unendlich oder endlich und $\geqq m$, *so wird die Lösung durch die Produktsumme*

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=m} \frac{\varphi_\nu(s)\,\psi_\nu(t)}{\lambda_\nu}$$

gegeben.

Beweis. Das Maß der Approximation M_m, dessen Minimum die Problemstellung fordert, wird gemäß Voraussetzung durch die Gleichung

$$M_m = \int_a^b\int_a^b \left(K(s,t) - \sum_{\nu=1}^{\nu=m} \frac{\varphi_\nu(s)\,\psi_\nu(t)}{\lambda_\nu}\right)^2 ds\,dt$$

definiert.

Dieser Ausdruck reduziert sich bei Heranziehung der Definitionsgleichungen (26), (27) und bei Berücksichtigung der Orthogonalität und des Normiertseins des Systems der Funktionen $\varphi_\nu(s)$ und des Systems der Funktionen $\psi_\nu(s)$ leicht auf die Formel

$$M_m = \int_a^b\int_a^b (K(s,t))^2 ds\,dt - \sum_{\nu=1}^{\nu=m} \frac{1}{\lambda_\nu^2}. \tag{35}$$

Wir haben also zu zeigen, daß

$$\int_a^b\int_a^b \left(K(s,t) - \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \alpha_\nu\beta_\nu\right)^2 ds\,dt \geqq \int_a^b\int_a^b (K(s,t))^2 ds\,dt - \sum_{\nu=1}^{\nu=m} \frac{1}{\lambda_\nu^2} \tag{36}$$

ist für alle Systeme von n stetigen Funktionenpaaren

$$\alpha_1(s),\ \alpha_2(s),\ \cdots,\ \alpha_n(s);$$
$$\beta_1(t),\ \beta_2(t),\ \cdots,\ \beta_n(t),$$

wo $n \leqq m$ ist, und α_ν statt $\alpha_\nu(s)$ und β_ν statt $\beta_\nu(t)$ geschrieben wird. Wir können voraussetzen, daß die Funktionen $\beta_1,\ \beta_2,\ \cdots,\ \beta_n$ normiert und zueinander orthogonal sind; denn wäre das nicht der Fall, so könnten wir sie nach § 3 durch ein System von höchstens n solchen linear homogen mit konstanten Koeffizienten ausdrücken und dann die Produktsumme nach diesen ordnen. Dann ist

$$(37)\quad \int_a^b\int_a^b \Big(K(s,t)-\sum_{\nu=1}^{\nu=n}\alpha_\nu\beta_\nu\Big)^2 ds\,dt = \int_a^b\int_a^b (K(s,t))^2\,ds\,dt + \sum_{\nu=1}^{\nu=n}\int_a^b\Big(\alpha_\nu^2 - 2\alpha_\nu\int_a^b K(s,t)\,\beta_\nu\,dt\Big)ds$$

$$= \int_a^b\int_a^b (K(s,t))^2\,ds\,dt + \sum_{\nu=1}^{\nu=n}\int_a^b\Big(\alpha_\nu - \int_a^b K(s,t)\,\beta_\nu\,dt\Big)^2 ds - \sum_{\nu=1}^{\nu=n}\int_a^b\Big(\int_a^b K(s,t)\,\beta_\nu\,dt\Big)^2 ds.$$

Die zu beweisende Ungleichung (36) folgt also a fortiori aus der Ungleichung

$$0 \leqq \sum_{\nu=1}^{\nu=m}\frac{1}{\lambda_\nu^2} - \sum_{\nu=1}^{\nu=n}\int_a^b\Big(\int_a^b K(s,t)\,\beta_\nu\,dt\Big)^2 ds$$

und diese, weil $n \leqq m$ ist, wieder a fortiori aus der Ungleichung

$$(38)\qquad 0 \leqq \sum_{\nu=1}^{\nu=n}\frac{1}{\lambda_\nu^2} - \sum_{\nu=1}^{\nu=n}\int_a^b\Big(\int_a^b K(s,t)\,\beta_\nu\,dt\Big)^2 ds,$$

welche wir jetzt beweisen wollen.

Gemäß dem in § 16 gegebenen Entwicklungssatze ist

$$(39)\qquad \int_a^b K(s,t)\,\beta_\nu\,dt = \sum_\varrho \frac{\varphi_\varrho(s)}{\lambda_\varrho}\int_a^b \beta_\nu\psi_\varrho(t)\,dt,$$

wo die Summe über alle Paare adjungierter Eigenfunktionen $\varphi_\varrho(s)$, $\psi_\varrho(t)$ des vollständigen normierten Orthogonalsystems zu erstrecken ist. Bei Berücksichtigung des Normiertseins und der Orthogonalität des Systems der Funktionen $\varphi_\varrho(s)$ folgt aus der Gleichung (39) leicht

$$(40)\qquad \int_a^b\Big(\int_a^b K(s,t)\,\beta_\nu\,dt\Big)^2 ds = \sum_\varrho \frac{1}{\lambda_\varrho^2}\Big(\int_a^b \beta_\nu\psi_\varrho(t)\,dt\Big)^2.$$

Da nun gemäß der Besselschen Ungleichung § 1

$$(41)\qquad 1 - \int_a^b \beta_\nu^2\,dt \geqq \sum_\varrho\Big(\int_a^b \beta_\nu\psi_\varrho(t)\,dt\Big)^2$$

ist, und mithin letztere Summe konvergiert, so ergibt eine leichte identische Umformung der rechten Seite der Gleichung (40)

$$(42)\quad \int_a^b \Big(\int_a^b K(s,t)\beta_\nu\,dt\Big)^2 ds = \frac{1}{\lambda_\mu^2} + \sum_{\mu=1}^{\mu=n}\Big(\frac{1}{\lambda_\mu^2}-\frac{1}{\lambda_n^2}\Big)\Big(\int_a^b \beta_\nu\psi_\mu(t)\,dt\Big)^2$$

$$-\sum_k\Big(\frac{1}{\lambda_n^2}-\frac{1}{\lambda_k^2}\Big)\Big(\int_a^b \beta_\nu\psi_k(t)\,dt\Big)^2 - \frac{1}{\lambda_n^2}\Big[1-\sum_\varrho\Big(\int_a^b \beta_\nu\psi_\varrho(t)\,dt\Big)^2\Big],$$

wo k alle Indizes $>n$ des vollständigen Orthogonalsystems durchläuft. Die für alle Werte von k gemäß Voraussetzung gültige Ungleichung

$$\lambda_k \geqq \lambda_n$$

und die Ungleichung (41) zeigen, daß

$$\sum_k\Big(\frac{1}{\lambda_n^2}-\frac{1}{\lambda_k^2}\Big)\Big(\int_a^b \beta_\nu\psi_k(t)\,dt\Big)^2 \geqq 0$$

und

$$\frac{1}{\lambda_n^2}\Big[1-\sum_\varrho\Big(\int_a^b \beta_\nu\psi_\varrho(t)\,dt\Big)^2\Big] \geqq 0$$

ist. Mithin folgt die zu beweisende Ungleichung (38) a fortiori aus der Ungleichung

$$0 \leqq \sum_{\nu=1}^{\nu=n}\frac{1}{\lambda_\nu^2} - \frac{n}{\lambda_n^2} - \sum_{\nu=1}^{\nu=n}\sum_{\mu=1}^{\mu=n}\Big(\frac{1}{\lambda_\mu^2}-\frac{1}{\lambda_n^2}\Big)\Big(\int_a^b \beta_\nu\psi_\mu(t)\,dt\Big)^2$$

$$= \sum_{\mu=1}^{\mu=n}\Big(\frac{1}{\lambda_\mu^2}-\frac{1}{\lambda_n^2}\Big)\Big[1-\sum_{\nu=1}^{\nu=n}\Big(\int_a^b \psi_\mu(t)\,\beta_\nu\,dt\Big)^2\Big].$$

Daß aber dieser letzte Ausdruck $\geqq 0$ ist, folgt aus den gemäß Voraussetzung bestehenden Ungleichungen

$$\lambda_\mu \leqq \lambda_n$$

und aus der wegen der Orthogonalität und des Normiertseins des Systems der Funktionen β_ν gültigen Besselschen Ungleichung

$$1 - \int_a^b (\psi_\mu(t))^2\,dt \geqq \sum_{\nu=1}^{\nu=n}\Big(\int_a^b \psi_\mu(t)\,\beta_\nu(t)\,dt\Big)^2.$$

§ 19.

Das Maß der besten Approximation.

Das im vorigen Paragraphen definierte Maß der besten Approximation M_m einer Funktion $K(s,t)$ durch eine Summe von höchstens m Produkten einer Funktion von s mit einer Funktion von t verschwindet bei unbegrenzt wachsendem m.

Beweis. Gemäß der Gleichung (35) kann die zu beweisende Behauptung durch die Gleichung

$$\sum_{\varrho} \frac{1}{\lambda_\varrho^2} = \int_a^b \int_a^b (K(s,t))^2 \, ds \, dt \tag{43}$$

ausgedrückt werden, wo λ_ϱ alle Eigenwerte des unsymmetrischen Kernes $K(s,t)$, jeden nach seiner Vielfachheit gezählt, durchläuft.

Nach dem Entwicklungssatz § 16 ist

$$\int_a^b K(s,t)\, K(r,t)\, dt = \sum_{\varrho} \frac{\varphi_\varrho(s)}{\lambda_\varrho} \int_a^b K(r,t)\, \psi_\varrho(t)\, dt = \sum_{\varrho} \frac{\varphi_\varrho(s)\, \varphi_\varrho(r)}{\lambda_\varrho^2}, \tag{44}$$

wobei die Summe bei festem s gleichmäßig in r und bei festem r gleichmäßig in s konvergiert. Wenn $r = s$ gesetzt wird, erhält man

$$\int_a^b (K(s,t))^2 \, dt = \sum_{\varrho} \frac{(\varphi_\varrho(s))^2}{\lambda_\varrho^2}. \tag{45}$$

Aus der Gleichung (45) ergibt sich die zu beweisende Gleichung (43) durch eine nach s von a bis b erstreckte Integration, wenn diese auf der rechten Seite *gliedweise* ausgeführt werden darf; also insbesondere, wenn die Reihe auf der rechten Seite der Gleichung (45) *gleichmäßig* konvergiert. Den zur Schließung des Beweises allein noch erforderlichen Nachweis der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe (45), aus welcher übrigens wegen

$$\frac{\varphi_\varrho(s)\, \varphi_\varrho(r)}{\lambda_\varrho^2} \leqq \frac{1}{2} \left(\frac{(\varphi_\varrho(s))^2}{\lambda_\varrho^2} + \frac{(\varphi_\varrho(r))^2}{\lambda_\varrho^2} \right)$$

auch die in s *und* r gleichmäßige Konvergenz der Reihe (44) folgt, leistet nun ein Theorem von Dini*), welches lautet:

Wenn eine Reihe positiver, stetiger, für $a \leqq s \leqq b$ definierter Funktionen der Variablen s so konvergiert, daß die Summe eine stetige Funktion von s darstellt, so ist die Konvergenz auch gleichmäßig.

Beweis. Es sei

$$v(s) = \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} u_\nu(s), \tag{46}$$

und es seien $v(s)$ und alle $u_\nu(s)$ für $a \leqq s \leqq b$ stetig und $\geqq 0$.

Es bezeichne P_n die aus allen denjenigen Punkten gebildete Punktmenge, für welche die stetige Funktion

$$R_n(s) = v(s) - \sum_{\nu=1}^{\nu=n} u_\nu(s)$$

*) Dini „Fondamenti per la teoria delle funzioni di variabili reali", Pisa 1878, § 99.

ihr Maximum erreicht, das wir mit Max. (R_n) bezeichnen wollen. Dann wähle man aus jeder Punktmenge P_n einen Punkt α_n aus, und es sei α einer der Häufungspunkte der aus den Punkten $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \cdots$ bestehenden Punktmenge. Es sei nun ε eine beliebig kleine, positive, von Null verschiedene Größe. Da gemäß der vorausgesetzten Konvergenz der Reihe (46)

$$\lim_{n=\infty} R_n(\alpha) = 0$$

ist, so gibt es einen Index p, so daß

$$R_p(\alpha) < \frac{\varepsilon}{2} \tag{47}$$

ist. Wegen der Stetigkeit von $R_p(s)$, und weil α ein Häufungspunkt der Punktmenge $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \cdots$ ist, läßt sich ein Index $q > p$ so bestimmen, daß

$$R_p(\alpha_q) - R_p(\alpha)| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{48}$$

ist. Aus (47) und (48) folgt

$$R_p(\alpha_q) < \varepsilon.$$

Da nun wegen der vorausgesetzten Positivität der Funktionen $u_\nu(s)$ $R_n(s)$ nicht negativ sein kann und bei festem s mit wachsendem n nicht wachsen kann, so ergibt sich für $m > q > p$

$$0 \leqq \text{Max.}\,(R_m) = R_m(\alpha_m) \leqq R_q(\alpha_m) \leqq \text{Max.}\,(R_q) = R_q(\alpha_{i_1}) \leqq R_p(\alpha_{i_1}) < \varepsilon.$$

Also ist

$$\lim_{n=\infty} \text{Max.}\,(R_n) = 0,$$

was zu beweisen war.

Schußbemerkung.

Auch Unstetigkeiten des Kernes können in dem in § 17 präzisierten Umfange zugelassen werden.

Ebenso ändert sich nichts in den Sätzen und Beweisen dieses Kapitels, wenn $s, t, r, \cdots$ Punkte eines n-dimensionalen, ganz im Endlichen liegenden, aus einer endlichen Anzahl analytischer Stücke bestehenden Gebildes in einem $(n+m)$-dimensionalen Raum bedeuten und $ds, dt, dr, \cdots$ die entsprechenden Elemente.

Fünftes Kapitel.

Über die Entwicklung willkürlicher Funktionen nach Systemen vorgeschriebener.

§ 20.

Das vorgeschriebene Funktionensystem verschwindet in den Endpunkten des Definitionsintervalles.

Es sei $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_\nu(x), \cdots$ eine unendliche Reihe im Intervall $a \leqq x \leqq b$ definierter, reeller, stetiger und zweimal stetig differenzierbarer Funktionen, die außerdem noch für $x = a$ und $x = b$ sämtlich verschwinden mögen. Es sei ferner das System

$\varphi_1''(x), \varphi_2''(x), \cdots, \varphi_\nu''(x), \cdots,$ wo $\varphi_\nu''(x)$ für $\frac{d^2\varphi_\nu(x)}{dx^2}$ geschrieben ist,

ein *abgeschlossenes* d. h., wie schon in der Einleitung erklärt, ein solches, daß es keine von Null verschiedene stetige Funktion $f(x)$ gibt, welche für jedes ν der Gleichung

$$\int_a^b f(x)\,\varphi_\nu''(x)\,dx = 0$$

genügt. Wir bilden dann

$$\psi_1(x) = \frac{\varphi_1(x)}{\sqrt{\int_a^b (\varphi_1'(y))^2\,dy}}$$

$$\psi_2(x) = \frac{\varphi_2(x) - \psi_1(x)\int_a^b \varphi_2'(z)\,\psi_1'(z)\,dz}{\sqrt{\int_a^b \left(\varphi_2'(y) - \psi_1'(y)\int_a^b \varphi_2'(z)\,\psi_1'(z)\,dz\right)^2 dy}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\psi_\nu(x) = \frac{\varphi_\nu(x) - \sum_{\varrho=1}^{\varrho=\nu-1} \psi_\varrho(x)\int_a^b \varphi_\nu'(z)\,\psi_\varrho'(z)\,dz}{\sqrt{\int_a^b \left(\varphi_\nu'(y) - \sum_{\varrho=1}^{\varrho=\nu-1} \psi_\varrho'(y)\int_a^b \varphi_\nu'(z)\,\psi_\varrho'(z)\right)^2 dy}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

wobei $\varphi_\nu'(x)$, $\psi_\nu'(x)$ bezüglich für $\frac{d\varphi_\nu(x)}{dx}$ und $\frac{d\psi_\nu(x)}{dx}$ geschrieben sind.

Wir beachten ferner noch folgendes. Wie in § 3 gezeigt, verschwindet einer der Nenner in den obigen Ausdrücken dann und nur dann, wenn die entsprechende Funktion $\varphi_\nu'(x)$ linear homogen mit konstanten

Koeffizienten durch die vorhergehenden darstellbar ist. Da aber wegen der Gleichungen

$$\varphi_\nu(a) = 0$$

jede solche lineare homogene Relation zwischen den $\varphi'_\nu(x)$ auch zwischen den $\varphi_\nu(x)$ gültig bleibt und umgekehrt, so folgt, daß einer der Nenner dann und nur dann verschwindet, wenn die betreffende Funktion $\varphi_n(x)$ von den vorhergehenden linear abhängig ist. In diesem Fall ignorieren wir die betreffende Funktion $\varphi_n(x)$ und fahren in der Bildung der Funktionen $\psi_\nu(x)$ so fort, als ob in der gegebenen Reihe der $\varphi_\nu(x)$ die Funktion $\varphi_n(x)$ überhaupt nicht vorkäme. *Durch die obigen Formeln sind dann alle $\psi_\nu(x)$ als lineare homogene Aggregate der $\varphi_\nu(x)$ gegeben und umgekehrt.*

Es sei nun $g(x)$ eine beliebige im Intervall $a \leqq x \leqq b$ definierte einmal stetig differenzierbare Funktion, welche für $x = a$ und $x = b$ verschwinde. Dann ist

$$g(x) = \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \psi_\nu(x) \int_a^b g'(y)\, \psi'_\nu(y)\, dy,$$

und die Summe auf der rechten Seite konvergiert absolut und gleichmäßig.

Beweis. Nach § 3 bestehen die Gleichungen

$$\int_a^b \psi'_\mu(x)\, \psi'_\nu(x)\, dx = 1 \quad \text{oder} \quad 0,$$

je nachdem μ und ν gleich oder verschieden sind. Hieraus folgt gemäß dem Zusatz zu § 2 die absolute und gleichmäßige Konvergenz der Reihe auf der rechten Seite der zu beweisenden Gleichung. Setzen wir nun

$$g(x) - \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \psi_\nu(x) \int_a^b g'(y)\, \psi'_\nu(y)\, dy = f(x),$$

so ergibt sich wegen

$$\int_a^b g(x)\, \psi''_\varrho(x)\, dx = -\int_a^b g'(x)\, \psi'_\varrho(x)\, dx$$

und

$$\int_a^b \psi_\nu(x)\, \psi''_\varrho(x)\, dx = -\int_a^b \psi'_\nu(x)\, \psi'_\varrho(x)\, dx = -1 \quad \text{oder} \quad 0,$$

je nachdem ν und ϱ gleich oder verschieden sind, für jedes ϱ

$$\int_a^b f(x)\, \psi''_\varrho(x)\, dx = 0;$$

da aber jede Funktion $\varphi''_\nu(x)$ sich linear homogen mit konstanten Koef

fizienten durch eine endliche Anzahl der $\psi_\nu''(x)$ darstellen läßt, so folgt für jedes ν

$$\int_a^b f(x)\,\varphi_\nu''(x)\,dx = 0,$$

und hieraus erlaubt uns die vorausgesetzte Abgeschlossenheit des Systemes der $\varphi_\nu''(x)$ zu schließen, daß $f(x)$ identisch verschwindet, was zu beweisen war.

§ 21.

Der allgemeine Fall.

Es sei $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_\nu(x), \cdots$ eine unendliche Reihe im Intervall $a \leqq x \leqq b$ definierter, reeller, stetiger, zweimal stetig differenzierbarer Funktionen, die jedoch keinerlei Grenzbedingungen unterworfen seien. Es sei ferner das System $\varphi_1''(x), \varphi_2''(x), \cdots, \varphi_\nu''(x), \cdots$ ein abgeschlossenes. Wir bilden dann für jeden Index ν

$$\bar{\varphi}_\nu(x) = \varphi_\nu(x) - \varphi_\nu(a) - \frac{x-a}{b-a}\,(\varphi_\nu(b) - \varphi_\nu(a));$$

dann gelten die Gleichungen

$$\bar{\varphi}_\nu(a) = \bar{\varphi}_\nu(b) = 0$$
$$\bar{\varphi}_\nu''(x) = \varphi_\nu''(x),$$

und es ist daher das System $\bar{\varphi}_1''(x), \bar{\varphi}_2''(x), \cdots, \bar{\varphi}_\nu''(x), \cdots$ auch ein abgeschlossenes. Nun konstruieren wir, wie im vorigen Paragraphen, die Funktionenreihe

$$\psi_1(x) = \frac{\bar{\varphi}(x)}{\sqrt{\int_a^b (\bar{\varphi}_1'(y))^2\,dy}}$$

$$\psi_\nu(x) = \frac{\bar{\varphi}_\nu(x) - \sum_{\varrho=1}^{\varrho=\nu-1} \psi_\varrho(x) \int_a^b \bar{\varphi}_\nu'(z)\,\psi_\varrho'(z)\,dz}{\sqrt{\int_a^b \left(\bar{\varphi}_\nu'(y) - \sum_{\varrho=1}^{\varrho=\nu-1} \psi_\varrho'(y) \int_a^b \bar{\varphi}_\nu'(z)\,\psi_\varrho'(z)\,dz\right)^2 dy}}$$

Ist dann $g(x)$ eine beliebige im Intervall $a \leqq x \leqq b$ definierte stetige und einmal stetig differenzierbare Funktion und setzt man

$$\bar{g}(x) = g(x) - g(a) - \frac{x-a}{b-a}\,(g(b) - g(a)),$$
$$\bar{g}(a) = \bar{g}(b) = 0,$$

so liefert das im vorigen Paragraphen bewiesene Entwicklungstheorem

$$\bar{g}(x) = \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \psi_\nu(x) \int_a^b \bar{g}'(y)\, \psi_\nu'(y)\, dy,$$

$$g(x) = \frac{b\,g(a) - a\,g(b)}{b-a} + x\,\frac{g(b)-g(a)}{b-a} + \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \psi_\nu(x) \int_a^b g'(y)\, \psi_\nu'(y)\, dy,$$

und die Reihen rechts konvergieren absolut und gleichmäßig.

Wir haben beim Beweise der Entwicklungssätze dieses und des vorigen Paragraphen vorausgesetzt, daß das System der $\varphi_\nu''(x)$ ein abgeschlossenes ist; es hätte aber genügt etwas weniger vorauszusetzen, nämlich bloß, daß jede Funktion, welche zu allen $\varphi_\nu''(x)$ orthogonal ist, linear ist; denn das für den im vorigen Paragraphen gegebenen Beweis erforderliche identische Verschwinden von $f(x)$ ergibt sich wegen des Verschwindens von $f(x)$ in den Endpunkten des Intervalls aus der Tatsache, daß $f(x)$ linear sein muß.

Da jede stetige Funktion durch einmal stetig differenzierbare gleichmäßig approximiert werden kann, so ergibt sich aus dem letzten Entwicklungstheorem: *Es sei $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_\nu(x), \cdots$ eine unendliche Reihe für $a \leqq x \leqq b$ definierter, reeller, zweimal stetig differenzierbarer Funktionen, deren zweite Ableitungen ein abgeschlossenes System bilden; dann läßt sich jede für $a \leqq x \leqq b$ definierte stetige Funktion in eine Reihe endlicher linearer homogener Aggregate der Funktionen* 1, x, $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_\nu(x), \cdots$ *gleichmäßig konvergent entwickeln.*

Die Theorie der Integralgleichungen und die Darstellung willkürlicher Funktionen in der mathematischen Physik.

Von

Adolf Kneser in Breslau.

Die von Fredholm*) begründete, von Hilbert**) in wesentlichen Punkten fortgebildete, von Schmidt***) weiter vervollkommnete Theorie der Integralgleichungen ist offenbar bestimmt, weite Gebiete der mathematischen Physik in der vorteilhaftesten Weise umzugestalten. Sie bietet aber hinsichtlich der wichtigen Lehre von der Darstellung willkürlicher Funktionen bis jetzt noch Mängel dar, die unmittelbar vor Augen treten, wenn man sich klar macht, was die hierher gehörigen Resultate für die Fouriersche Reihe leisten. Da zeigt sich, daß es weniger ist als schon sehr einfache Anwendungen erfordern; man erhält nämlich z. B. bezüglich der gewöhnlichen Sinusreihe nur den Satz, daß durch sie eine Funktion von x darstellbar ist, die mit ihren ersten beiden Ableitungen stetig ist und an den Stellen $x = 0$ und $x = \pi$ verschwindet; ebenso erhält man eine Entwicklung in die Kosinusreihe nur unter der Voraussetzung, daß die Ableitung der Funktion an den bezeichneten beiden Stellen verschwindet.

Nun kennt man aber nicht nur für die Fouriersche Reihe, sondern auch für die nach den Besselschen und den Sturm-Liouvilleschen Normalfunktionen fortschreitenden Reihen sehr viel allgemeinere Darstellungssätze, bei denen insbesondere nicht verlangt wird, daß die dargestellte Funktion an den Enden des betrachteten Intervalls denselben Bedingungen unterworfen sei, wie die Funktionen, nach denen man entwickelt.†) Diese allgemeinen Sätze mit der Theorie der Integralgleichungen

*) Stockholm Öfversigt 1900. Acta math. Bd. 27.

**) Göttinger Nachrichten 1904, 1905.

***) Entwicklung willkürlicher Functionen nach Systemen vorgeschriebener, Dissertation Göttingen 1905 und Bd. 63 dieser Annalen.

†) Kneser, Bd. 58 und 60 dieser Annalen.

in Verbindung zu setzen und dadurch die bezeichneten Mängel der bisherigen Theorie zu heben, ist das Ziel der vorliegenden Untersuchung. Wir hoffen die Lehre von der Darstellung willkürlicher Funktionen durch die in der mathematischen Physik vorkommenden Reihen in verschiedenen Punkten zu vertiefen und so einen neuen Beweis für die Fruchtbarkeit der Integralgleichungen zu erbringen.

§ 1.

Das Problem und ein Lemma.

Das Problem der mathematischen Physik, auf das wir die Integralgleichungen anwenden wollen, ist im wesentlichen das von Sturm und Liouville untersuchte. Eine Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx}\left(k\,\frac{dV}{dx}\right)+(g\lambda-l)\,V=0$$

sei vorgelegt, in der die Variable x auf ein festes endliches Intervall J, etwa das von $x=a$ bis $x=b$ reichende, beschränkt bleibt. Im Innern dieser Strecke seien die Funktionen k, g, l mit ihren Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetig, k und g außerdem positiv; λ sei eine Konstante. Ferner sei g so beschaffen, daß das Integral

$$u=\int_a^x g\,dx$$

auf der ganzen Strecke J mit Einschluß ihrer Endpunkte endlich und stetig bleibt. Dann kann man, ohne die Differentialgleichung wesentlich zu spezialisieren, die Größe g durch Eins ersetzen, indem man u als unabhängige Variable einführt, die, wenn x wachsend die Strecke J durchläuft, ebenfalls wachsend bis zu einer endlichen Grenze hinaufgeht. Die Differentialgleichung geht nämlich in folgende über:

$$g\,\frac{d}{du}\left(gk\,\frac{dV}{du}\right)+(g\lambda-l)\,V=0$$

oder in geänderter Bezeichnung

$$\frac{d}{dx}\left(k\,\frac{dV}{dx}\right)+(\lambda-l)\,V=0,$$

wobei k und l die soeben geforderten Eigenschaften behalten.

Die Konstante λ wird nun durch Forderungen bestimmt, die an die Größe V gestellt werden und nicht bei beliebigen Werten von λ zu erfüllen sind. Auf der Strecke J sollen nämlich V und $\frac{dV}{dx}$ endlich und stetig sein und an den Enden von J sollen Gleichungen von der Form

$$k\,\frac{dV}{dx}-hV\Big|^a=0,\qquad k\,\frac{dV}{dx}+HV\Big|^b=0$$

gelten, in denen h und H vorgeschriebene Konstante sind; eine von ihnen oder beide können durch Gleichungen wie

$$V|^a = 0, \quad V|^b = 0$$

vertreten werden. Ist ferner eine der Grenzen a und b, etwa a eine singuläre Stelle der Differentialgleichung, so nennen wir sie kurz einen singulären, andernfalls einen regulären Endpunkt der Strecke J. Für einen singulären Endpunkt wird keine Beziehung von einer der angegebenen Gestalten, sondern nur verlangt, V bleibe endlich; die Differentialgleichung ist immer so beschaffen, daß die geforderten Integrale V bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt sind. Man nennt sie Normalfunktionen oder, vom Standpunkte der unten eingeführten Integralgleichungen, Eigenfunktionen eines Kerns, die zugehörigen Werte der Konstanten λ Eigenwerte.

Um besonders über die in singulären Stellen möglichen Verhältnisse bestimmte Anschauungen zu gewinnen, nehmen wir speziell an, was bei den wichtigsten Anwendungen zutrifft, k und l seien analytische, im Innern der Strecke J reguläre Funktionen von x, und $x = a$ sei für die Differentialgleichung der Normalfunktionen eine Stelle der Bestimmtheit im Sinne der Fuchsschen Theorie.*) Da die Differentialgleichung in der Form

$$V'' + \frac{k'}{k} V' + \frac{\lambda - l}{k^2} = 0$$

geschrieben werden kann, ist es für eine Singularität dieser Art charakteristisch, daß man entwickeln kann

$$\frac{k'}{k} = \frac{c_1}{x-a} + \mathfrak{P}_1(x-a),$$

$$\frac{\lambda - l}{k} = \frac{c_2}{(x-a)^2} + \frac{c_3}{x-a} + \mathfrak{P}_2(x-a),$$

wobei c Konstante und $\mathfrak{P}$ Potenzreihen sind. Die determinierende Gleichung ist

$$\gamma(\gamma-1) + c_1\gamma + c_2 = 0;$$

wenn ihre Wurzeln weder gleich sind noch sich um eine ganze Zahl unterscheiden, hat die Differentialgleichung zwei Integrale von der Form

$$(x-a)^\gamma \mathfrak{P}_3(x-a).$$

Hieraus sieht man zunächst, daß die determinierende Gleichung keine komplexen Wurzeln haben kann, wenn die gestellten Forderungen erfüllbar sind und die Größe V bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmen. Da nämlich die Konstanten c wie die Funktionen k und l naturgemäß reell anzunehmen sind, hätte man zwei konjugiert imaginäre Wurzeln, also in dem

*) Schlesinger, Differentialgleichungen (Sammlung Schubert) Nr. 25.

reellen und imaginären Teil des hingeschriebenen Ausdrucks zwei Integrale, die entweder beide an der Stelle $x = a$ endlich blieben oder beide unendlich würden. Die Wurzeln der determinierenden Gleichung sind also reell und mindestens eine von ihnen nicht negativ, da sonst alle Integrale eine Potenz von $x - a$ mit negativem Exponenten als Faktor neben $\mathfrak{P}(x-a)$ und $\log(x-a)$ enthielten, also keins von ihnen an der Stelle $x = a$ endlich wäre. Ist nun γ die größte nicht negative Wurzel der determinierenden Gleichung, so ist ein Integral von der Form

$$(x-a)^{\gamma}\,\mathfrak{P}(x-a)$$

vorhanden, und dieses ist bei der Annahme $x = a$ endlich; es ist also bei den geltenden Voraussetzungen bis auf einen konstanten Faktor das einzige an der Stelle $x = a$ endliche Integral.

Es seien nun V und W zwei zu verschiedenen Werten von λ gehörige Integrale unserer Differentialgleichung, die an der Stelle $x = a$ von der angegebenen Beschaffenheit sind; bei dem zweiten trete etwa γ_1 an Stelle von γ. Dann kann man setzen

$$V = (x-a)^{\gamma}\,\mathfrak{P}_3(x-a), \qquad W = (x-a)^{\gamma_1}\,\mathfrak{P}_4(x-a),$$
$$VW' - WV' = (x-a)^{\gamma+\gamma_1-1}\,\mathfrak{P}_5(x-a);$$

auf Grund dieser Formeln untersuchen wir den im weiteren Verlauf der Untersuchung vorkommenden Ausdruck

$$k(VW' - V'W).$$

Zu diesem Zweck gehen wir davon aus, daß die größte Wurzel der determinierenden Gleichung nicht kleiner als $\frac{1-c_1}{2}$ ist, daß also die Ungleichung

$$\gamma + \gamma_1 \geqq 1 - c_1$$

gilt. Wenn nun zunächst $\gamma + \gamma_1 + c_1 - 1$ positiv ist, findet man aus der Formel

$$\frac{k'}{k} = \frac{c_1}{x-a} + \mathfrak{P}_1(x-a)$$

und der aus ihr folgenden

$$k = (x-a)^{c_1}\,\mathfrak{P}_6(x-a)$$

die Gleichung

$$k(VW' - V'W) = (x-a)^{\gamma+\gamma_1-1+c_1}\,\mathfrak{P}_5(x-a)\,\mathfrak{P}_6(x-a)$$

und hieraus

$$k(VW' - V'W)|^a = 0.$$

Wäre ferner

$$\gamma + \gamma_1 = 1 - c_1,$$

so erhielte man die Beziehungen

$$\gamma = \gamma_1 = \frac{1-c_1}{2}, \qquad 2\gamma + c_1 = 1.$$

Ferner hätte man Entwicklungen von der Form

$$V = C(x-a)^\gamma + C_1(x-a)^{\gamma+1} + \cdots,$$
$$W = D(x-a)^\gamma + D_1(x-a)^{\gamma+1} + \cdots,$$

aus denen man schließen könnte

$$VW' - V'W = (x-a)^{2\gamma}\,\mathfrak{P}_7(x-a),$$
$$k(VW' - V'W) = (x-a)^{2\gamma+c_1}\,\mathfrak{P}_8(x-a) = (x-a)\,\mathfrak{P}_8(x-a),$$

so daß die linke Seite dieser Gleichung wiederum bei der Annahme $x = a$ verschwindet.

Bedenken wir noch, daß für den Endpunkt b dieselben Erwägungen wie für a gelten, so sehen wir ein, daß von den Gleichungen

$$k(VW' - WV')|^a = 0, \quad k(VW' - WV')|^b = 0$$

die erste gesichert ist, wenn V und W an der Grenze a, die zweite, wenn sie an der Grenze b die von den Normalfunktionen geforderten Eigenschaften haben. Diese Gleichungen sind an regulären Endpunkten selbstverständlich erfüllt, da hier entweder beide Größen V und W verschwinden, oder die Quotienten $V' : V$ und $W' : W$ denselben endlichen Wert haben.

Offenbar bleiben die letzten Betrachtungen gültig, wenn man unter $\mathfrak{P}$ nur stetige mit stetiger erster Ableitung versehene Funktionen versteht. Man überträgt so unsre Resultate auf den Fall, daß k, g, l nicht notwendig analytische Funktionen sind, die Differentialgleichung aber an den Stellen a und b nur diejenige Art von Singularitäten aufweist, die Bôcher*) bei linearen Differentialgleichungen mit nicht analytischen Koeffizienten als Verallgemeinerung der Fuchsschen Stellen der Bestimmtheit definiert und untersucht hat.

Beiläufig bemerken wir noch, daß, wenn man den Normalfunktionen an einem singulären Endpunkte a die Forderung auferlegen wollte, die Gestalt $(x-a)^r\,\varphi(x)$ zu haben, wobei r ein gegebener Exponent und $\varphi(a)$ endlich ist, nur scheinbar ein allgemeineres Problem als das oben ausgesprochene vorliegen würde. Man brauchte nämlich nur die Größe $(x-a)^{-r}V$ an Stelle von V einzuführen, um auf unser früheres Problem zurückzukommen, da diese Größe einer Differentialgleichung von derselben Form und derselben Art der Singularitäten genügt wie V selbst. Aus diesem Grunde und weil außerdem in den physikalischen Anwendungen stets zunächst gefordert wird, eine gewisse Größe bleibe endlich, betrachten wir durchweg nur Normalfunktionen, die an einer singulären Stelle endlich bleiben und dadurch bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt sind.

*) Transactions of the American Mathematical Society Bd. 1, S. 40. Bulletin of A. M. S. (2), Bd. 5, S. 280.

§ 2.

Differentialgleichung und Integralgleichung.

Nach diesen Vorbereitungen gehen wir dazu über, die Normalfunktionen als Eigenfunktionen eines Kerns und Lösungen einer Integralgleichung zu betrachten, und leiten einige von Hilbert angegebene Resultate auf eine neue Weise ab, durch die gewisse in der zitierten Abhandlung besonders erörterte Ausnahmefälle*) der allgemeinen Theorie eingeordnet werden.

Zu diesem Zwecke richten wir zunächst die Differentialgleichung der Normalfunktionen so ein, daß $\lambda = 0$ nicht zu den Eigenwerten gehört. Es sei μ eine beliebige Konstante, die nicht zu den Eigenwerten gehört; eine solche gibt es, da wir annehmen, die für die Normalfunktionen charakteristischen Forderungen seien nicht bei jedem Wert von λ zu erfüllen. Wenn dann $\lambda = 0$ ein Eigenwert ist, ersetzen wir λ durch $\lambda + \mu$ und schreiben die Differentialgleichung der Normalfunktionen in der Form

$$\frac{d}{dx}\left(k\frac{dV}{dx}\right) + [\lambda - (l-\mu)]\,V = 0.$$

Dann ist $\lambda = 0$ sicher kein Eigenwert mehr, da sonst für die ursprüngliche Gleichung μ ein solcher wäre, entgegen der Voraussetzung. Ändern wir auch noch die Bedeutung des Buchstabens l, so können wir die Gleichung der Normalfunktionen wieder in der Gestalt

$$\frac{d}{dx}\left(k\frac{dV}{dx}\right) + (\lambda - l)\,V = 0$$

schreiben und annehmen, alle Eigenwerte seien von Null verschieden.

Jetzt bilden wir an jedem Ende des Intervalls J ein Integral der Gleichung

$$\frac{d}{dx}\left(k\frac{dy}{dx}\right) - ly = 0,$$

das die an diesem Ende für die Normalfunktionen geltenden Forderungen erfüllt. Diese Integrale seien $\varphi(x)$ und $\psi(x)$; das erste sei zunächst am unteren, das zweite am oberen Ende der Strecke J definiert. Da nun die Koeffizienten der Differentialgleichung, wenn man den der zweiten Ableitung auf den Wert Eins bringt, im Innern von J mit ihren ersten Ableitungen stetig sind, so kann man $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ als stetige, mit stetiger erster Ableitung versehene Funktionen über die ganze Strecke J fortsetzen, wobei nur für $\varphi(x)$ der obere, für $\psi(x)$ der untere Endpunkt, wenn er singulär ist, Singularitäten bringen kann. Die Funktionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ können

*) Zweite Mitteilung, Göttinger Nachrichten 1904, S. 219.

ferner nicht bis auf einen konstanten Faktor zusammenfallen, da sonst ein Integral der letzten Gleichung vorläge, das an beiden Enden der Strecke J die für die Eigenfunktionen geltenden Grenzbedingungen erfüllt, was ausgeschlossen ist, da $\lambda = 0$ kein Eigenwert sein soll. Hieraus folgt, daß die Größe $k(\varphi\psi' - \varphi'\psi)$, die den Gleichungen

$$\frac{d(k\varphi')}{dx} - l\varphi = 0, \qquad \frac{d(k\psi')}{dx} - l\psi = 0$$

zufolge konstant ist, nicht verschwindet; multipliziert man daher $\varphi(x)$ mit einer passenden von Null verschiedenen Konstanten, wodurch die geforderten Eigenschaften nicht gestört werden, so erhält man die Gleichung

$$k(\varphi'\psi - \varphi\psi') = 1$$

für die ganze Strecke J mit Ausschluß singulärer Grenzen.

Jetzt sei ξ ein Wert zwischen a und b; wir setzen, wenn $x \leqq \xi$,

$$K(x, \xi) = \psi(\xi)\,\varphi(x),$$

wenn $x \geqq \xi$, dagegen

$$K(x, \xi) = \varphi(\xi)\,\psi(x).$$

Dann ist $K(x, \xi)$ auf der ganzen Strecke J als Funktion von x stetig und bezüglich beider Argumente symmetrisch. Denn ist z. B. $x \leqq \xi$, so hat man für $K(\xi, x)$ den zweiten Ausdruck zu nehmen und findet $\varphi(x)\,\psi(\xi)$, also

$$K(x, \xi) = K(\xi, x),$$

und Entsprechendes gilt, wenn $x > \xi$.

Setzen wir ferner

$$\frac{\partial K(x, \xi)}{\partial x} = K'(x, \xi),$$

so finden wir

$$K'(\xi - 0, \xi) = \psi(\xi)\,\varphi'(\xi), \qquad K'(\xi + 0, \xi) = \varphi(\xi)\,\psi'(\xi),$$

also zufolge der φ und ψ verknüpfenden Identität

$$K'(\xi - 0, \xi) - K'(\xi + 0, \xi) = \varphi'(\xi)\,\psi(\xi) - \varphi(\xi)\,\psi'(\xi) = \frac{1}{k(\xi)},$$

woraus die Unstetigkeit der Größe $K'(x, \xi)$ an der Stelle $x = \xi$ klar wird. Beiläufig bemerken wir noch, daß die Größen

$$K(x, a) = \psi(x)\,\varphi(a), \qquad K'(x, a) = \psi'(x)\,\varphi(a)$$

endlich und bestimmt sind, ebenso auch, wenn a ein regulärer Endpunkt ist, die Größen

$$K(a, a) = \psi(a)\,\varphi(a),$$

$$\lim_{\varepsilon = +0} K'(a + \varepsilon + 0, a + \varepsilon) = \psi'(a)\,\varphi(a),$$

$$\lim_{\varepsilon = +0} K'(a + \varepsilon - 0, a + \varepsilon) = \varphi'(a)\,\psi(a),$$

da in diesem Falle $\psi(a)$ und $\psi'(a)$ endlich sind; die letzten beiden wollen wir durch $K'(a+0, a)$ und $K'(a-0, a)$ bezeichnen.

Jetzt ist es leicht, die Normalfunktionen V als Eigenfunktionen des symmetrischen Kerns $K(x, \xi)$ zu erkennen. Aus den Gleichungen

$$\frac{d}{dx}\left(k\frac{dV}{dx}\right) + (\lambda - l)V = 0,$$

$$\frac{d(kK'(x, \xi))}{dx} - lK(x, \xi) = 0,$$

deren letzte gilt, weil K als Funktion von x mit $\varphi(x)$ oder $\psi(x)$ bis auf einen von x unabhängigen Faktor übereinstimmt, folgt nämlich

$$\frac{d}{dx}\left[k\left(K\frac{dV}{dx} - K'V\right)\right] + \lambda VK = 0.$$

Diese Gleichung integrieren wir über die Strecke J und beachten dabei folgende Tatsache allgemeiner Natur, die wir noch mehrfach zu benutzen haben: Ist $f(x)$ auf der Strecke J mit Ausnahme einer Stelle $x = \xi$ stetig, die Ableitung $f'(x)$ aber durchweg stetig, so hat man nicht die gewöhnliche Formel

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(x)\Big|_a^b,$$

sondern die erweiterte

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(x)\Big|_a^b + f(\xi - 0) - f(\xi + 0).$$

Führen wir nach dieser Regel die bezeichnete Integration durch und beachten noch, daß nach § 1 die Größe

$$k\left(K\frac{dV}{dx} - K'V\right)$$

an den Stellen $x = a$ und $x = b$ verschwindet, so erhalten wir

$$k\left(K\frac{dV}{dx} - K'V\right)\Big|_{\xi+0}^{\xi-0} + \lambda\int_a^b K(x, \xi)\,V\,dx = 0,$$

oder, da die Gleichungen

$$K(x, \xi)\Big|_{\xi+0}^{\xi-0} = 0, \qquad K'(x, \xi)\Big|_{\xi+0}^{\xi-0} = \frac{1}{k(\xi)}$$

gelten,

$$V(\xi) = \lambda\int_a^b K(x, \xi)\,V\,dx,$$

oder in der Bezeichnung, die wir festhalten wollen,

$$V = V(x) = \lambda\int_a^b K(\alpha, x)\,V(\alpha)\,d\alpha.$$

Damit ist die Sturm-Liouvillesche Aufgabe auf eine Integralgleichung mit bestimmtem symmetrischem Kern zurückgeführt.

Die Umkehrung dieses Resultats ergibt sich, im wesentlichen nach Hilbert, in folgender Weise. Es sei $f(x)$ eine beliebige, im Intervalle J stetige Funktion von x; setzt man

$$F(x) = \int_a^b K(x, \alpha)\, f(\alpha)\, d\alpha,$$

so findet man:

$$F'(x) = \int_a^b K'(x, \alpha)\, f(\alpha)\, d\alpha = \int_a^x K'(x, \alpha)\, f(\alpha)\, d\alpha + \int_x^b K'(x, \alpha)\, f(\alpha)\, d\alpha,$$

$$\frac{d(k F'(x))}{dx} = \int_a^b \frac{d(k K'(x, \alpha))}{dx} f(\alpha)\, d\alpha + k K'(x, \alpha) f(\alpha) \Big|_{x+0}^{x-0}.$$

Nun gilt die eine oder andere der Gleichungen

$$K'(x, \alpha) = \psi(\alpha)\, \varphi'(x), \qquad K'(x, \alpha) = \varphi(\alpha)\, \psi'(x),$$

je nachdem $x < \alpha$ oder $x > \alpha$; man findet daher

$$K'(x, x + 0) = \psi(x)\, \varphi'(x), \qquad K'(x, x - 0) = \varphi(x)\, \psi'(x),$$

$$K'(x, x - 0) - K'(x, x + 0) = K'(x + 0, x) - K'(x - 0, x) = -\frac{1}{k};$$

der obige Ausdruck der Größe $(k F')'$ kann also geschrieben werden

$$\frac{d(k F'(x))}{dx} = \int_a^b \frac{d(k K'(x, \alpha))}{dx} f(\alpha)\, d\alpha - f(x).$$

Hieraus ergibt sich mit Rücksicht auf die Differentialgleichung, der die Größe K unterworfen ist,

$$\frac{d(k F'(x))}{dx} = \int_a^b l\, K(x, \alpha)\, f(\alpha)\, d\alpha - f(x),$$

oder

$$\frac{d(k F'(x))}{dx} - l F(x) = -f(x).$$

Speziell werde

$$f(x) = \lambda U$$

gesetzt und U sei irgend eine Lösung der Integralgleichung

$$U = \lambda \int_a^b K(x, \alpha)\, U(\alpha)\, d\alpha;$$

dann erfüllt U an den Stellen a und b die an die Normalfunktionen ge-

stellten Forderungen, da dies von $K(x, \alpha)$ gilt, und man erhält die Gleichung

$$F(x) = U, \quad \frac{d}{dx}\left(k\frac{dU}{dx}\right) - lU = -\lambda U,$$

d. h. die Sturm-Liouvillesche Differentialgleichung als Folge der Integralgleichung.

Endlich erschließen wir noch als Korollar einen weiteren von Hilbert*) herrührenden Satz, von dem wir Gebrauch machen werden. Es sei $\Phi(x)$ eine mit ihren ersten beiden Ableitungen auf der Strecke J stetige Funktion, die an den Enden a und b denselben Bedingungen wie die Eigenfunktionen unterworfen ist. Setzen wir dann

$$-\frac{d(k\Phi'(x))}{dx} + l\Phi(x) = f(x)$$

und bilden mit dieser offenbar stetigen Funktion $f(x)$ den Ausdruck $F(x)$, so ist nach dem Obigen

$$\frac{d(kF'(x))}{dx} - lF(x) = -f(x),$$

die Differenz $F - \Phi$ ist also eine Lösung der Gleichung

$$\frac{d(ky')}{dx} - ly = 0,$$

die mit ihrer Ableitung stetig ist und an den Stellen $x = a$ und $x = b$ ebenfalls die an die Eigenfunktionen gestellten Forderungen erfüllt. Danach wäre y eine Eigenfunktion, und $\lambda = 0$ der zugehörige Eigenwert, was nach unseren Festsetzungen ausgeschlossen ist; y muß also identisch verschwinden und es ergibt sich

$$\Phi(x) = F(x), \quad \Phi(x) = \int_a^b K(\alpha, x) f(\alpha) d\alpha.$$

In dieser Form ist also jede Funktion von den für $\Phi(x)$ geforderten Eigenschaften darstellbar.

§ 3.

Hilfsmittel aus der allgemeinen Theorie der homogenen Integralgleichungen.

Aus der Dissertation von Schmidt**) entlehnen wir folgenden Satz. Es seien $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots$ die sämtlichen normierten Eigenfunktionen des

*) Zweite Mitteilung, Sätze 11 und 16, Göttinger Nachrichten 1904, S. 221 und 230.

**) Entwicklung willkürlicher Funktionen nach Systemen vorgeschriebener, § 8

symmetrischen Kerns $K(x, \xi)$, und $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$ die zugehörigen Eigenwerte; d. h. es sollen die Gleichungen

$$\varphi_\nu(x) = \lambda_\nu \int_a^b K(x, \alpha)\varphi_\nu(\alpha)d\alpha,$$

$$\int_a^b (\varphi_\nu(\alpha))^2 d\alpha = 1$$

gelten, deren zweite einen in $\varphi_\nu(x)$ verfügbaren konstanten Faktor festlegt. Wenn dann in dem Gebiet $a \leqq x \leqq b$, $a \leqq y \leqq b$ die Reihe

$$\sum_\nu^{1,\infty} \frac{\varphi_\nu(x)\,\varphi_\nu(y)}{\lambda_\nu}$$

gleichmäßig konvergiert und der Kern $K(x, y)$ überall endlich und stetig ist, so gilt die Formel

$$(A) \qquad K(x, y) = \sum_\nu^{1,\infty} \frac{\varphi_\nu(x)\,\varphi_\nu(y)}{\lambda_\nu},$$

die eine Entwicklung des Kerns nach den Eigenfunktionen ergibt.

Die Voraussetzungen, an die diese Formel gebunden erscheint, sind bei den unten behandelten Kernen nicht ganz erfüllt; wohl aber sind gewisse von Schmidt*) an einer andern Stelle geforderte Eigenschaften immer vorhanden, daß nämlich, wenn $f(\alpha)$ eine auf der Strecke J mit Einschluß der Endpunkte stetige Funktion bedeutet, auch die Größe

$$\int_a^b f(\alpha)\,K(x, \alpha)\,d\alpha$$

eine auf der ganzen Strecke J stetige Funktion von x ist, und daß die von Hilbert als iterierter Kern bezeichnete Größe

$$K^2(x, y) = \int_a^b K(x, \alpha)\,K(\alpha, y)\,d\alpha$$

bezüglich beider Variablen x, y auf der ganzen Strecke J stetig ist, ohne identisch zu verschwinden.

Diese Eigenschaften, die nur, wenn singuläre Endpunkte auftreten, des Beweises bedürfen, beruhen darauf, daß in den unten behandelten Einzelfällen, wenn z. B. a ein singulärer Endpunkt ist, $\psi(x)$ in ihm logarithmisch unendlich wird, und daß $\varphi(x)$ dieselbe Eigenschaft an der Stelle b besitzt, wenn diese singulär ist. Wenn nun x und y dem Innern

*) Dissertation § 11, Schlußbemerkung.

der Strecke J angehören und $x \leqq y$ ist, findet man sofort aus den in § 2 gegebenen Formen des Kerns die Gleichungen

$$\int_a^b f(\alpha)\, K(x,\alpha)\, d\alpha = \psi(x) \int_a^x f(\alpha)\, \varphi(\alpha)\, d\alpha + \varphi(x) \int_x^b f(\alpha)\, \psi(\alpha)\, d\alpha,$$

$$K^2(x,y) = \psi(x)\,\psi(y) \int_a^x \varphi(\alpha)^2\, d\alpha \quad \varphi(x)\,\psi(y) \int_x^y \varphi(\alpha)\,\psi(\alpha)\, d\alpha + \varphi(x)\,\varphi(y) \int_y^b \psi(\alpha)^2\, d\alpha,$$

deren rechte Seiten bei der angegebenen Beschaffenheit der Größen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ stetig bleiben, auch wenn x oder x und y in einen singulären Endpunkt hineinrücken, womit die von Schmidt geforderten Stetigkeitseigenschaften gesichert sind.

Ebenso sieht man leicht, daß die Größe K^2 nicht identisch verschwindet; setzt man nämlich

$$f(\alpha) = K(\alpha, y),$$

so kann man $K^2(x, y)$ mit der Größe $F(x)$ des § 2 identifizieren und erhält damit die Differentialbeziehung

$$-K(x,y) = \frac{d}{dx}\left(k \frac{dK^2(x,y)}{dx}\right) - lK^2(x,y),$$

aus der das Behauptete folgt, da $K(x, y)$ nicht identisch verschwindet.

Nun sind nach § 6 der Dissertation von Schmidt $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\cdots$ auch die sämtlichen normierten Eigenfunktionen des Kerns K^2, sofern dieser nicht identisch verschwindet, und die zugehörigen Eigenwerte sind λ_1^2, λ_2^2, $\cdots$. Entwickelt man daher den Kern K^2 nach seinen Eigenfunktionen, wofür die nötigen Voraussetzungen erfüllt sind, so erhält man die Gleichung

$$K^2(x,y) = \sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{\varphi_\nu(x)\,\varphi_\nu(y)}{\lambda_\nu^2},$$

sobald ihre rechte Seite gleichmäßig bezüglich beider Variablen, die die ganze Strecke J durchlaufen, konvergiert. Diese Voraussetzung wollen wir in allen Einzelfällen als erfüllt nachweisen.

Jetzt erinnern wir uns der allgemeinen Bedingung, unter der eine unendliche Reihe gliedweise differenziert werden kann: Ist auf irgend einer Strecke des Konvergenzbereiches die aus den Ableitungen der einzelnen Glieder gebildete Reihe gleichmäßig konvergent, so ist sie auf dieser Strecke der Ableitung der ursprünglichen Reihe gleich, da sie gliedweise integriert werden kann und dann eine Reihe ergibt, die sich von der ur-

sprünglichen nur um einen konstanten Summanden unterscheidet. Wenn daher jetzt die neue Voraussetzung eingeführt wird, daß die Reihen

$$\sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{\varphi_\nu'(x)\,\varphi_\nu(y)}{\lambda_\nu^2}, \quad \sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{\varphi_\nu(x)\,\varphi_\nu(y)}{\lambda_\nu}$$

gleichmäßig konvergieren, wenn x und y beliebige Teilstrecken des Intervalls J durchlaufen, die keinen singulären Endpunkt enthalten, so findet man für dieses Gebiet die Gleichung

$$\frac{dK^2(x,y)}{dx} = \sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{\varphi_\nu'(x)\,\varphi_\nu(y)}{\lambda_\nu^2},$$

die somit bezüglich beider Variablen für die ganze Strecke J mit Ausschluß singulärer Enden bewiesen ist.

Multipliziert man diese Gleichung mit k und berücksichtigt die Differentialgleichung

$$\frac{d(k\varphi_\nu')}{dx} + (\lambda_\nu - l)\varphi_\nu = 0,$$

so sieht man, daß die rechte Seite gliedweise differenziert die Reihe

$$\sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{(-\lambda_\nu + l)\,\varphi_\nu(x)\,\varphi_\nu(y)}{\lambda_\nu^2}$$

ergibt, die bei den für x und y geltenden Voraussetzungen gleichmäßig konvergiert, also nach dem erwähnten Satze über das Differenzieren der Reihen die Ableitung der Größe

$$k\,\frac{dK^2(x,y)}{dx}$$

nach x darstellt. Diese ist aber zufolge der oben aus § 2 abgeleiteten Differentialbeziehung zwischen K und K^2

$$\frac{d}{dx}\left(k\,\frac{dK^2(x,y)}{dx}\right) = -K(x,y) + lK^2(x,y);$$

man erhält daher die Gleichungen

$$-K(x,y) + lK^2(x,y) = \sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{(-\lambda_\nu + l)\,\varphi_\nu(x)\varphi_\nu(y)}{\lambda_\nu^2},$$

$$K(x,y) = \sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{\varphi_\nu(x)\,\varphi_\nu(y)}{\lambda_\nu},$$

sobald x und y Intervalle der bezeichneten Art durchlaufen.

Wendet man auf die letzte Formel nochmals den Satz über das Differenzieren der Reihen an, und setzt man ferner voraus, daß von den Reihen

$$\sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{\varphi_\nu'(x)\,\varphi_\nu(y)}{\lambda_\nu}, \qquad \sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{\varphi_\nu'(x)\,\varphi_\nu(x)}{\lambda_\nu}$$

die erste gleichmäßig konvergiert, wenn x und y sich in der angegebenen Weise bewegen, außerdem aber $|x-y|$ über einer festen Grenze bleibt, die zweite aber gleichmäßig konvergiert, wenn x eine Strecke im Innern des Intervalls J durchläuft, so erhält man folgende Resultate.

(I) Wenn x und y beliebige Teilstrecken des Intervalls J durchlaufen, die keinen singulären Endpunkt enthalten, so gilt die gleichmäßig konvergente Entwicklung

$$(A) \qquad K(x,y) = \sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{\varphi_\nu(x)\,\varphi_\nu(y)}{\lambda_\nu}.$$

(II) Unter denselben Voraussetzungen und wenn außerdem $|x-y|$ über einer festen Grenze liegt, gilt die gleichmäßig konvergente Entwicklung

$$(B) \qquad K'(x,y) = \sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{\varphi_\nu'(x)\,\varphi_\nu(y)}{\lambda_\nu};$$

ferner gilt die gleichmäßig konvergente Entwicklung

$$(C) \qquad \frac{dK(x,x)}{dx} = 2\sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{\varphi_\nu'(x)\,\varphi_\nu(x)}{\lambda_\nu},$$

wenn x eine Strecke im Inneren des Intervalls J durchläuft.

Wir werden ferner in den Einzelfällen folgende Eigenschaften der Größen φ_ν ableiten.

(III) Gelten dieselben Voraussetzungen wie unter (II) für x und y, und enthalten die durchlaufenen Strecken keinen Endpunkt, so liegt die Größe

$$\sum_{\nu}^{1,n} \frac{\varphi_\nu'(x)\,\varphi_\nu(y)}{\lambda_\nu}$$

zwischen endlichen, von n, x und y unabhängigen Grenzen.

(IV) Ist a ein singulärer Endpunkt und gelten die Ungleichungen

$$a \leqq x \leqq a+c, \quad c_1 > c > 0, \quad a+c_1 \leqq \xi < b,$$

so liegt die Größe

$$\int_a^x \sum_{\nu}^{1,n} \varphi_\nu(\alpha)\,\varphi_\nu(\xi)\,d\alpha.$$

zwischen endlichen, von x, ξ und n unabhängigen Grenzen.

Die Formel (C) ist im allgemeinen auch an regulären Endpunkten unrichtig. Wenn aber x von a und b verschieden ist, kann man nach § 2 setzen

$$K(x,x) = \varphi(x)\psi(x), \quad K'(x-0,x) = \varphi'(x)\psi(x), \quad K'(x+0,x) = \varphi(x)\psi'(x),$$

also

$$(C) \quad \frac{1}{2}\frac{dK(x,x)}{dx} = \sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{\varphi_\nu(x)\varphi_\nu'(x)}{\lambda_\nu} = \frac{1}{2}[K'(x+0,x) + K'(x-0,x)].$$

Eine andere Formel summiert die Reihe (C), wenn $x = a$ gesetzt wird und a ein regulärer Endpunkt ist. Die zugehörige Grenzbedingung sei

$$\varphi'(a) - h\varphi(a) = 0,$$

und die Konstante h endlich; dann findet man

$$\sum \frac{\varphi_\nu(a)\varphi_\nu'(a)}{\lambda_\nu} = h \sum \frac{(\varphi_\nu(a))^2}{\lambda_\nu},$$

also nach (I)

$$\sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{\varphi_\nu(a)\varphi_\nu'(a)}{\lambda_\nu} = hK(a,a).$$

Da nun nach § 2 zu setzen ist

$$K(x,x) = \varphi(x)\psi(x), \quad K'(x-0,x) = \varphi'(x)\psi(x),$$

und diese Größen auch in dem regulären Endpunkte a endlich bleiben, so findet man als Korollar der Eigenschaft (I) die Gleichung

$$(D) \quad \sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{\varphi_\nu(a)\varphi_\nu'(a)}{\lambda_\nu} = \varphi'(a)\psi(a) = K'(a-0,a) = \lim_{\varepsilon=0} K'(a+\varepsilon-0,\ a+\varepsilon),$$

und eine analoge Formel gilt natürlich, wenn b ein regulärer Endpunkt der Strecke J und die Konstante H endlich ist.

§ 4.

Grundformeln für die Darstellung willkürlicher Funktionen.

Mittels der Formeln (A), (B), (C), (D) können wir nun die wichtigsten die Darstellung willkürlicher Funktionen betreffenden Fragen in der gewünschten genaueren Weise beantworten. Unsere Schlußreihe kann in folgender Weise charakterisiert werden. Der für die Darstellungsformeln maßgebende Ausdruck

$$M_\nu = \varphi_\nu(x)\int_{\xi}^{\eta} f(\alpha)\varphi_\nu(\alpha)d\alpha$$

wird mit Hilfe der Differentialgleichung der Eigenfunktionen umgeformt, indem wir unter dem Integralzeichen

$$\varphi_\nu(\alpha) = \frac{1}{\lambda_\nu}\left\{-\frac{d(k(\alpha)\varphi_\nu'(\alpha))}{d\alpha} + l(\alpha)\varphi_\nu(\alpha)\right\}$$

setzen. Dann wird durch partielle Integration bewirkt, daß unter dem Integralzeichen $\varphi_\nu'(\alpha)$ und $\varphi_\nu''(\alpha)$ nicht mehr vorkommen. Nach dieser Umgestaltung wird die Summe aller M_ν gebildet und werden die auftretenden Reihen

$$\sum_\nu^{1,\infty} \frac{\varphi_\nu(\alpha)\varphi_\nu(x)}{\lambda_\nu}, \quad \sum_\nu^{1,\infty} \frac{\varphi_\nu'(\alpha)\varphi_\nu(x)}{\lambda_\nu}$$

nach den Formeln des § 3 durch K und K' ausgedrückt. So erhält man einen Ausdruck, in dem die mit Integralzeichen behafteten Glieder ähnliche Form haben, wie in dem umgestalteten Ausdruck M_ν, und nun wird die vorher durchgeführte partielle Integration gewissermaßen rückgängig gemacht, indem man bewirkt, daß unter dem Integralzeichen nicht K, sondern die zweite Ableitung dieser Größe steht. Endlich erhält man aus der Differentialgleichung

$$\frac{d(k(\alpha)K'(\alpha,x))}{d\alpha} - l(\alpha)K(\alpha,x) = 0$$

eine von Integralzeichen freie, unmittelbar diskutierbare Gestalt der Summe aller M_ν.

Um diese Rechnung im einzelnen durchzuführen, beginnen wir mit den unmittelbar ersichtlichen Gleichungen

$$\begin{aligned}
M_\nu &= \frac{\varphi_\nu(x)}{\lambda_\nu}\int_\xi^\eta f(\alpha)\left[l(\alpha)\varphi_\nu(\alpha) + \frac{d(k(\alpha)\varphi_\nu'(\alpha))}{d\alpha}\right]d\alpha \\
&= \int_\xi^\eta f(\alpha)l(\alpha)\frac{\varphi_\nu(\alpha)\varphi_\nu(x)}{\lambda_\nu}\,d\alpha - f(\alpha)k(\alpha)\frac{\varphi_\nu'(\alpha)\varphi_\nu(x)}{\lambda_\nu}\Big|_\xi^\eta \\
&\qquad + \frac{\varphi_\nu(x)}{\lambda_\nu}\int_\xi^\eta f'(\alpha)k(\alpha)\varphi_\nu'(\alpha)\,d\alpha \\
&= \int_\xi^\eta f(\alpha)l(\alpha)\frac{\varphi_\nu(\alpha)\varphi_\nu(x)}{\lambda_\nu}\,d\alpha - f(\alpha)k(\alpha)\frac{\varphi_\nu'(\alpha)\varphi_\nu(x)}{\lambda_\nu}\Big|_\xi^\eta \\
&\qquad + f'(\alpha)k(\alpha)\frac{\varphi_\nu(\alpha)\varphi_\nu(x)}{\lambda_\nu}\Big|_\xi^\eta - \int_\xi^\eta \frac{d(f'(\alpha)k(\alpha))}{d\alpha}\frac{\varphi_\nu(\alpha)\varphi_\nu(x)}{\lambda_\nu}\,d\alpha.
\end{aligned}$$

In diesen Gleichungen ist schon benutzt, was wir später, auch wenn ξ und η veränderlich sind, immer festhalten wollen, daß die Funktion $f(\alpha)$ mit ihren ersten beiden Ableitungen auf der Strecke von $\alpha = \xi$ bis $\alpha = \eta$ stetig sei. Für die Größen x, ξ und η aber machen wir solche Voraussetzungen, daß die Summe aller M_ν gleichmäßig konvergiert, und zwar setzen wir fest, daß jede dieser Größen eine Teilstrecke des Intervalls J durchlaufe, die keinen singulären Endpunkt enthält. Die von der Größe ξ durchlaufene Strecke liege entweder im Inneren von J, oder ziehe sich in den Endpunkt a zusammen, wenn dieser regulär ist, so daß dann zugelassen wird, daß ξ den festen Wert a hat. Ferner seien c und c_1 beliebig kleine positive Konstante, und gelte die Ungleichung

$$\eta - \xi > c.$$

Bezüglich der Größe x verfolgen wir zwei Annahmen:

1. Es bestehe eine der Beziehungen

$$x - \eta > c_1, \quad \xi - x > c_1.$$

2. Es sei $x = \xi$.

Unter diesen Voraussetzungen sind zunächst in der Reihe

$$R(x)^{\xi,\eta} = \sum_{\nu}^{1,\infty} M_\nu,$$

wenn wir für M_ν den letzten der erhaltenen Ausdrücke setzen, die von Integralzeichen freien Summen

$$-\sum_{\nu}^{1,\infty} f(\alpha)\, k(\alpha)\, \frac{\varphi_\nu'(\alpha)\,\varphi_\nu(x)}{\lambda_\nu}\Big|_{\xi}^{\eta} + \sum_{\nu}^{1,\infty} f'(\alpha)\, k(\alpha)\, \frac{\varphi_\nu(\alpha)\,\varphi_\nu(x)}{\lambda_\nu}\Big|_{\xi}^{\eta}$$

gleichmäßig konvergent. Für die Summen

$$\sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{\varphi_\nu(\xi)\,\varphi_\nu(x)}{\lambda_\nu}, \quad \sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{\varphi_\nu(\eta)\,\varphi_\nu(x)}{\lambda_\nu}$$

ist dies aus der Eigenschaft (I) des § 3 unmittelbar ersichtlich, da die von x, ξ und η durchlaufenen Strecken keinen singulären Endpunkt enthalten. Dasselbe gilt aber auch nach § 3 (II) von der Summe

$$\sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{\varphi_\nu'(\eta)\,\varphi_\nu(x)}{\lambda_\nu},$$

da die Differenz $|\eta - x|$ bei beiden Voraussetzungen 1. und 2. über einer positiven Grenze bleibt, und von der Summe

$$\sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{\varphi_\nu'(\xi)\,\varphi_\nu(x)}{\lambda_\nu}$$

bei der Annahme 1., die auch die Größe $|\xi - x|$ der Null nicht beliebig nahe kommen läßt. Bei der Annahme 2. ist letztere Summe

$$\sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{\varphi_\nu'(\xi)\,\varphi_\nu(\xi)}{\lambda_\nu},$$

und diese konvergiert wiederum nach § 3 (II) gleichmäßig, da ξ entweder ein im Inneren der Strecke J liegendes Intervall durchläuft oder den konstanten Wert a behält. Die Werte aller dieser Summen ergeben sich aus den Formeln (B), (C) und (D) des § 3.

Da ferner die Summe

$$\sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{\varphi_\nu(\alpha)\,\varphi_\nu(x)}{\lambda_\nu}$$

gleichmäßig konvergiert, wenn α das Intervall von ξ bis η durchläuft, so konvergiert die ganze Reihe $R(x)^{\xi,\eta}$ bei unseren Voraussetzungen gleichmäßig, und man kann bei den im letzten Ausdruck von M_ν auftretenden Integralen die Zeichen der Summation und Integration vertauschen. So erhält man den Ausdruck

$$R(x)^{\xi,\eta} = \int_\xi^\eta f(\alpha)\,l(\alpha)K(\alpha,x)\,d\alpha - f(\eta)k(\eta)K'(\eta,x) + f'(\alpha)k(\alpha)K(\alpha,x)\Big|_\xi^\eta$$
$$+ f(\xi)k(\xi)\sum_{\nu}^{1,\infty}\frac{\varphi_\nu'(\xi)\,\varphi_\nu(x)}{\lambda_\nu} - \int_\xi^\eta K(\alpha,x)\,\frac{d(f'(\alpha)k(\alpha))}{d\alpha}\,d\alpha.$$

Das letzte Integral ergibt, wenn man partiell integriert,

$$-\int_\xi^\eta K(\alpha,x)\,\frac{d(f'(\alpha)k(\alpha))}{d\alpha}\,d\alpha = -f'(\alpha)k(\alpha)K(\alpha,x)\Big|_\xi^\eta + \int_\xi^\eta f'(\alpha)k(\alpha)K'(\alpha,x)\,d\alpha$$

$$= -f'(\alpha)k(\alpha)K(\alpha,x)\Big|_\xi^\eta + f(\alpha)k(\alpha)K'(\alpha,x)\Big|_\xi^\eta - \int_\xi^\eta f(\alpha)\,\frac{d(k(\alpha)K'(\alpha,x))}{d\alpha}\,d\alpha;$$

setzt man diesen Wert in die vorige Gleichung und berücksichtigt die oben angeführte Differentialgleichung, die die Größe $K(\alpha,x)$ erfüllt, so erhält man den einfachen Ausdruck

$$R(x)^{\xi,\eta} = f(\xi)k(\xi)\sum_{\nu}^{1,\infty}\frac{\varphi_\nu'(\xi)\,\varphi_\nu(x)}{\lambda_\nu} - f(\xi)k(\xi)K'(\xi,x),$$

dessen Wert in jedem Falle bestimmt werden kann.

Gilt nämlich die Voraussetzung 1., so bleibt $|x-\xi|$ über einer positiven Grenze, und ist daher nach § 3 (II) zu setzen

$$\sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{\varphi'_\nu(\xi)\,\varphi_\nu(x)}{\lambda_\nu} = K'(\xi, x),$$

also

$$R(x)^{\xi,\eta} = 0.$$

Macht man zweitens die Annahme 2., so ist in dem Ausdruck $R(x)^{\xi,\eta}$ für die zunächst zweideutige Größe $K'(\xi, x)$ der Wert $K'(\xi+0, \xi)$ zu nehmen, da das letzte Glied von der unteren Grenze des Integrals

$$\int_{\xi}^{\eta} d[f(\alpha)k(\alpha)K'(\alpha, x)]$$

herrührt. Ist nun ξ zunächst von a verschieden, so ergibt die Formel (C) des § 3

$$\sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{\varphi'_\nu(\xi)\,\varphi_\nu(\xi)}{\lambda_\nu} = \frac{1}{2}\,[K'(\xi+0, \xi) + K'(\xi-0, \xi)]$$

und man erhält aus dem für $R(x)^{\xi,\eta}$ aufgestellten Ausdrucke

$$R(\xi)^{\xi,\eta} = \frac{1}{2}\,f(\xi)k(\xi)\,[K'(\xi-0, \xi) - K'(\xi+0, \xi)],$$

also zufolge der Unstetigkeit der Funktion K'

$$R(\xi)^{\xi,\eta} = \frac{1}{2}\,f(\xi).$$

Setzt man dagegen $\xi = a$ und ist die Konstante h endlich, so ergibt sich nach § 3 (D) und mittels der in § 2 angegebenen Werte von $K'(a \pm 0, a)$ die Gleichung

$$R(a)^{a,\eta} = -f(a)k(a)K'(a+0, a) + f(a)k(a)K'(a-0, a) = f(a).$$

Alle drei Reihen, deren Werte hiermit bestimmt sind, konvergieren gleichmäßig bei den zugelassenen Werten von x, ξ und η, da dies im allgemeinen von der Reihe $R(x)^{\xi,\eta}$ bewiesen ist.

Analog den letzten beiden Ausdrücken $R(\xi)^{\xi,\eta}$ und $R(a)^{a,\eta}$ erhält man offenbar, wenn man die Rollen der Endpunkte a und b vertauscht und die Integrationsrichtung überall umkehrt, die Formeln

$$R(\eta)^{\xi,\eta} = \frac{1}{2}\,f(\eta), \quad R(b)^{\xi,b} = f(b);$$

in der ersten Gleichung wird vorausgesetzt, daß das Intervall der Größe η den Endpunkt b nicht enthalte oder daß beständig $\eta = b$ sei, während ξ auch in den Endpunkt a, wenn dieser regulär ist, hineinrücken darf; in der zweiten muß b ein regulärer Endpunkt sein.

Läßt man endlich x zwischen ξ und η liegen, und die Differenzen $x-\xi$ und $\eta-x$ über festen Grenzen bleiben, während ξ und η beliebige Teilintervalle der Strecke J durchlaufen, denen keine singulären Endpunkte angehören, so erhält man die gleichmäßig konvergente Reihe

$$R(x)^{\xi,\eta} = R(x)^{\xi,x} + R(x)^{x,\eta} = f(x);$$

dies ergibt sich offenbar, indem man die für $R(\xi)^{\xi,\eta}$ und $R(\eta)^{\xi,\eta}$ abgeleiteten Werte kombiniert.

Die erhaltenen Resultate können in folgender Weise zusammengefaßt werden.

Es seien $\varphi_\nu(x)$ die normierten Eigenfunktionen eines Kernes $K(x,y)$, für den die Eigenschaften (I) *und* (II) *des* § 3 *gesichert sind, und werde allgemein gesetzt*

$$R(x)^{\xi,\eta} = \sum_{\nu}^{1,\infty} \varphi_\nu(x) \int_{\xi}^{\eta} f(\alpha)\varphi_\nu(\alpha)d\alpha.$$

Jede der Größen x, ξ, η durchlaufe eine Strecke, die einen Teil des Intervalls J bildet, ohne einen singulären Endpunkt zu enthalten; die Funktion $f(\alpha)$ bleibe mit ihren ersten beiden Ableitungen auf der Strecke von ξ bis η stetig. Die Größen $|x-\xi|$, $|y-\eta|$ und $\eta-\xi$ mögen über positiven Grenzen bleiben; c, c_1 seien beliebig kleine positive Größen. Dann gelten folgende Gleichungen unter den neben ihnen stehenden besonderen Bedingungen.

$$\xi - a > c, \quad R(\xi)^{\xi,\eta} = \frac{1}{2} f(\xi),$$

$$b - \eta > c_1, \quad R(\eta)^{\xi,\eta} = \frac{1}{2} f(\eta),$$

$$\xi < x < \eta, \quad R(x)^{\xi,\eta} = f(x),$$

$$(x-\xi)(x-\eta) > 0, \quad R(x)^{\xi,\eta} = 0.$$

Ist a ein regulärer Endpunkt und die zugehörige Konstante h endlich, so gilt die Gleichung

$$R(a)^{a,\eta} = f(a),$$

ebenso, wenn b ein regulärer Endpunkt und die Konstante H endlich ist,

$$R(b)^{\xi,b} = f(b).$$

In allen diesen Gleichungen konvergieren die Reihen R gleichmäßig.

§ 5.

Ergänzungen und Ergebnisse.

Die erhaltenen Resultate zeigen auch, unter welchen Bedingungen eine Funktion $f(x)$ durch die in den Anwendungen hauptsächlich vorkommende Reihe

$$R(x) = R(x)^{a,b} = \sum_{\nu}^{1,\infty} \varphi_\nu(x) \int_a^b f(\alpha)\varphi_\nu(\alpha)d\alpha$$

dargestellt werden kann.

Zunächst seien beide Endpunkte a und b regulär und die Strecke J werde durch die Stellen

$$a = \xi_0,\ \xi_1,\ \xi_2,\ \cdots,\ \xi_{n-1},\ \xi_n = b$$

in solche Teilstrecken zerlegt, daß innerhalb jeder von ihnen $f(x)$ mit den ersten beiden Ableitungen stetig sei. Setzt man dann allgemein $\xi_\nu = \eta_{\nu-1}$, so ist offenbar

$$R(x) = R(x)^{\xi_0,\eta_0} + R(x)^{\xi_1,\eta_1} + \cdots + R(x)^{\xi_{n-1},\eta_{n-1}}$$

und die Summanden rechts sind nach § 4 zu bestimmen. Fällt x mit keiner Stelle ξ zusammen, so ist nur ein Summand, etwa der $(p+1)^{te}$, von Null verschieden, derjenige nämlich, dessen Integrationsintervall den Wert x umfaßt, und dieser hat den Wert

$$R(x)^{\xi_p,\eta_p} = R(x)^{\xi_p,x} + R(x)^{x,\eta_p} = f(x),$$

so daß man erhält

$$R(x) = f(x).$$

Fällt x dagegen mit einem Werte $\xi_\nu = \eta_{\nu-1}$ zusammen, so hat man nur zwei von Null verschiedene Summanden

$$R(\xi_\nu)^{\xi_\nu,\eta_\nu} = \frac{1}{2} f(x_\nu), \quad R(\eta_{\nu-1})^{\xi_{\nu-1},\eta_{\nu-1}} = \frac{1}{2} f(\eta_{\nu-1});$$

genauer hat man, wenn $f(x)$ an der Stelle ξ_ν unstetig ist, zu setzen

$$f(\xi_\nu) = f(\xi_\nu + 0), \quad f(\eta_{\nu-1}) = f(\eta_{\nu-1} - 0) = f(\xi_\nu - 0),$$

und daraus ergibt sich für das ganze Innere der Strecke J die Gleichung

$$R(x) = \frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)].$$

Endlich erhält man, wenn x einer der Grenzen a und b gleich gesetzt wird, wieder jedesmal nur einen von Null verschiedenen Summanden, der nach § 4 die folgenden Werte hat:

$$R(a)^{\xi_0,\eta_0} = f(a), \quad R(b)^{\xi_{n-1},\eta_{n-1}} = R(b)^{\xi_{n-1},b} = f(b),$$

so daß sich für die Endpunkte bezüglich der Reihe $R(x)$ ergibt

$$R(a) = f(a), \quad R(b) = f(b).$$

Um die analogen Resultate für den Fall, daß mindestens eine der Grenzen, etwa a, singulär ist, abzuleiten, bedarf es einer ergänzenden Untersuchung; denn da jetzt der Summand R^{a,η_0} nach § 4 nicht zu bestimmen ist, würde man aus den durchgeführten Betrachtungen zunächst nur eine Gleichung

$$R(x)^{\eta_0, \eta_{n-2}} = \frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$$

erhalten, in der x ein beliebiger Wert im Inneren von J sein könnte; wäre b regulär, so könnte η_{n-2} durch b ersetzt werden.

Wir definieren nun eine Hilfsfunktion $g(\alpha)$ in folgender Weise. Auf der Strecke von $\alpha = a$ bis $\alpha = \eta_0$, auf der $f(\alpha)$, $f'(\alpha)$ und $f''(\alpha)$ stetige Funktionen sind, sei $g(\alpha) = f(\alpha)$; ferner sei $g(\alpha)$ auf der ganzen Strecke J mit ihren ersten beiden Ableitungen stetig und es sei $g(x) = f(x)$; endlich sei $g(\alpha) = 0$ auf der Strecke von η_{n-2} bis b, der x nicht angehört. Dann genügt $g(\alpha)$ an beiden Enden der Strecke J den an die Eigenfunktionen gestellten Forderungen, ist also nach § 2 in der Form

$$g(x) = \int_a^b K(x, \alpha) h(\alpha)\, d\alpha$$

darstellbar, wobei $h(\alpha)$ eine auf der Strecke J stetige Funktion bedeutet. Eine solche Funktion ist aber, wie wir aus der allgemeinen Theorie der Integralgleichungen*) entnehmen, nach den Eigenfunktionen in eine auf der ganzen Strecke J gleichmäßig konvergierende Reihe zu entwickeln, deren Koeffizienten ähnlich wie in der Fourierschen Reihe bestimmt werden:

$$g(x) = \sum_{\nu}^{1,\infty} \varphi_\nu(x) \int_a^b g(\alpha)\, \varphi_\nu(\alpha)\, d\alpha;$$

denn die Bedingungen dieses Satzes sind nach § 3 bei unsern Kernen erfüllt.

Anderseits ergeben die Sätze des § 4

$$\sum_{\nu}^{1,\infty} \varphi_\nu(x) \int_{\eta_0}^{\eta_{n-2}} g(\alpha)\, \varphi_\nu(\alpha)\, d\alpha = f(x) = g(x),$$

da die Reihe links als die für die Funktion $g(\alpha)$ gebildete Reihe $R^{\eta_0, \eta_{n-2}}$ anzusehen ist; sie konvergiert nach § 4 gleichmäßig, solange $\eta_0 - a$, $b - \eta_{n-2}$, $x - \eta_0$ und $\eta_{n-2} - x$ über festen positiven Grenzen bleiben. Kombiniert man diese Gleichung mit der vorhergehenden für $g(x)$ aufgestellten, so findet man das gewünschte Resultat:

$$\sum_{\nu}^{1,\infty} \varphi_\nu(x) \int_a^{\eta_0} g(\alpha)\, \varphi_\nu(\alpha)\, d\alpha = \sum_{\nu}^{1,\infty} \varphi_\nu(x) \int_a^{\eta_0} f(\alpha)\, \varphi_\nu(\alpha)\, d\alpha = 0,$$

und diese Reihe konvergiert unter derselben Bedingung wie $R^{\eta_0, \eta_{n-2}}$ gleichmäßig.

*) Schmidt, Dissertation § 9; § 11, Schlußbemerkung.

Ähnlich würde sich ergeben

$$\sum_{\nu}^{1,\infty} \varphi_\nu(x) \int_{\eta_{n-2}}^{b} f(\alpha)\, \varphi_\nu(\alpha)\, d\alpha = 0,$$

und damit ist die Gleichung

$$R(x) = \tfrac{1}{2}\,[f(x+0) + f(x-0)]$$

für das Innere der Strecke J auch in dem Fall erwiesen, daß singuläre Endpunkte zugelassen werden. *Jede Funktion also, die ebenso wie ihre erste und zweite Ableitung auf der Strecke J nur eine endliche Anzahl endlicher Sprünge macht, sonst aber stetig ist, kann bei den Voraussetzungen* § 3 (I), (II) *nach den Eigenfunktionen* $\varphi_\nu(x)$ *so entwickelt werden, wie es die letzte Gleichung zeigt.*

Um noch allgemeinere Klassen von Funktionen entwickeln zu können, setzen wir zunächst auf der ganzen Strecke

$$f(\alpha) = 1$$

und führen die Bezeichnung

$$\Phi(\alpha, n) = \sum_{\nu}^{1,n} \varphi_\nu(\xi)\, \varphi_\nu(\alpha)$$

ein. Dann ergibt sich aus der Differentialgleichung der Eigenfunktionen als spezieller Fall einer in § 4 benutzten Gleichung

$$\int_{\xi}^{\eta} \Phi(\alpha, n)\, d\alpha = \sum_{\nu}^{1,n} \varphi_\nu(\xi) \int_{\xi}^{\eta} \varphi_\nu(\alpha)\, d\alpha = k(\alpha) \sum_{\nu}^{1,n} \frac{\varphi_\nu(\xi)\, \varphi_\nu'(\alpha)}{\lambda_\nu} \Bigg|_{\xi}^{\eta}$$

$$+ \int_{\xi}^{\eta} l(\alpha) \sum_{\nu}^{1,n} \frac{\varphi_\nu(\xi)\, \varphi_\nu(\alpha)}{\lambda_\nu};$$

wenn daher ξ und η um beliebig kleine endliche Strecken voneinander und von a und b entfernt bleiben, so liegt dieser Ausdruck zwischen festen von n, ξ und η unabhängigen Grenzen, da dies vom ersten Teil der rechten Seite nach § 3 (III) gilt, vom zweiten Teil aber aus der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe

$$\sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{\varphi_\nu(\xi)\, \varphi_\nu(\alpha)}{\lambda_\nu} = K(\xi, \alpha)$$

folgt. Ferner ergibt sich aus § 4 der Satz

$$\sum_{\nu}^{1,\infty} \varphi_\nu(\xi) \int_{\xi}^{\eta} \varphi_\nu(\alpha)\, d\alpha = \lim_{n=\infty} \int_{\xi}^{\eta} \Phi(\alpha, n)\, d\alpha = \frac{1}{2}$$

[illegible] 2. Kapitel.

[illegible] wird unter der Voraussetzung

$$a - c_1 < \xi < \eta < b - c_2, \quad \eta - \xi > c_3,$$

[illegible] eine positive Konstante bezeichnet sind [illegible] Für die Funktion $\Phi(\alpha, x)$ sind daher die [illegible] erfüllt, unter denen man aus der letzten Gleichung [illegible] die Riemannsche herrührenden Methode mittels des [illegible] schließen kann

$$\lim \int_{\xi}^{\eta} f(\alpha)\,\Phi(\alpha, x)\,d\alpha = \sum_{1}^{1,\infty} \varphi_\nu(x) \int_{\xi}^{\eta} f(\alpha)\,\varphi_\nu(\alpha)\,d\alpha = \frac{1}{2} f(\xi+0)$$

wenn $f(\alpha)$ eine beliebige Funktion bedeutet, die auf der Strecke $\alpha - \xi$ und $\alpha - \eta$ von beschränkter Schwankung ist. Man kontrolliert diese Behauptung leicht auf Grund der Darstellung von Jordan*), der [illegible] der Bezeichnung $\Phi(\alpha, x)$ angeschlossen haben.

Analog der letzten Gleichung findet man offenbar, indem [illegible] Rollen der Größen ξ und η vertauscht,

$$\sum_{1}^{1,\infty} \varphi_\nu(\eta) \int_{\xi}^{\eta} f(\alpha)\,\varphi_\nu(\alpha)\,d\alpha = \frac{1}{2} f(\eta - 0)$$

und hieraus, wenn $f(\alpha)$ auf der ganzen Strecke J von beschränkter Schwankung ist, und x zwischen $a + c_0$ und $b - c_2$ liegt,

$$\lim \sum_{1}^{1,\infty} \varphi_\nu(x) \int_{a+c_0}^{b-c_2} f(\alpha)\,\varphi_\nu(\alpha)\,d\alpha = \frac{1}{2}\,[f(x+0) + f(x-0)].$$

Um in diese Formel die erwünschten Integrationsgrenzen einführen zu können, gehen wir davon aus, daß nach den an [illegible] $g(\alpha)$ geknüpften Erwägungen, wenn

$$x > a + c_0 \geqq \eta > a$$

angenommen wird, die Gleichung

$$\sum_{1}^{1,\infty} \varphi_\nu(x) \int_{a}^{\eta} \varphi_\nu(\alpha)\,d\alpha = 0$$

gilt, die Reihe konvergiert bezüglich der Variablen x und η gleichmäßig, wenn x [illegible] $(a + c_0)$ und η [illegible] a über beliebig kleinen festen Grenzen [illegible] Ziehen wir jetzt, was bisher noch nicht geschehen ist, die Ergebnisse des § 3 (IV) heran und setzen, abweichend von der bisherigen Bedeutung

$$\Phi(\alpha, x) = \sum_{1}^{1,\infty} \varphi_\nu(x)\,\varphi_\nu(\alpha),$$

*) Cours d'analyse Bd. 2, Nr. 221

sehen wir, daß das Integral

$$\int_a^\eta \Phi(\alpha, n)\, d\alpha$$

zwischen endlichen von n und η unabhängigen Grenzen liegt, und zwar auch wenn $\eta - a$ beliebig klein wird. Außerdem gibt die soeben aufgestellte Gleichung

$$\lim_{n=\infty} \int_a^\eta \Phi(\alpha, n)\, d\alpha = 0,$$

und der Grenzwert wird gleichmäßig angestrebt, wenn η die Strecke von $a + c_0$ bis zu einer a beliebig wenig übertreffenden Grenze herab durchläuft. Der Ausdruck $\Phi(\alpha, n)$ hat daher wiederum die an der zitierten Stelle von Jordan geforderten Eigenschaften, aus denen man, wenn $f(x)$ eine Funktion von beschränkter Schwankung ist, schließen kann

$$\lim_{n=\infty} \int_a^\eta f(\alpha)\, \Phi(\alpha, n)\, d\alpha = 0,$$

oder, indem man speziell $\eta = a + c_0$ setzt

$$R(x)^{a, a+c_0} = \sum_\nu^{1,\infty} \varphi_\nu(x) \int_a^{a+c_0} f(\alpha)\, \varphi_\nu(\alpha)\, d\alpha = 0.$$

Kombiniert man dies Resultat mit dem für $R^{a+c_0, b-c_2}$ gefundenen Ausdruck und stellt eine analoge Formel für das Intervall von $b - c_2$ bis b auf, so ergibt sich schließlich die erwünschte Gleichung

$$R^{a,b} = R^{a, a+c_0} + R^{a+c_0, b-c_2} + R^{b-c_2, b}$$
$$= \sum_\nu^{1,\infty} \varphi_\nu(x) \int_a^b f(\alpha)\, \varphi_\nu(\alpha)\, d\alpha = \frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)],$$

die somit unter den Voraussetzungen § 3, (I) *bis* (IV) *für eine beliebige Funktion von beschränkter Schwankung und für das Innere der Strecke J bewiesen ist.*

Will man von der Eigenschaft (IV), die im allgemeinen schwer zu beweisen ist, keinen Gebrauch machen, so braucht man nur vorauszusetzen, daß die Funktion $f(\alpha)$ von einem singulären Endpunkte an eine beliebig kleine Strecke weit stetig sei und stetige Ableitungen erster und zweiter Ordnung besitze, im übrigen aber von beschränkter Schwankung sei.

Endlich kann mittels der jetzt vorliegenden Ergebnisse auch gezeigt werden, daß die Reihe $R(x)$ gleichmäßig konvergiert, wenn die Variable x

und dieser Grenzwert wird unter der Voraussetzung

$$a + c_0 < \xi < \eta < b - c_2, \quad \eta - \xi > c_1,$$

in der durch c beliebig kleine positive Konstante bezeichnet sind, gleichmäßig angestrebt. Für die Funktion $\Phi(\alpha, n)$ sind daher die Voraussetzungen erfüllt, unter denen man aus der letzten Gleichung nach einer von du Bois-Reymond herrührenden Methode mittels des zweiten Mittelwertsatzes schließen kann

$$\lim_{n=\infty} \int_{\xi}^{\eta} f(\alpha)\,\Phi(\alpha, n)\,d\alpha = \sum_{\nu}^{1,\infty} \varphi_\nu(\xi) \int_{\xi}^{\eta} f(\alpha)\,\varphi_\nu(\alpha)\,d\alpha = \frac{1}{2} f(\xi+0),$$

wobei $f(\alpha)$ eine beliebige Funktion bedeutet, die auf der Strecke von $\alpha = \xi$ bis $\alpha = \eta$ von beschränkter Schwankung ist. Man kontrolliert diese Behauptung leicht auf Grund der Darstellung von Jordan*), der wir uns mit der Bezeichnung $\Phi(\alpha, n)$ angeschlossen haben.

Analog der letzten Gleichung findet man offenbar, indem man die Rollen der Größen ξ und η vertauscht,

$$\sum_{\nu}^{1,\infty} \varphi_\nu(\eta) \int_{\xi}^{\eta} f(\alpha)\,\varphi_\nu(\alpha)\,d\alpha = \frac{1}{2} f(\eta-0)$$

und hieraus, wenn $f(\alpha)$ auf der ganzen Strecke J von beschränkter Schwankung ist, und x zwischen $a + c_0$ und $b - c_2$ liegt,

$$R(x)^{a+c_0, b-c_2} = \sum_{\nu}^{1,\infty} \varphi_\nu(x) \int_{a+c_0}^{b-c_2} f(\alpha)\,\varphi_\nu(\alpha)\,d\alpha = \frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)].$$

Um in diese Formel die erwünschten Integrationsgrenzen a und b einführen zu können, gehen wir davon aus, daß nach den an die Funktion $g(\alpha)$ geknüpften Erwägungen, wenn

$$x > a + c_0 \geqq \eta > a$$

angenommen wird, die Gleichung

$$\sum_{\nu}^{1,\infty} \varphi_\nu(x) \int_{a}^{\eta} \varphi_\nu(\alpha)\,d\alpha = 0$$

gilt; die Reihe konvergiert bezüglich der Variablen x und η gleichmäßig, wenn $x - (a+c_0)$ und $\eta - a$ über beliebig kleinen festen Grenzen bleiben. Ziehen wir jetzt, was bisher noch nicht geschehen ist, die Eigenschaft § 3 (IV) heran und setzen, abweichend von der bisherigen Bezeichnung,

$$\Phi(\alpha, n) = \sum_{\nu}^{1,n} \varphi_\nu(x)\,\varphi_\nu(\alpha),$$

*) Cours d'analyse Bd. 2, Nr. 221.

so sehen wir, daß das Integral

$$\int_a^\eta \Phi(\alpha, n)\, d\alpha$$

zwischen endlichen von n und η unabhängigen Grenzen liegt, und zwar auch wenn $\eta - a$ beliebig klein wird. Außerdem gibt die soeben aufgestellte Gleichung

$$\lim_{n=\infty} \int_a^\eta \Phi(\alpha, n)\, d\alpha = 0,$$

und der Grenzwert wird gleichmäßig angestrebt, wenn η die Strecke von $a + c_0$ bis zu einer a beliebig wenig übertreffenden Grenze herab durchläuft. Der Ausdruck $\Phi(\alpha, n)$ hat daher wiederum die an der zitierten Stelle von Jordan geforderten Eigenschaften, aus denen man, wenn $f(x)$ eine Funktion von beschränkter Schwankung ist, schließen kann

$$\lim_{n=\infty} \int_a^\eta f(\alpha)\, \Phi(\alpha, n)\, d\alpha = 0,$$

oder, indem man speziell $\eta = a + c_0$ setzt

$$R(x)^{a, a+c_0} = \sum_\nu^{1,\infty} \varphi_\nu(x) \int_a^{a+c_0} f(\alpha)\, \varphi_\nu(\alpha)\, d\alpha = 0.$$

Kombiniert man dies Resultat mit dem für $R^{a+c_0, b-c_2}$ gefundenen Ausdruck und stellt eine analoge Formel für das Intervall von $b - c_2$ bis b auf, so ergibt sich schließlich die erwünschte Gleichung

$$R^{a,b} = R^{a, a+c_0} + R^{a+c_0, b-c_2} + R^{b-c_2, b}$$

$$= \sum_\nu^{1,\infty} \varphi_\nu(x) \int_a^b f(\alpha)\, \varphi_\nu(\alpha)\, d\alpha = \frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)],$$

die somit unter den Voraussetzungen § 3, (I) *bis* (IV) *für eine beliebige Funktion von beschränkter Schwankung und für das Innere der Strecke J bewiesen ist.*

Will man von der Eigenschaft (IV), die im allgemeinen schwer zu beweisen ist, keinen Gebrauch machen, so braucht man nur vorauszusetzen, daß die Funktion $f(\alpha)$ von einem singulären Endpunkte an eine beliebig kleine Strecke weit stetig sei und stetige Ableitungen erster und zweiter Ordnung besitze, im übrigen aber von beschränkter Schwankung sei.

Endlich kann mittels der jetzt vorliegenden Ergebnisse auch gezeigt werden, daß die Reihe $R(x)$ gleichmäßig konvergiert, wenn die Variable x

eine Strecke durchläuft, die in einer größeren enthalten ist, auf der die Funktion $f(x)$ stetig bleibt. Wir können uns betreffs dieses Nachweises auf eine Abhandlung berufen*), in der dieser Satz zwar nur für die Sturm-Liouvilleschen Normalfunktionen, aber doch im wesentlichen nach einer allgemeinen Methode abgeleitet ist. Das Integral

$$\int_{\xi}^{\eta} \Phi(\alpha, n)\, d\alpha$$

konvergiert nämlich nach den oben erhaltenen Resultaten genau in dem Sinne gleichmäßig gegen seine Grenze $\frac{1}{2}$, wie es a. a. O.**) vorausgesetzt ist. Allerdings ist dort mittels der asymptotischen Darstellung der Normalfunktionen bewiesen, daß die Reihe

$$\sum_{\nu}^{1,\infty} \varphi_\nu(x) \int_a^\eta \varphi_\nu(\alpha) f(\alpha)\, d\alpha = \lim_{n=\infty} \int_a^\eta f(\alpha)\, \Phi(\alpha, n)\, d\alpha$$

bei den Voraussetzungen

$$x > \eta + c, \quad c > 0,$$

und wenn $f(\alpha)$ von beschränkter Schwankung ist, gleichmäßig gegen den Wert Null konvergiert; das haben wir aber soeben aus der Eigenschaft (IV) erschlossen, was nötig war, da die asymptotische Darstellung im allgemeinen an den singulären Stellen ungültig wird. Für die zitierte Argumentation sind also die Grundlagen auch hier gesichert, und der ausgesprochene Satz über die gleichmäßige Konvergenz der Reihe $R(x)$ ist so gut wie bewiesen.

§ 6.

Anwendungen: die Sturm-Liouvilleschen Reihen.

Von Sturm und Liouville sind eingehend diejenigen Normalfunktionen untersucht, bei denen auf der Strecke J die Größe k von Null verschieden und l endlich, beide Endpunkte a und b also regulär sind, und der Kern $K(x, \xi)$ endlich und stetig bleibt, wenn jedes seiner Argumente die ganze Strecke J durchläuft. Unter dieser Voraussetzung kann man die Gleichung

$$\frac{d(ky')}{dx} + (\lambda - l)y = 0$$

durch die Substitutionen

$$z = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{k}}, \quad U = y\sqrt[4]{k}$$

*) Math. Annalen Bd. 60, S. 411 ff.

**) a. a. O. S. 408.

in die Gleichung

$$\frac{d^2U}{dz^2} + (\lambda - l_1)U = 0$$

überführen. Wird hier als unabhängige Variable das Produkt aus z und einem passenden konstanten Faktor eingeführt, und die Bedeutung der Buchstaben x, l, λ in leicht zu übersehender Weise geändert, so bewirkt man, daß das Intervall J sich von 0 bis π erstreckt, und die Differentialgleichung der Normalfunktionen ist

$$\frac{d^2U}{dx^2} + (\lambda - l)U = 0,$$

wobei l auf der Strecke J endlich ist und nach § 2 so eingerichtet gedacht werden kann, daß keiner der Eigenwerte verschwindet. Die Grenzbedingungen sind

$$\frac{dU}{dx} - hU\Big|^0 = 0, \quad \frac{dU}{dx} + HU\Big|^\pi = 0,$$

wobei auch unendliche Werte von h und H, d. h. Bedingungen von der Form

$$U|^0 = 0, \quad U|^\pi = 0$$

nicht ausgeschlossen sind. Wir bleiben bei der Annahme endlicher Werte von h und H, da andernfalls nur leichte Modifikationen nötig werden.

Unter diesen Voraussetzungen gelten nun nach Liouville*), wenn ϱ den positiven Wert von $\sqrt{\lambda}$ bedeutet, die Formeln

$$U = \cos \varrho x + \frac{\Psi}{\varrho}, \quad \frac{U'}{\varrho} = -\sin \varrho x + \frac{\Psi}{\varrho},$$

$$\varrho = \sqrt{\lambda} = \nu + \frac{\Psi}{\nu},$$

wobei $\nu = 1, 2, \cdots$ zu setzen ist und durch Ψ, wie auch fernerhin, Größen bezeichnet sind, die zwischen endlichen, von ν und x unabhängigen Grenzen verbleiben.

Um die normierten Eigenfunktionen herzustellen, benutzen wir die für die eingeführte Größe U von Liouville abgeleitete Formel**)

$$\int_0^\pi U(\alpha)^2 d\alpha = \frac{\pi}{2} + \frac{\Psi}{\nu};$$

da nun der angegebene Wert von ϱ ergibt

*) Liouville, Journal de Math. (1) Bd. 2. Kneser, Math. Annalen Bd. 58, S. 116.

**) Math. Annalen Bd. 58, S. 122.

$$\cos \varrho x = \cos \nu x \cos \frac{\psi}{\nu} - \sin \nu x \sin \frac{\psi}{\nu} = \cos \nu x + \frac{\psi}{\nu},$$

$$\sin \varrho x = \sin \nu x + \frac{\psi}{\nu},$$

so findet man als Ausdruck der normierten Eigenfunktionen

$$U\Big[\int_0^\pi U(\alpha)^2 d\alpha\Big]^{-\frac{1}{2}} \cdot \varphi_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos \nu x + \frac{\psi}{\nu},$$

$$\frac{\varphi_\nu'(x)}{\nu} = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin \nu x + \frac{\psi}{\nu},$$

und die zugehörigen Eigenwerte sind

$$\lambda_\nu = \varrho^2 = \nu^2 + \frac{\psi}{\nu}.$$

Hieraus folgt

$$\frac{1}{\lambda_\nu} = \frac{1}{\nu^2}\Big(1 + \frac{\psi}{\nu}\Big), \quad \frac{\varphi_\nu(x)\,\varphi_\nu(y)}{\lambda_\nu} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\cos \nu x \cos \nu y}{\nu^2} + \frac{\psi}{\nu^3}.$$

Die Reihe

$$\sum_\nu^{1,\infty} \frac{\varphi_\nu(x)\,\varphi_\nu(y)}{\lambda_\nu}$$

konvergiert daher gleichmäßig, wenn x und y das ganze Intervall J mit Einschluß der Grenzen durchlaufen, und damit ist nach dem in § 3 zitierten Satze von Schmidt die Gleichung (A) erwiesen.

Um auch die Formeln (B) und (C) zu erhalten, gehen wir davon aus, daß die aufgestellten Formen der normierten Eigenfunktionen ergeben

$$\frac{\varphi_\nu'(x)\,\varphi_\nu(y)}{\lambda_\nu} = \frac{\varphi_\nu'(x)}{\nu} \varphi_\nu(y) \Big(\frac{1}{\nu} + \frac{\psi}{\nu^2}\Big) = -\frac{2 \sin \nu x \cos \nu y}{\pi \nu} + \frac{\psi}{\nu^2},$$

$$\sum_1 \frac{\varphi_\nu'(x)\,\varphi_\nu(y)}{\lambda_\nu} = -\frac{1}{\pi} \sum_\nu \frac{\sin \nu(x+y)}{\nu} - \frac{1}{\pi} \sum_\nu \frac{\sin \nu(x-y)}{\nu} + \sum_\nu \frac{\psi}{\nu^2}.$$

Hier ist das letzte Glied der rechten Seite gleichmäßig konvergent, wie immer x und y im Intervall J sich bewegen mögen. Nehmen wir aber an, x durchlaufe ein Intervall, das einen Teil von J bildet, den Punkt y aber nicht enthält, so bleiben $x - y$ und $x + y$ oberhalb einer positiven Grenze und unterhalb eines Wertes von der Form $2\pi - c$, wobei c positiv ist. Daraus folgt die gleichmäßige Konvergenz auch des ersten und zweiten Gliedes auf der rechten Seite unserer Gleichung; denn es ist bekannt*), daß die Reihe

$$S = \sum_\nu^{1,\infty} \frac{\sin \nu u}{\nu}$$

*) Weber-Wellstein, Enc. d. Elementarmathematik Bd. 1, § 135.

auf jeder Strecke, die durch die Beziehungen

$$0 < c_0 < u < 2\pi - c, \quad c > 0$$

definiert ist, gleichmäßig konvergiert. Ferner bleibt die Summe der ersten n Glieder dieser Reihe, wie immer u und n gewählt werden mögen, zwischen endlichen, von u und n unabhängigen Grenzen, auch wenn u der Null beliebig nahe kommt; dieselbe Eigenschaft kommt daher auch der Reihe

$$\sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{\varphi_\nu'(x)\,\varphi_\nu(y)}{\lambda_\nu}$$

zu, wenn x und y Strecken des Intervalls J durchlaufen, die den Endpunkt π nicht enthalten.

Die Formel (C) macht keine neuen Schwierigkeiten; denn unsere Ausdrücke für $\varphi_\nu(x)$ und $\varphi_\nu'(x)$ ergeben

$$\sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{\varphi_\nu(x)\,\varphi_\nu'(x)}{\lambda_\nu} = -\frac{1}{\pi} \sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{\sin 2\nu x}{\nu} + \sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{\Psi}{\nu^2},$$

und aus den angeführten Eigenschaften der Reihe S schließt man sofort, daß die hingeschriebene Reihe gleichmäßig konvergiert, wenn x eine zwischen 0 und π liegende Strecke durchläuft. Damit sind die Eigenschaften (I), (II), (III) und die Formeln (A), (B), (C) in dem vollen Umfange gesichert, wie sie in § 4 gebraucht werden; die Eigenschaft (IV) kommt nicht in Frage, da beide Endpunkte regulär sind. Die Resultate der §§ 4 und 5 gelten also für die Sturm-Liouvilleschen Reihen, wie wir übrigens auf andere Weise schon früher nachgewiesen haben.*)

§ 7.

Die Darstellung willkürlicher Funktionen durch Besselsche.

Die einfachsten von der mathematischen Physik gestellten Aufgaben, die denen des vorigen Paragraphen analog sind und auf Besselsche Funktionen führen, können in folgender Form ausgesprochen werden. Es sollen die Integrale der Besselschen Gleichung

$$-\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right) + \lambda x y = 0$$

gefunden werden, die an der singulären Stelle $a = 0$ endlich sind, und an der Stelle $b = 1$ einer der Forderungen

$$y|^1 = 0, \quad y' + Hy|^1 = 0,$$

*) Math. Annalen Bd. 60.

in denen H eine Konstante ist, unterworfen und auf der Strecke von 0 bis 1 mit ihren Ableitungen stetig sind; man findet leicht

$$y = J(x\sqrt{\lambda}), \quad J(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \cdots,$$

und erhält für λ eine der Gleichungen

$$J(\sqrt{\lambda}) = 0, \quad \sqrt{\lambda}\, J'(\sqrt{\lambda}) + HJ(\sqrt{\lambda}) = 0.$$

Um die Besselsche Differentialgleichung auf die Gestalt zu bringen, die wir in unserer Theorie voraussetzen, substituieren wir

$$du = 2x\,dx, \qquad x = \sqrt{u},$$

und ersetzen u durch x; dann ergibt sich

$$\frac{d}{dx}\left(4x\frac{dy}{dx}\right) + \lambda y = 0.$$

Die Werte a und b und die Form der Grenzbedingungen ändern sich nicht; für y aber haben wir jetzt die Funktion $J(\sqrt{\lambda x})$ zu nehmen. Um den Eigenwert $\lambda = 0$ zu vermeiden, ersetzen wir λ in der letzten Gleichung durch $\lambda - \mu$, so daß sie die folgende Gestalt annimmt:

$$\frac{d}{dx}\left(4x\frac{dy}{dx}\right) + (\lambda - \mu)\, y = 0.$$

Ihre an der Stelle $x = 0$ endliche Lösung ist jetzt

$$J(\varrho\sqrt{x}) = J(\sqrt{(\lambda - \mu)\, x}),$$

wobei die Quadratwurzeln positiv zu nehmen sind und

$$\lambda = \mu + \varrho^2$$

gesetzt ist, für ϱ aber eine der Gleichungen

$$J(\varrho) = 0, \qquad \varrho J'(\varrho) + HJ(\varrho) = 0$$

gilt.

Die normierten Eigenfunktionen sind

$$J(\varrho\sqrt{x})\left[\int_0^1 J^2(\varrho\sqrt{u})\, du\right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$= J(\varrho\sqrt{x})\left[2\int_0^1 \alpha\, J^2(\varrho\alpha)\, d\alpha\right]^{-\frac{1}{2}}.$$

Um sie hinsichtlich ihrer Größenverhältnisse genauer zu untersuchen,

gehen wir von folgenden bekannten Formeln*) aus, die gelten, sobald x oberhalb einer beliebig kleinen positiven Grenze ε verbleibt:

$$J(x) = \frac{\cos x + \sin x}{\sqrt{\pi x}} + \frac{\Psi}{x^{\frac{3}{2}}},$$
$$J'(x) = \frac{\cos x - \sin x}{\sqrt{\pi x}} + \frac{\Psi}{x^{\frac{3}{2}}};$$

in ihnen, wie auch weiter unten, ist das Symbol Ψ vieldeutig und bezeichnet Größen, die zwischen endlichen, von x unabhängigen Grenzen liegen. Aus diesen Gleichungen folgt sofort:

$$J^2(x) + J'^2(x) = \frac{2}{\pi x} + \frac{\Psi}{x^2}.$$

Anderseits ergibt die Besselsche Differentialgleichung leicht**)

$$\int_0^x \alpha J^2(\alpha)\, d\alpha = \frac{x^2}{2}\,[J^2(x) + J'^2(x)],$$

speziell also

$$\int_0^1 \alpha J^2(\varrho\alpha)\, d\alpha = \frac{1}{2}\,[J^2(\varrho) + J'^2(\varrho)],$$

und hieraus folgt auf Grund der angegebenen asymptotischen Darstellung von $J(x)$ und $J'(x)$ die Formel

$$\int_0^1 \alpha J^2(\varrho\alpha)\, d\alpha = \frac{1}{\pi\varrho} + \frac{\Psi_0}{\varrho^2},$$
$$\left[\int_0^1 \alpha J^2(\varrho\alpha)\, d\alpha\right]^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\pi\varrho}\left(1 + \frac{\Psi_0}{\varrho^{\frac{3}{2}}}\right),$$

und die Größen Ψ_0 liegen zwischen endlichen, von ϱ unabhängigen Grenzen. Nur wenn der Wert $\varrho = 0$ vorkommt, verliert diese Formel ihren Sinn; da wir sie aber nur bei Konvergenzuntersuchungen benutzen, ist das kein wesentlicher Mangel. Abgesehen von diesem Falle erhalten wir somit für die normierten Eigenfunktionen und ihre Ableitungen die Ausdrücke

$$\varphi_\nu(x) = \sqrt{\frac{\pi\varrho}{2}}\, J(\varrho\sqrt{x})\left(1 + \frac{\Psi_0}{\varrho^{\frac{3}{2}}}\right),$$
$$\varphi_\nu'(x) = \frac{\varrho}{2}\sqrt{\frac{\pi\varrho}{2x}}\, J'(\varrho\sqrt{x})\left(1 + \frac{\Psi_0}{\varrho^{\frac{3}{2}}}\right).$$

Lassen wir jetzt x über einer beliebig kleinen positiven Grenze

*) Lipschitz, Crelles Journal Bd. 56. Jordan, Cours d'analyse Bd. 3, Nr. 215, 216.
**) Riemann-Weber, Partielle Differentialgleichungen Bd. 1, § 79.

bleiben, so können wir wiederum die asymptotischen Ausdrücke von $J(x)$ und $J'(x)$ benutzen und erhalten folgende Gleichungen:

$$\varphi_\nu(x) = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt[4]{x}}\left(\sin\varrho\sqrt{x} + \cos\varrho\sqrt{x} + \frac{\Psi}{\varrho\sqrt{x}}\right)\left(1 + \frac{\Psi_0}{\varrho^{\frac{3}{2}}}\right),$$

$$\varphi_\nu'(x) = \frac{\varrho}{2\sqrt{2}\sqrt[4]{x^3}}\left(\cos\varrho\sqrt{x} - \sin\varrho\sqrt{x} + \frac{\Psi}{\varrho\sqrt{x}}\right)\left(1 + \frac{\Psi_0}{\varrho^{\frac{3}{2}}}\right).$$

Hieraus ergibt sich, daß die Gleichungen, deren Wurzeln die Größen ϱ sind, sobald diese eine gewisse Grenze überschreiten, durch eine der Formen

$$\cos\varrho + \sin\varrho = 0, \qquad \varrho(\cos\varrho - \sin\varrho) + H(\sin\varrho + \cos\varrho) = 0$$

annähernd dargestellt werden. Wenn daher r von ν unabhängig ist und das vieldeutige Symbol Ψ Größen bezeichnet, die zwischen endlichen von ν unabhängigen Grenzen liegen, so kann man setzen

$$\varrho = r + \nu\pi + \frac{\Psi}{\nu},$$

und hieraus ergibt sich für die Eigenwerte

$$\frac{1}{\lambda_\nu} = \frac{1}{\mu + \varrho^2} = \frac{1}{\pi^2\nu^2}\left(1 + \frac{\Psi}{\nu}\right), \qquad \frac{1}{\lambda_\nu^2} = \frac{1}{\pi^4\nu^4}\left(1 + \frac{\Psi}{\nu}\right).$$

Man findet ferner leicht, wenn u eine beliebige Größe bedeutet, die Gleichungen

$$\cos\varrho u = \cos(r + \nu\pi)u + \frac{\Psi}{\nu}, \qquad \sin\varrho u = \sin(r + \nu\pi)u + \frac{\Psi}{\nu};$$

benutzt man diese Werte in den für $\varphi_\nu(x)$ und $\varphi_\nu'(x)$ gegebenen Ausdrücken, so findet man

$$\varphi_\nu(x) = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt[4]{x}}\left\{\sin(r + \nu\pi)\sqrt{x} + \cos(r + \nu\pi)\sqrt{x} + \frac{\Psi}{\nu}\right\},$$

$$\varphi_\nu'(x) = \frac{\varrho}{2\sqrt{2}\sqrt[4]{x^3}}\left\{\cos(r + \nu\pi)\sqrt{x} - \sin(r + \nu\pi)\sqrt{x} + \frac{\Psi}{\nu}\right\},$$

und wenn y ebenso wie x über einer beliebig kleinen positiven Grenze bleibt,

$$\varphi_\nu(x)\varphi_\nu(y) = \frac{1}{2\sqrt[4]{xy}}\left\{\sin(r+\nu\pi)(\sqrt{x}+\sqrt{y}) + \cos(r+\nu\pi)(\sqrt{x}-\sqrt{y}) + \frac{\Psi}{\nu}\right\},$$

$$\varphi_\nu(x)\varphi_\nu'(x) = \frac{\varrho}{4x}\left\{\cos 2(r+\nu\pi)\sqrt{x} + \frac{\Psi}{\nu}\right\},$$

$$\varphi_\nu'(x)\varphi_\nu(y) = \frac{\varrho}{4\sqrt[4]{x^3y}}\left\{\cos(r+\nu\pi)(\sqrt{x}+\sqrt{y}) + \sin(r+\nu\pi)(\sqrt{y}-\sqrt{x}) + \frac{\Psi}{\nu}\right\}.$$

Da nun die Reihen

$$\sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{\cos \nu u}{\nu}, \quad \sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{\sin \nu u}{\nu}$$

gleichmäßig konvergieren, wenn mit beliebig kleinen positiven Konstanten c, c_1 die Ungleichung

$$c \leqq u \leqq 2\pi - c_1$$

festgesetzt wird; da ferner unter dieser Bedingung auch die Summe

$$\sum_{\nu}^{1,n} \frac{\cos \nu u}{\nu},$$

und unter der weiteren Voraussetzung

$$0 < u \leqq 2\pi - c_1$$

die Summe

$$\sum_{\nu}^{1,n} \frac{\sin \nu u}{\nu}$$

zwischen endlichen von ν und u unabhängigen Grenzen liegt, so ist ersichtlich, daß die Reihen

$$R = \sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{\varphi_\nu(x)\,\varphi_\nu(y)}{\lambda_\nu}, \quad S = \sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{\varphi_\nu'(x)\,\varphi_\nu(y)}{\lambda_\nu^2}$$

gleichmäßig konvergieren, wenn x und y beliebige, die Stelle 0 nicht enthaltende Teilstrecken des von 0 bis 1 reichenden Intervalls J durchlaufen; daß unter derselben Voraussetzung und wenn außerdem $|x-y|$ über einer beliebig kleinen Grenze bleibt, auch die Reihe

$$T = \sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{\varphi_\nu'(x)\,\varphi_\nu(y)}{\lambda_\nu}$$

gleichmäßig konvergiert; daß die Reihe

$$U = \sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{\varphi_\nu(x)\,\varphi_\nu'(x)}{\lambda_\nu}$$

gleichmäßig konvergiert, wenn x eine zwischen 0 und 1 liegende Strecke durchläuft; daß endlich, wenn x, y, $1-x$ und $1-y$ über endlichen Grenzen bleiben, die Summe

$$\sum_{\nu}^{1,n} \frac{\varphi_\nu'(x)\,\varphi_\nu(y)}{\lambda_\nu}$$

zwischen endlichen von n unabhängigen Grenzen liegt.

Das letzte dieser Resultate gibt die Eigenschaft (III) des § 3; um die Formeln (A), (B), $\cdots$ zu gewinnen, überzeugen wir uns zunächst davon, daß der Kern $K(x, y)$ die in § 3 geforderten Eigenschaften besitzt. Das wird daraus klar, daß $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ Integrale der Differentialgleichung sind, die auch für die Größe $J\sqrt{-\mu x}$ gilt. Diese hat an der singulären Stelle $x=0$ ein logarithmisch unendliches Integral; eben diese Singularität weist daher die Funktion $\psi(x)$ auf, wie auch der in § 6 gegebene explizite Ausdruck zeigt.

Ferner konvergiert die Reihe

$$\sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{\varphi_\nu(x)\,\varphi_\nu(y)}{\lambda_\nu^2} = \sum_{\varrho} \frac{2\pi\varrho\, J(\varrho\sqrt{x})\, J(\varrho\sqrt{y})}{(\mu+\varrho^2)^2}\left(1+\frac{\psi_0}{\varrho^{\frac{3}{2}}}\right),$$

da die Funktion $J(u)$ bei beliebigen reellen Werten von u zwischen festen endlichen Grenzen bleibt, gleichmäßig, wenn jede der Größen x und y das ganze Intervall J mit Einschluß der Stelle 0 durchläuft. Hieraus und aus dem, was über die Konvergenz der Reihen R, S, T und U bewiesen ist, kann man nach § 3 die Eigenschaften (I) und (II) erschließen.

Unsere allgemeinen Sätze ergeben somit, daß eine Funktion von x zwischen den Stellen $x=0$ und $x=1$ auf die Fouriersche Art nach den Normalfunktionen $\varphi_\nu(x)$ entwickelt werden kann, wenn sie auf einer beliebig kleinen an der Stelle 0 beginnenden Strecke mit ihren ersten beiden Ableitungen stetig, im übrigen aber auf der betrachteten Strecke nur von beschränkter Schwankung ist. Entwickelt man irgend eine zulässige Funktion $f(\sqrt{x})$ und ersetzt dann x durch x^2, so erhält man die gewöhnlich benutzte Formel

$$f(x) = \sum_{\varrho} J(\varrho x)\, \frac{\int_0^1 \alpha f(\alpha) J(\varrho\alpha)\, d\alpha}{\int_0^1 \alpha J^2(\varrho\alpha)\, d\alpha}.$$

Den durchgeführten ähnliche Entwicklungen gelten übrigens für die Besselschen Funktionen $J_n(x)$; man ersieht das leicht daraus, daß $J_n(\sqrt{x})$ ein Integral der Gleichung

$$4\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right)+\left(1-\frac{n^2}{x}\right)y=0$$

ist und daß $J_n(x)$ in folgender Weise asymptotisch dargestellt werden kann*):

*) Jordan, Cours d'analyse Bd. 3, Nr. 216. Gray and Mathews, Bessel Functions Kap. 4, Nr. 91.

$$J_n(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left[\frac{(2n+1)\pi}{4} - x\right];$$

damit sind die im vorhergehenden fundamentalen Eigenschaften der Funktion $J(x)$ auf $J_n(x)$ im wesentlichen übertragen.

§ 8.

Die Entwicklung beliebiger Funktionen von beschränkter Schwankung nach Besselschen.

Das Resultat des vorigen Paragraphen dürfte für alle Anwendungen ausreichen, da es wohl immer genügt, Funktionen zu betrachten, die selbst ebenso wie ihre ersten beiden Ableitungen nur eine endliche Anzahl von endlichen Sprüngen machen, im übrigen aber stetig sind. Immerhin dürfte es theoretisch wichtig erscheinen, die Entwicklungssätze möglichst auszudehnen; nach § 5 wissen wir, daß eine beliebige Funktion von beschränkter Schwankung nach den Normalfunktionen entwickelt werden kann, wenn für diese die Eigenschaft (IV) des § 3 gesichert ist. Das wollen wir für die Besselschen Funktionen bezüglich des singulären Endpunktes $a = 0$ durchführen, indem wir uns auf den Fall $H = \infty$ beschränken, d. h. den Fall, daß die Eigenfunktionen den Gleichungen $\varphi_r(1) = 0$, $J(\varrho) = 0$ unterworfen sind. Zu diesem Zweck muß der Kern $K(x, y)$ wirklich gebildet werden. Setzen wir $\mu = -\beta^2$, so daß die Differentialgleichung der Eigenfunktionen in der Form

$$\frac{d}{dx}\left(4x\frac{dy}{dx}\right) + (\lambda + \beta^2)\, y = 0$$

erscheint, so ist die Gleichung, deren Integrale $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ in der Bezeichnung des § 3 sind, die folgende

$$\frac{d}{dx}\left(4x\frac{dy}{dx}\right) + \beta^2 y = 0.$$

Sie hat die linear unabhängigen Integrale $J(\beta\sqrt{x})$ und $K(\beta\sqrt{x})$, letzteres im Sinne von Riemann-Weber*) verstanden, und man kann daher setzen

$$\varphi(x) = C J(\beta\sqrt{x}), \qquad \psi(x) = J(\beta\sqrt{x})\, K(\beta) - J(\beta)\, K(\beta\sqrt{x}),$$

wobei C eine Konstante bedeutet, die durch die Forderung

$$k(\varphi'(x)\,\psi(x) - \varphi(x)\,\psi'(x)) = 1$$

bestimmt wird; dann erfüllt $\varphi(x)$ an der unteren, $\psi(x)$ an der oberen

*) Partielle Differentialgleichungen der mathematischen Physik Bd. 1, § 73.

Grenze der Strecke J die an die Normalfunktionen gestellten Forderungen. Da nun die Identität

$$JK' - J'K = -\frac{2}{\pi x}$$

gilt, findet man durch leichte Rechnung

$$C = -\frac{\pi}{2J(\beta)},$$

und demnach bei der Annahme $x < \xi$ den Kern

$$K(x, \xi) = \frac{\pi J(\beta\sqrt{x})\,[J(\beta\sqrt{\xi})\,K(\beta) - J(\beta)\,K(\beta\sqrt{\xi})]}{2J(\beta)}.$$

Die Formel (A) ergibt also, da die Eigenwerte die Gestalt

$$\lambda = \varrho^2 + \mu = \varrho^2 - \beta^2$$

haben, die Gleichung

$$K(x, \xi) = \sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{\varphi_\nu(x)\,\varphi_\nu(\xi)}{\varrho^2 - \beta^2}$$

und ϱ durchläuft, wir wiederholen es, die positiven Wurzeln der Gleichung $J(\varrho) = 0$.

Da nun die Reihe

$$\sum \frac{1}{\varrho^2}$$

konvergiert, so konvergiert die rechte Seite der erhaltenen Gleichung auch bei beliebig festgelegten positiven Werten x, ξ und bei komplexen Werten von β, und zwar gleichmäßig in jedem abgeschlossenen Gebiet, das die Stellen $\pm\varrho$ nicht enthält. Wir haben eine Partialbruchzerlegung der Größe $K(x, \xi)$ vor uns, die als Funktion der komplexen Größe β meromorph ist und die Pole $\beta = \pm\varrho$ besitzt. Multiplizieren wir die Gleichung mit 2β und setzen

$$-2\beta K(x, \xi) = \Phi(\beta) = \frac{\pi\beta J(\beta\sqrt{x})\,[J(\beta)\,K(\beta\sqrt{\xi}) - J(\beta\sqrt{\xi})\,K(\beta)]}{J(\beta)},$$

so ergibt sich

$$\Phi(\beta) = \sum_{\nu}^{1,\infty} \varphi_\nu(x)\,\varphi_\nu(\xi)\left\{\frac{1}{\beta - \varrho} + \frac{1}{\beta + \varrho}\right\},$$

und es ist ersichtlich, daß zu den Polen $\beta = \varrho$ und $\beta = -\varrho$ das Residuum $\varphi_\nu(x)\,\varphi_\nu(\xi)$ gehört. Integriert man daher in der Ebene der komplexen Größen β längs einer geschlossenen Kurve, die die ersten n positiven

Werte ϱ und die ihnen entgegengesetzten $-\varrho$, sonst aber keine Pole der Funktion $\Phi(\beta)$ umschließt, so findet man

$$\frac{1}{2\pi i}\int \Phi(\beta)\, d\beta = 2 \sum_{\nu}^{1,n} \varphi_\nu(x)\, \varphi_\nu(\xi).$$

Entsprechend würde man in der Ebene der komplexen Größe μ um die ersten n Werte $-\varrho^2$ herum integrierend eine Gleichung

$$\frac{1}{2\pi i}\int K(x,\xi)\, d\mu = \sum_{\nu}^{1,n} \varphi_\nu(x)\, \varphi_\nu(\xi)$$

erhalten.

Wir nehmen nun als Integrationslinie in der β-Ebene den Umfang des Rechtecks, dessen Ecken die Punkte $\pm s \pm ti$ sind, und dessen Inneres genau n positive Werte ϱ enthalte. Da $\Phi(\beta)$, wie die Partialbruchzerlegung zeigt, eine ungerade Funktion ist, so liefern die Hälften, in die das Rechteck durch die imaginäre Achse zerlegt wird, denselben Beitrag zum Integral, und da $\Phi(\beta)$ bei reellen Werten von β reell ist, liefern die oberhalb und unterhalb der reellen Achse liegenden symmetrischen Viertel des Rechteckumfangs konjugiert imaginäre Beiträge, so daß man, wenn s und t positiv sind, setzen kann

$$\sum_{\nu}^{1,n} \varphi_\nu(x)\, \varphi_\nu(\xi) = 2\Re\left\{\int_{s}^{s+ti} \Phi(\beta)\, d\beta + \int_{s+ti}^{ti} \Phi(\beta)\, d\beta\right\},$$

wobei die Integrale geradlinig zu nehmen sind. Um die Größe dieser Integrale abzuschätzen, schreiben wir

$$x_1 = \sqrt{x}, \quad \xi_1 = \sqrt{\xi}, \quad \beta = \sigma + \tau i,$$
$$P = \sqrt{2\pi\beta x_1}\, J(\beta x_1), \qquad N = 2\sqrt{2\pi\beta}\, J(\beta),$$
$$Q = \sqrt{2\pi\beta}\,\sqrt{2\pi\beta\xi_1}\,[J(\beta)\, K(\beta\xi_1) - J(\beta\xi_1)\, K(\beta)],$$
$$\sqrt{x_1\xi_1}\,\Phi(\beta) = \frac{PQ}{N},$$

und benutzen die Weberschen Formeln*)

$$\sqrt{2\pi u}\, J(u) = e^{-i\left(u-\frac{\pi}{4}\right)} S(2iu) + e^{i\left(u-\frac{\pi}{4}\right)} S(-2iu),$$
$$\sqrt{2\pi u}\, K(u) = e^{-i\left(u-\frac{\pi}{4}\right)} S(2iu) - e^{i\left(u-\frac{\pi}{4}\right)} S(-2iu),$$

in denen der reelle Teil von u und $\sqrt{2\pi u}$ positiv vorauszusetzen ist, und $S(z)$ eine Funktion bedeutet, die in der ganzen Ebene der komplexen

*) Riemann-Weber Bd. 1, § 73.

Größen z mit Ausnahme der negativen reellen Achse eindeutig bestimmt ist; konvergiert der reelle Teil von u von der positiven Seite her gegen den Wert Null, während der imaginäre Teil nicht verschwindet, so konvergieren die Größen $S(2iu)$ und $S(-2iu)$ gegen endliche Grenzen und die Gleichungen bleiben richtig. Da nun in den Ausdrücken P, Q, N die Argumente der Funktionszeichen J und K nicht negative reelle Teile haben und auf der Integrationslinie nicht den Wert Null erreichen, so kann $\Phi(\beta)$ durch die Funktion S ausgedrückt werden, wenn man noch festsetzt, daß auch die in P, Q, N auftretenden Quadratwurzeln positive reelle Teile haben sollen. Bei dieser Annahme erhält man aus den Weberschen Formeln

$$P = e^{-i\left(\beta x_1 - \frac{\pi}{4}\right)} S(2\beta i x_1) + e^{i\left(\beta x_1 - \frac{\pi}{4}\right)} S(-2\beta i x_1),$$
$$Q = e^{i\beta(1-\xi_1)} S(2\beta i \xi_1) S(-2\beta i) - e^{-i\beta(1-\xi_1)} S(-2\beta i \xi_1) S(2\beta i).$$

Nun hat die Funktion $S(z)$ erstens die Eigenschaft, für alle Werte von z dem absoluten Betrage nach unter einer festen Grenze zu bleiben*), z. B. unter 3,5; daraus ergibt sich sofort

$$|P| < 3{,}5\,(e^{\tau x_1} + e^{-\tau x_1})$$

und, da τ nicht negativ ist,

$$|P| < 7 e^{\tau x_1}.$$

Sodann nähert sich $S(z)$ der Grenze 1, wenn z über alle Grenzen wächst; wenn daher ξ über einer festen positiven Grenze liegt, also etwa

$$\xi > c > 0$$

vorausgesetzt wird, so liegen die Größen

$$|S(\pm 2\beta\xi_1 i)|, \quad |S(\pm 2\beta i)|$$

der Eins beliebig nahe, sind z. B. kleiner als 2, sobald

$$|\beta| > g$$

genommen wird, wobei g eine von ξ unabhängige positive Größe ist. Unter dieser Annahme findet man aus dem angegebenen Ausdruck von Q durch die Funktionen S sofort

$$|Q| < 4e^{\tau(1-\xi_1)} + 4e^{-\tau(1-\xi_1)} < 8e^{\tau(1-\xi_1)},$$

und hieraus

$$|PQ| < 56\, e^{\tau(1-\xi_1+x_1)}.$$

Dieses Resultat wollen wir mit einer unteren Grenze der Größe $|N|$ kombinieren. Zu einer solchen führen wiederum die Weberschen Formeln, deren erste ergibt

*) Riemann-Weber Bd. 1, §§ 75, 76.

$$N = 2\sqrt{2\pi\beta}\,J(\beta) = 2\cos\left(\beta - \tfrac{\pi}{4}\right)[S(2\beta i) + S(-2\beta i)]$$
$$+ 2i\sin\left(\beta - \tfrac{\pi}{4}\right)[-S(2\beta i) + S(-2\beta i)]$$
$$= 4\cos\left(\beta - \tfrac{\pi}{4}\right)(1+p) + 4qi\sin\left(\beta - \tfrac{\pi}{4}\right);$$

da nun $S(z)$ bei wachsenden Werten von $|z|$ gegen die Grenze Eins konvergiert, so ist klar, daß $|p|$ und $|q|$ unter einer vorgeschriebenen Grenze, etwa unter $\frac{1}{4}$ liegen, sobald $|\beta|$ eine gewisse positive Konstante g_1 überschritten hat, die ebenso wie g von x und ξ durchaus unabhängig ist. Somit gelten zugleich die Beziehungen

$$|p| < \tfrac{1}{4}, \quad |q| < \tfrac{1}{4}, \quad |\beta| > g_1.$$

Da nun der letzte für N erhaltene Ausdruck, wenn $e_1, e_2, \cdots$ Größen vom absoluten Betrage Eins sind, in der Form

$$N = 2(e^{\tau}e_1 + e^{-\tau}e_2)(1+p) + 2q(e^{\tau}e_3 + e^{-\tau}e_4)$$
$$= 2e^{\tau}\{e_1(1+p) + qe_3\} + 2e^{-\tau}\{e_2(1+p) + qe_4\}$$
$$= re^{\tau} + r_1e^{-\tau}$$

geschrieben werden kann, und die für $|p|$ und $|q|$ geltenden Schranken die Ungleichungen

$$|r| > 1, \quad |r_1| < 3$$

ergeben, so folgt

$$|N| > e^{\tau} - 3e^{-\tau}.$$

Wenn wir daher zunächst $\tau = t$ setzen, also β auf der Strecke von ti bis $s + ti$ annehmen und t so groß nehmen, daß

$$e^{2t} > 6, \quad t > \tfrac{1}{2}\lg 6,$$

so ergibt die für N gefundene Beziehung

$$|N| > \tfrac{1}{2}e^{t},$$

und die oben gefundene obere Schranke der Größe $|PQ|$ ergibt

$$\sqrt{x_1\xi_1}\,|\Phi(\beta)| = \left|\frac{PQ}{N}\right| < 112\,e^{t(x_1-\xi_1)}.$$

Da nun die Differenz $\xi - x$ mit Rücksicht auf den Zweck der ganzen Entwicklung über einer positiven Grenze bleibt, so daß etwa eine Ungleichung

$$\sqrt{\xi} - \sqrt{x} = \xi_1 - x_1 > c_1, \quad c_1 > 0$$

vorausgesetzt wird, so ist klar, daß das Integral

$$\int_{ti+s}^{ti} \sqrt{x_1 \xi_1}\, \Phi(\beta)\, d\beta$$

dem absoluten Werte nach beliebig klein gemacht werden kann, indem man einen beliebigen Wert von s festhält, t aber über eine von s, c_1 und g_1, nicht aber von x und ξ abhängige Grenze hinauswachsen läßt.

Eine andere Erwägung fordert die Strecke von s bis $s+ti$, da hier auch der Wert $\tau = 0$ zugelassen ist, für den N verschwinden könnte. Um dies zu verhindern, wählen wir s so, daß $s - \frac{\pi}{4}$ ein Vielfaches von π ist; dann gelten auf der Geraden $\sigma = s$ offenbar die Gleichungen

$$\cos\left(\beta - \tfrac{\pi}{4}\right) = \pm \cos \tau i, \qquad \sin\left(\beta - \tfrac{\pi}{4}\right) = \pm \sin \tau i,$$

$$N = \pm 4(1+p)\cos \tau i \pm 4q \sin \tau i = 2e^{\tau}\{\pm (1+p)(1+e^{-2\tau}) \pm iq(1-e^{-2\tau})\}$$
$$= 2e^{\tau}\{\pm (1+e^{-2\tau}) + m\}, \qquad m = \pm p(1+e^{-2\tau}) \pm qi(1-e^{-2\tau}).$$

Wegen der für $|p|$ und $|q|$ erwirkten Ungleichungen ist nun

$$|m| < \tfrac{3}{4}, \qquad |m \pm (1+e^{-2\tau})| \geqq 1 + e^{-2\tau} - |m| > \tfrac{1}{4},$$
$$|N| > \tfrac{1}{2} e^{\tau}.$$

Die für das Produkt $|PQ|$ gefundene Schranke ergibt somit

$$\sqrt{x_1 \xi_1}\, |\Phi(\beta)| = \left|\frac{PQ}{N}\right| < 112\, e^{-\tau(\xi_1 - x_1)},$$

und hieraus folgt, wenn man geradlinig von s bis $s+ti$ integriert,

$$\left| \int_{s}^{s+ti} \Phi(\beta)\, d\beta \right| < \frac{112\,(1 - e^{-t(\xi_1 - x_1)})}{(\xi_1 - x_1)}.$$

Die rechte Seite dieser Ungleichung bleibt offenbar, da $\xi_1 - x_1$ über einer positiven Grenze c_1 liegt, stets unter einer festen von t, x und ξ unabhängigen Grenze. Erinnern wir uns nun daran, daß das Integral

$$\sqrt{x_1 \xi_1} \int_{ti}^{s+ti} \Phi(\beta)\, d\beta$$

bei jedem festen Wert von s der Null beliebig angenähert werden konnte, indem man für t einen von ξ und x unabhängigen, hinreichend großen Wert nahm; daß ferner längs der Integrationswege nur die Ungleichungen

$$|\beta| > g, \qquad |\beta| > g_1$$

vorausgesetzt werden, so ergibt die oben abgeleitete Gleichung

$$\sum_{\nu}^{1,n} \varphi_\nu(x)\, \varphi_\nu(\xi) = 2\,\Re\left\{\int_{ti}^{ti+s} \Phi(\beta)\, d\beta + \int_{ti+s}^{s} \Phi(\beta)\, d\beta\right\},$$

in der n die Anzahl der Werte von ϱ bedeutet, die zwischen 0 und s liegen, folgendes Resultat. Sobald n eine gewisse von ξ und x unabhängige Grenze n_1 überschritten hat, liegt die Summe

$$\sqrt[4]{x\xi} \sum_{\nu}^{1,n} \varphi_\nu(x)\, \varphi_\nu(\xi),$$

in der mit beliebig kleinen positiven Werten c_0 und c die Beziehungen

$$\xi - x > c_0 > 0, \quad \xi > c > 0$$

vorausgesetzt werden, zwischen endlichen, von x und ξ unabhängigen Grenzen. Da nun die für $n = 1, 2, \cdots, n_1$ gebildeten Summen stetige Funktionen von x und ξ sind, kann die Beschränkung der Zahl n wieder aufgehoben werden, und da das Integral

$$\int_0^x \frac{d\alpha}{\sqrt[4]{\alpha}}$$

endlich ist, ergibt sich weiter, daß alle Integrale

$$\int_0^x \sum_{\nu}^{1,n} \varphi_\nu(\alpha)\, \varphi_\nu(\xi)\, d\alpha$$

zwischen endlichen von n, x und ξ unabhängigen Grenzen liegen. Dadurch ist die Eigenschaft (IV) des § 3 in vollem Umfange erwiesen.

§ 9.

Entwicklung nach Legendreschen Polynomen.

Die Funktionen $P_n(x)$, die durch die Gaußsche Reihe in der Form

$$P_n(x) = F\left(-n,\ n+1,\ 1,\ \frac{1-x}{2}\right)$$

ausgedrückt werden, sind diejenigen Integrale der Gleichung

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right] + \lambda y = 0,$$

die an den beiden singulären Stellen $x = -1$ und $x = +1$ endlich bleiben; solche Integrale hat diese Gleichung, wie aus der Theorie der hypergeometrischen Reihe entnommen werden kann, nur wenn

$$\lambda = n(n+1)$$

gesetzt werden kann, wobei n eine positive ganze Zahl oder Null bedeutet. Um den Kern der zugehörigen Integralgleichung nach der in § 2 gegebenen Regel zu finden, ersetzen wir λ durch $\lambda + \mu$, wobei

$$\mu = \alpha(1 + \alpha)$$

gesetzt wird und α keine ganze Zahl ist. Die Funktionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ des § 2 sind dann Integrale der Gleichung

$$\frac{d}{dx}\left[(1 - x^2)\frac{dy}{dx}\right] + \alpha(1 + \alpha)y = 0,$$

von denen das erste bei $x = -1$, das zweite bei $x = +1$ endlich ist, und beide zwischen -1 und $+1$ endlich und stetig bleiben. Man erfüllt diese Anforderungen, indem man setzt

$$\varphi(x) = F\left(-\alpha,\ 1 + \alpha,\ 1,\ \frac{1+x}{2}\right), \quad \psi(x) = CF\left(-\alpha,\ 1 + \alpha,\ 1,\ \frac{1-x}{2}\right);$$

die Konstante C bestimmt sich durch die Beziehung

$$\varphi'(x)\psi(x) - \varphi(x)\psi'(x) = \frac{1}{1 - x^2}.$$

Wir finden den genauen Wert C, indem wir

$$\frac{1-x}{2} = \varepsilon, \quad \frac{1+x}{2} = 1 - \varepsilon$$

setzen und ε unendlich abnehmen lassen. Dann gelten die Näherungsformeln*)

$$\varphi(x) = F(-\alpha,\ 1 + \alpha,\ 1,\ 1 - \varepsilon) = \frac{-\lg\varepsilon}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(1-\alpha)}$$

$$= +\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\lg\varepsilon,$$

$$\varphi'(x) = -\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\cdot\frac{1}{\varepsilon}, \quad \psi(x) = 1, \quad \psi'(x) = -\alpha(1 + \alpha),$$

$$\frac{1}{1 - x^2} = \frac{1}{4\varepsilon},$$

und die angegebene Beziehung zwischen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ ergibt

$$-\frac{C\sin\pi\alpha}{\pi}\left\{\alpha(1 + \alpha)\lg\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon}\right\} = \frac{1}{4\varepsilon},$$

also

$$C = \frac{\pi}{4\sin\alpha\pi}.$$

Hieraus sieht man zugleich, daß $\varphi(x)$ an der singulären Endstelle $x = +1$ logarithmisch unendlich wird. Dasselbe gilt offenbar von $\psi(x)$

*) Goursat, Sur l'équation différentielle linéaire qui admet pour intégrale la série hypergéometrique, Thèse, Paris 1881, S. 37. Annales de l'Ecole Normale (2) Bd. 10.

an der Stelle $x = -1$; der mit $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ gebildete Kern hat also die in § 3 geforderte Beschaffenheit und ist explizit

$$K(x,\xi) = \frac{\pi F\left(-\alpha, 1+\alpha, 1, \frac{1+x}{2}\right) F\left(-\alpha, 1+\alpha, 1, \frac{1-\xi}{2}\right)}{4 \sin \alpha\pi}$$

oder

$$K(x,\xi) = \frac{\pi F\left(-\alpha, 1+\alpha, 1, \frac{1-x}{2}\right) F\left(-\alpha, 1+\alpha, 1, \frac{1+\xi}{2}\right)}{4 \sin \alpha\pi},$$

je nachdem $x<\xi$ oder $x>\xi$.

Die Eigenwerte sind jetzt $n(n+1)-\alpha(\alpha+1)$, wobei $n = 0, 1, 2, \cdots$, zu setzen ist; die normierten Eigenfunktionen sind wegen der bekannten Formel

$$\int_{-1}^{+1} P_n^2(\alpha)\, d\alpha = \frac{2}{2n+1}$$

die Größen

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \varphi_{n+1}(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}\, P_n(x),$$

und die Entwicklung des Kerns nach den Eigenfunktionen hat, je nachdem x kleiner oder größer als ξ ist, die erste oder zweite der folgenden Gestalten:

$$\frac{\pi F\left(-\alpha, 1+\alpha, 1, \frac{1+x}{2}\right) F\left(-\alpha, 1+\alpha, 1, \frac{1-\xi}{2}\right)}{4 \sin \alpha\pi} = \sum_n^{0,\infty} \frac{(2n+1) P_n(x) P_n(\xi)}{2[n(n+1)-\alpha(\alpha+1)]}$$

$$\frac{\pi F\left(-\alpha, 1+\alpha, 1, \frac{1-x}{2}\right) F\left(-\alpha, 1+\alpha, 1, \frac{1+\xi}{2}\right)}{4 \sin \alpha\pi} = \sum_n^{0,\infty} \frac{(2n+1) P_n(x) P_n(\xi)}{2[n(n+1)-\alpha(\alpha+1)]}.$$

Diese Formeln sind nach § 2 bewiesen, sobald die dort aufgestellten Voraussetzungen, unter denen die Formel (A) gilt, als erfüllt nachgewiesen sind; hier liegt, wie bei den Besselschen Funktionen, der Fall vor, daß auf den iterierten Kern $K^2(x,y)$ zurückgegriffen werden muß.

Zunächst ist zu beachten, daß die Legendreschen Polynome auf der Strecke J, d. h. von -1 bis $+1$, zwischen den Grenzen -1 und $+1$ bleiben; hieraus ersieht man sofort, daß die Reihe

$$\sum_\nu^{1,\infty} \frac{\varphi_\nu(x)\,\varphi_\nu(y)}{\lambda_\nu^2} = \sum_n^{0,\infty} \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right) P_n(x) P_n(y)}{[n(n+1)-\alpha(\alpha+1)]^2}$$

gleichmäßig konvergiert, wenn x und y unabhängig voneinander die Strecke J mit Einschluß ihrer Endpunkte durchlaufen. Da ferner die Formel

$$P_n'(x) = \frac{nxP_n(x) - nP_{n-1}(x)}{1-x^2}$$

gilt, so folgt, daß die Reihe

$$\sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{\varphi_\nu'(x)\,\varphi_\nu(y)}{\lambda_\nu^2} = \sum_{n}^{0,\infty} \frac{n\left(n+\frac{1}{2}\right)(nP_n(x) - P_{n-1}(x))P_n(y)}{(1-x^2)[n(n+1)-\alpha(\alpha+1)]^2}$$

gleichmäßig konvergiert, wenn y die Strecke J durchläuft, für x aber die Bedingung

$$-1+\varepsilon < x < 1-\varepsilon$$

festgesetzt wird, in der ε eine beliebig kleine positive Größe ist.

Etwas tiefer liegende Eigenschaften der Legendreschen Polynome sind heranzuziehen, um die Konvergenz der Reihen

$$\sum_{\nu} \frac{\varphi_\nu(x)\,\varphi_\nu(y)}{\lambda_\nu}, \quad \sum_{\nu} \frac{\varphi_\nu'(x)\,\varphi_\nu(y)}{\lambda_\nu}$$

zu untersuchen. Die Ungleichung, der x unterworfen wurde, kann, wenn man $x = \cos\theta$ setzt, dahin formuliert werden, daß

$$|\sin\theta| > \varepsilon_1$$

ist, wobei ε_1 wie ε beliebig klein und positiv ist. Dann gilt*) die asymptotische Darstellung

$$P_n(\cos\theta) = \sqrt{\frac{2}{n\pi\sin\theta}}\left\{\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta - \frac{\pi}{4}\right] + \frac{\Psi}{n}\right\},$$

und Ψ liegt zwischen endlichen, von n unabhängigen Grenzen. Hieraus folgt zunächst, daß die Reihe

$$\sum_{\nu}^{2,\infty} \frac{\varphi_\nu(x)\,\varphi_\nu(y)}{\lambda_\nu} = \sum_{n}^{1,\infty} \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)P_n(y)}{n(n+1)-\alpha(\alpha+1)} \sqrt{\frac{2}{n\pi\sin\theta}}$$
$$\cdot \left\{\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta - \frac{\pi}{4}\right] + \frac{\Psi}{n}\right\}$$

in dem Gebiete

$$-1+\varepsilon < x < 1-\varepsilon, \quad -1 \leqq y \leqq +1$$

gleichmäßig konvergiert, nämlich mindestens so gut wie die mit einer passenden Konstanten multiplizierte Reihe

$$\sum \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}.$$

*) Heine, Kugelfunktionen, Bd. 1, § 40.

Stellen wir endlich auch $P_n(y)$ asymptotisch dar, indem wir

$$y = \cos\eta$$

setzen und die Ungleichung

$$|\sin\eta| > \varepsilon_1$$

festhalten, so ergibt der schon einmal benutzte Ausdruck für $P_n'(x)$ die Gleichung

$$\frac{\varphi'_{n+1}(x)\,\varphi_{n+1}(y)}{\lambda_{n+1}} = \frac{n\left(n+\frac{1}{2}\right)x P_n(x)P_n(y)}{[n(n+1)-\alpha(\alpha+1)](x^2-1)} - \frac{n\left(n+\frac{1}{2}\right)P_{n-1}(x)P_n(y)}{(x^2-1)[n(n+1)-\alpha(\alpha+1)]}$$

$$= -\frac{n\left(n+\frac{1}{2}\right)\cos\theta}{[n(n+1)-\alpha(\alpha+1)]\sin^2\theta}\cdot\frac{2}{n\pi\sqrt{\sin\theta\sin\eta}}$$

$$\cdot\left[\cos\left[\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\theta-\tfrac{\pi}{4}\right]+\frac{\Psi}{n}\right]\left[\cos\left[\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\eta-\tfrac{\pi}{4}\right]+\frac{\Psi}{n}\right]$$

$$+\frac{n\left(n+\frac{1}{2}\right)}{[n(n+1)-\alpha(\alpha+1)]\sin^2\theta}\cdot\frac{2}{\pi\sqrt{n(n-1)\sin\theta\sin\eta}}$$

$$\cdot\left[\cos\left[\left(n-\tfrac{1}{2}\right)\theta-\tfrac{\pi}{4}\right]+\frac{\Psi}{n}\right]\left[\cos\left[\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\eta-\tfrac{\pi}{4}\right]+\frac{\Psi}{n}\right],$$

oder, indem das Symbol Ψ wie früher vieldeutig, aber immer im Sinne der gegebenen Definition gebraucht und dazu benutzt wird, Größen, die mit wachsenden Werten von n der Grenze 1 zustreben, in der Form

$$1+\frac{\Psi}{n}$$

darzustellen,

$$\frac{\varphi'_{n+1}(x)\,\varphi_{n+1}(y)}{\lambda_{n+1}}$$

$$= \frac{-2\cos\theta}{n\pi\sin^2\theta\sqrt{\sin\theta\sin\eta}}\left\{\cos\left[\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\theta-\tfrac{\pi}{4}\right]\cos\left[\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\eta-\tfrac{\pi}{4}\right]+\frac{\Psi}{n}\right\}$$

$$+\frac{2}{n\pi\sin^2\theta\sqrt{\sin\theta\sin\eta}}\left\{\cos\left[\left(n-\tfrac{1}{2}\right)\theta-\tfrac{\pi}{4}\right]\cos\left[\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\eta-\tfrac{\pi}{4}\right]+\frac{\Psi}{n}\right\}$$

$$= \frac{-\cos\theta}{n\pi\sin^2\theta\sqrt{\sin\theta\sin\eta}}\left\{\sin\left(n+\tfrac{1}{2}\right)(\theta+\eta)+\cos\left(n+\tfrac{1}{2}\right)(\theta-\eta)+\frac{\Psi}{n}\right\}$$

$$+\frac{1}{n\pi\sin^2\theta\sqrt{\sin\theta\sin\eta}}$$

$$\cdot\left\{\sin\left[n(\theta+\eta)+\tfrac{1}{2}(\eta-\theta)\right]+\cos\left[n(\theta-\eta)-\tfrac{1}{2}(\eta+\theta)\right]+\frac{\Psi}{n}\right\},$$

oder endlich, indem man durch A, B, C, D von n unabhängige Größen bezeichnet, die bei den für x und y geltenden Voraussetzungen zwischen festen endlichen Grenzen liegen,

$$\frac{\varphi'_{n+1}(x)\,\varphi_{n+1}(y)}{\lambda_{n+1}} = \frac{A}{n}\sin n(\theta+\eta) + \frac{B}{n}\sin n(\theta-\eta) + \frac{C}{n}\cos n(\theta+\eta) + \frac{D}{n}\cos n(\theta-\eta) + \frac{\Psi}{n^2};$$

speziell findet man

$$\pi \sin^2\theta \sqrt{\sin\theta \sin\eta}\, D = -\cos\theta \cos\frac{\theta-\eta}{2} + \cos\frac{\eta+\theta}{2} = \sin\theta \sin\frac{\theta-\eta}{2}.$$

Nun konvergieren die Reihen

$$\sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{\sin \nu u}{\nu}, \quad \sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{\cos \nu u}{\nu}$$

bekanntlich gleichmäßig unter der Voraussetzung

$$c < u < 2\pi - c_1,$$

wenn c und c_1 beliebig kleine positive Werte sind; anderseits sind bei unseren Festsetzungen die Winkel θ und η in Grenzen von der Form c und $\pi - c_1$ eingeschlossen, so daß eine Beziehung von der Form

$$c < \theta + \eta < 2\pi - c_1$$

gilt. Setzen wir daher noch fest, daß $x - y$ und damit $\theta - \eta$ über einer beliebig kleinen positiven Grenze bleibt, so hat man auch eine Beziehung von der Form

$$c < \theta - \eta < 2\pi - c_1,$$

und jetzt konvergieren die Reihen

$$\sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{\cos \nu (\theta+\eta)}{\nu}, \quad \sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{\sin \nu (\theta+\eta)}{\nu}, \quad \sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{\cos \nu (\theta-\eta)}{\nu}, \quad \sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{\sin \nu (\theta-\eta)}{\nu}$$

gleichmäßig, mithin auch die Reihe

$$\sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{\varphi'_\nu(x)\,\varphi_\nu(y)}{\lambda_\nu}$$

unter der Annahme

$$-1+\varepsilon \leqq x \leqq 1-\varepsilon, \quad -1+\varepsilon_1 \leqq y \leqq 1-\varepsilon_1, \quad |x-y| > \varepsilon_2,$$

wobei ε, ε_1, ε_2 beliebig kleine positive Größen sind.

Man sieht ferner leicht, daß auch, wenn x gegen einen festen zwischen $-1+\varepsilon_1$ und $1-\varepsilon_1$ liegenden Wert von y heranrückt, die Summe

$$\sum_{\nu}^{1,n} \frac{\varphi'_\nu(x)\,\varphi_\nu(y)}{\lambda_\nu}$$

zwischen endlichen, von n und x unabhängigen Grenzen bleibt; denn ersichtlich gilt dies von den Größen

$$\sum_{\nu}^{1,n} \frac{\Psi}{\nu^2}, \quad \sum_{\nu}^{1,n} \frac{\sin \nu(\theta+\eta)}{\nu}, \quad \sum_{\nu}^{1,n} \frac{\cos \nu(\theta+\eta)}{\nu}, \quad \sum_{\nu}^{1,n} \frac{\sin \nu(\theta-\eta)}{\nu},$$

ebenso aber auch von der Summe

$$D \sum_{\nu}^{1,n} \frac{\cos \nu(\theta-\eta)}{\nu}$$

auf Grund des oben angegebenen Ausdrucks für D; dieser ergibt nämlich

$$\pi \sin^2\theta \sqrt{\sin\theta \sin\eta}\, D \sum_{\nu}^{1,n} \frac{\cos \nu(\theta-\eta)}{\nu}$$

$$= \frac{\sin\theta}{4\cos\frac{\theta-\eta}{2}} \sum_{\nu}^{1,n} \frac{2 \sin(\theta-\eta)\cos\nu(\theta-\eta)}{\nu}$$

$$= \frac{-\sin\theta}{4\cos\frac{\theta-\eta}{2}} \sum_{\nu}^{1,n} \frac{\sin(\nu-1)(\theta-\eta)\sin(\nu+1)(\theta-\eta)}{\nu}$$

$$= \frac{-\sin\theta}{4\cos\frac{\theta-\eta}{2}} \left\{ \sin(\theta-\eta) + 2 \sum_{\nu}^{1,n-1} \left(\frac{\sin\nu(\theta-\eta)}{\nu} + \frac{\Psi}{\nu^2} \right) + \frac{\sin(n+1)(\theta-\eta)}{n+1} \right\}$$

und hieraus folgt das Behauptete, da bei den für x und y festgesetzten Schranken die Größen $\sin\theta$ und $\sin\eta$ über festen positiven Grenzen bleiben, und die Summe

$$\frac{-\sin\theta}{2\cos\frac{\theta-\eta}{2}} \sum_{\nu}^{1,n-1} \frac{\sin\nu(\theta-\eta)}{\nu}$$

in dem angegebenen Sinne endlich ist. Die Eigenschaft (III) des § 3 ist also ebenfalls für unsere Normalfunktionen gesichert. Endlich ist die Eigenschaft (IV) in einer Abhandlung von Darboux*) genau in der für unsere Zwecke brauchbaren Form nachgewiesen.

Damit werden die allgemeinen Resultate des § 4 anwendbar und es gilt für jede Funktion $f(x)$, die von $x=-1$ bis $x=+1$ beschränkte Schwankung hat, die Gleichung

$$\sum_{\nu}^{0,\infty} \left(\nu + \tfrac{1}{2}\right) P_\nu(x) \int_{-1}^{+1} f(\alpha) P_\nu(\alpha)\, d\alpha = \tfrac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)],$$

*) Sur l'approximation des fonctions de très grands nombres et sur une classe étendue de développements en série. Journal de math. (3) Bd. 4, S. 389.

die aus der Theorie der Integralgleichungen bisher nur für Funktionen mit stetiger erster und zweiter Ableitung abgeleitet war.

In ganz ähnlicher Weise wie die Legendreschen lassen sich auch die Jacobischen Polynome*)

$$X_n(u) = F(\alpha + n, -n, \gamma, u)$$

bei der Voraussetzung

$$\gamma > 0, \quad \alpha + 1 - \gamma > 0$$

behandeln. Sie sind nämlich einmal Integrale einer der Legendreschen sehr ähnlichen Differentialgleichung; sodann hat Darboux in der zitierten Abhandlung eine asymptotische Darstellung in der Form

$$X_n(\sin^2\varphi) = A \sin\varphi^{\frac{1}{2}-\gamma} \cos\varphi^{\gamma-\alpha-\frac{1}{2}} \left\{ \cos\left((2n+\alpha)\varphi + h\right) + \frac{\Psi}{n^{\frac{1}{2}+\gamma}} \right\}$$

gegeben, in der A und h Konstante sind, Ψ aber dieselbe Bedeutung wie oben hat; durch diese Formel wird die oben gebrauchte asymptotische Formel für $P_n(\cos\theta)$ direkt verallgemeinert, wenn man $\theta = 2\varphi$ setzt. Übrigens ist die Frage nach der Darstellung willkürlicher Funktionen durch die Jacobischen Polynome von Darboux in der zitierten Abhandlung unter sehr allgemeinen Voraussetzungen erledigt und zwar nach einer Methode, die der von Dirichlet für die Fouriersche Reihe angewandten insofern ähnlich ist, als sie auf der Summation einer endlichen Anzahl von Gliedern der zur Darstellung dienenden Reihe beruht.

Die durchgeführten Beispiele zeigen wohl, von welcher Art die Vorteile sind, die man aus der Theorie der Integralgleichungen für die Lehre von der Darstellung willkürlicher Funktionen von einer Variablen ziehen kann. Ähnliche Untersuchungen bezüglich der Funktionen von zwei Variablen hoffen wir in einer folgenden Abhandlung geben zu können.

*) Jordan, Cours d'analyse Bd. 3, Nr. 186.

The Inversion of a Definite Integral.

By

H. Bateman of Cambridge (England).

The following paper is intended as a contribution towards the solution of a problem proposed by Abel*). Let $f(s)$ and $\varkappa(s, t)$ be two given functions and c a given path of integration, it is required to determine if possible, a function $\varphi(t)$ such that

$$f(s) = \int_c \varkappa(s, t)\, \varphi(t)\, dt. \tag{1}$$

This problem is not soluble in general because a function defined by a definite integral is usually subject to certain restrictions depending on the nature of the function $\varkappa(s, t)$, accordingly there are two goals to be aimed at: we must first find necessary or sufficient conditions to be satisfied by the function $f(s)$ in order that the equation may be soluble, and then we must give a method of determining the function $\varphi(t)$ when it is known to exist.

Fredholm has remarked**) that the above equation may be considered as a particular case of the more general equation

$$\psi(s) = \lambda f(s) = \varphi(s) + \lambda \int_a^b \varkappa(s, t)\, \varphi(t)\, dt$$

in which the parameter λ is finally made infinite, but it is difficult to find conditions that the formula which he gives for the solution of this equation should have any meaning when λ tends to infinity; also this method requires that the function $f(s)$ should be given for values of s lying between a and b.

We must therefore seek another method of determining the function φ which will lead more directly to the conditions to be imposed on f.

*) Collected Works, Vol. II, p. 67.

**) Acta Math. 1903.

This is what I have endeavoured to do in § 1, the results are not very satisfactory, but the method is one of direct calculation and so can be used to give in a descriptive way a sufficient criterion for the existence of a solution; also when the function $\varkappa(s, t)$ is subject to certain restrictions the method will certainly lead to the solution if it exists.

In § 2 a particular integral equation is considered and the solution is obtained by means of Potential Theory. The result is then used to reduce the solution of a more general integral equation to that of an integral equation of the second kind.

In § 3 the partial integral equation

$$\int_a^b f(s, x)\,\varkappa(x, t)\,dx = \int_a^b f(x, t)\,\varkappa(s, x)\,dx$$

is dealt with, it appears that if $\varkappa(s, t)$ is the Green's function for the differential equation $L_s(u) = 0$, then any solution $f(s, t)$ of this integral equation is also a solution of the partial differential equation

$$L_s(u) = L_t(u).$$

The solutions of a partial differential equation of this kind can therefore be divided into groups, each group being associated with a Green's function for a particular set of boundary conditions and every member of the group being a solution of the corresponding integral equation.

In § 4 some instances are given in which the series

$$\sum \frac{\psi_n(s)\,\psi_n(t)}{\lambda_n}$$

represents the fundamental function $\varkappa(s, t)$ even though it is non-uniformly convergent in the neighbourhood of certain points. It follows then that when the series is multiplied by $\psi_n(s)$ and integrated term by term we shall obtain a correct result.

It is known that a series which is non-uniformly convergent for values of s in the neighbourhood of a point σ can be integrated term by term when the radius of non-uniform convergence for this point is finite*). It would be interesting if a series of the above type could be shown to satisfy this condition, or if some definite criterion for the legitimacy of the integration could be obtained.

It may be worth while to mention a very general class of series which can be integrated through a point of discontinuity.

Let $\psi_1(s) \cdots \psi_n(s) \cdots$ be a system of functions such that any

*) E. W. Hobson. The integration of series. Acta Math. 1903.

function $f(s)$ with only a finite number of discontinuities can be expanded in the form

$$\sum_0^\infty \psi_n(s) \int_a^b f(t)\, \varphi_n(t)\, dt.$$

Construct the expansion $\sum_0^\infty \psi_n(s)\, a_n(t)$ for the discontinuous function

$$\left.\begin{aligned} F(s) = +\chi(s) \quad & s > t \\ 0 \quad & s = t \\ -\chi(s) \quad & s < t \end{aligned}\right\}$$

then

$$a_n(t) = -\int_a^t \varphi_n(s)\, \chi(s)\, ds + \int_t^b \varphi_n(s)\, \chi(s)\, ds$$

and

$$\frac{d}{dt}\, a_n(t) = -2\chi(t)\, \varphi_n(t).$$

The expansion for $f(s)\chi(s)$ is

$$f(s)\chi(s) = \sum_0^\infty \psi_n(s) \int_a^b f(t)\, \chi(t)\, \varphi_n(t)\, dt$$

$$= -\tfrac{1}{2} \sum_0^\infty [\psi_n(s) f(t)\, a_n(t)]_a^b + \tfrac{1}{2} \sum \psi_n(s) \int_a^b f'(t)\, a_n(t)\, dt.$$

Now

$$\sum a_n(t)\, \psi_n(s) = +\chi(s) \quad s > t,$$
$$= -\chi(s) \quad s < t$$

and the series $\sum \psi_n(s)\, a_n(t) f'(t)$ is non-uniformly convergent in the neighbourhood of $t = s$ (since it is discontinuous), but still it can be integrated through this point, for the equation obtained by integrating term by term is

$$f(s)\chi(s) =$$

$$+ \tfrac{1}{2} [f(b)\chi(s) + f(a)\chi(s)] + \tfrac{1}{2} \int_a^s f'(t)\, \chi(t)\, dt - \tfrac{1}{2} \int_s^b f'(t)\, \chi(t)\, dt,$$

and this is evidently satisfied.

Hence the series $\sum_0^\infty \psi_n(s)\, a_n(t) f'(t)$ can be integrated through its point of discontinuity $t = s$.

The remainder of this section is devoted to the consideration of the equation

$$f(s) = \varphi(s) - \int_a^b \varkappa(s, t)\, \varphi(t)\, dt$$

as b varies and it is shown that if the solution $\varphi(s)$ is known for all values of b within a range a to $a + A$, and $f(s)$ is independent of b, then the function $\varkappa(s, t)$ can be uniquely determined. The proof depends upon a theorem due to Volterra and assumes that the limitations stated in his theorem are satisfied.

In conclusion I should like to thank Prof. Hilbert for the interest he has taken in the work and for some useful suggestions.

§ 1.

The conditions to be satisfied in order that the integral equation of the first kind may be soluble.

Only a few cases are known in which a general formula has been given for obtaining the function $\varphi(t)$ from the equation

$$f(s) = \int_c^d G(s, t)\, \varphi(t)\, dt \tag{1}$$

and in these the expression for φ takes one of two forms. In the classical cases given by Fourier, Riemann and Hankel the function φ is expressed as a definite integral similar in form to the original one, but when $G(s, t)$ is the Green's function corresponding to certain boundary conditions for a self-adjoint linear differential equation of the second order and $f(s)$ satisfies the same boundary conditions and possesses a continuous second derivate, Hilbert has shown that φ is given by operating on f with the given differential equation.

In order to solve (1) by means of a definite integral we may seek a relation of the form

$$\int_c^d G(s, t)\, F(t, x)\, dt = \frac{d}{dx} H(s, x). \tag{2}$$

A solution will then be given by

$$\varphi(t) = \int_{x_1}^{x_2} F(t, x)\, dx$$

provided

$$H(s, x_2) - H(s, x_1) = f(s).$$

Let us now suppose that the function $G(s, t)$ is finite and integrable (in which we include the conditions for a change in the order of integration) for $c \leqq t \leqq d$ and $a \leqq s \leqq b$ and that $f(s)$ is also finite and integrable for these values of s, then we can construct two such functions F and H as follows.

Forming the symmetrical function

$$\varkappa(s, t) = \int_c^d G(s, r)\, G(t, r)\, dr \tag{3}$$

we write

$$f_1(s) = \int_a^b \varkappa(s, t) f(t)\, dt, \cdots, f_r(s) = \int_a^b \varkappa(s, t) f_{r-1}(t)\, dt,$$

$$g_r(t) = \int_a^b G(u, t) f_r(u)\, du, \tag{4}$$

$$F(t, x) = x g_1(t) - \frac{x^3}{1!} g_3(t) + \frac{x^5}{2!} g_5(t) - \cdots,$$

$$H(s, x) = f(s) - \frac{x^2}{1!} f_2(s) + \frac{x^4}{2!} f_4(s) - \frac{x^6}{3!} f_6(s) + \cdots.$$

These series are absolutely and uniformly convergent for all finite values of x, for if G and f are the maximum values of $|G(s, t)|$ and $|f(s)|$ for the given values of s and t we have

$$|f_r(s)| < |b - a|^r G^{2r} f |c - d|^r, \quad |g_r(s)| < |b - a|^{r+1} |c - d|^r G^{2r+1} f,$$

and so the series converge like exponential series.

Observing now that

$$\int_e^d G(s, t)\, g_r(t)\, dt = \int_c^d G(s, t)\, dt \int_a^b G(u, t) f_r(u)\, du$$

$$= \int_a^b \varkappa(s, u) f_r(u)\, du = f_{r+1}(s)$$

we find that

$$\int_c^d G(s, t)\, F(t, x)\, dt = -\frac{1}{2} \frac{d}{dx} \{H(s, x)\}, \tag{5}$$

an equation of the required form.

We must now see whether this relation can be used to obtain a solution of equation (1). If we write

$$\varphi(t) = 2 \int_0^M F(t, x)\, dx \tag{6}$$

and substitute in the equation we get

$$(7) \qquad \int_c^d G(s,t)\,\varphi(t)\,dt = 2\int_c^d G(s,t)\,dt \int_0^M F(t,x)\,dx$$

$$= -\int_0^M \frac{d}{dx} H(s,x)\,dx$$

$$= H(s,0) - H(s,M) = f(s) - H(s,M).$$

Two courses are now open to us, we may either write $\Psi(s)$ instead of $f(s)$ in equation (1) and endeavour to determine $f(s)$ so that

$$f(s) - H(s,M) = \Psi(s)$$

or we may try the effect of putting $M = \infty$, in which case the method will succeed if the function $f(s)$ is such that the quantity $H(s,x)$ is zero for x infinite and the processes which have been gone through are legitimate.

Every step can be examined directly if the functions $f(s)$ and $G(s,t)$ are known, hence we can determine if a particular function $f(s)$ will lead to a solution, but for most purposes it is convenient to have a definite criterion.

It has been shown by Hilbert*) that if a symmetrical function $\varkappa(s,t)$ is such that to every small positive quantily ε and every continuous function $g(s)$ there corresponds a function $h(t)$ for which

$$\int_a^b \Big[g(s) - \int_a^b \varkappa(s,t)\,h(t)\,dt\Big]^2 ds < \varepsilon$$

then any function $f(s)$ which is defined by an equation of the form

$$f(s) = \int_a^b \varkappa(s,t)\,\varphi(t)\,dt$$

can be expressed in an absolutely and uniformly convergent series of the function, $\psi_n(s)$ which satisfy the homogeneous equations

$$\psi_n(s) = \lambda_n \int_a^b \varkappa(s,t)\,\psi_n(t)\,dt \qquad (n = 1,2,\cdots).$$

This theorem suggests a type of function for which the integral equation of the first kind may be soluble and we accordingly consider a function $f(s)$ which can be expanded in absolutely and uniformly convergent series

*) Göttinger Nachrichten 1904. Erste Mitteilung; following E. Schmidt (Inaugural-Dissertation, Göttingen 1905) the first supposition for $\varkappa(s,t)$ can be left.

$$f(s) = \sum_1^\infty c_n \psi_n(s) \tag{8}$$

where the quantities λ_n are supposed to be arranged according to their absolute values.*)

Multiplying by $x(s, t)$ and integrating term by term we have

$$f_1(s) = \sum_1^\infty \frac{c_n}{\lambda_n} \psi_n(s), \cdots, f_r(s) = \sum_1^\infty \frac{c_n}{\lambda_n^r} \psi_n(s).$$

Therefore

$$H(s, x) = \sum_0^\infty (-1)^r \frac{x^{2r}}{r!} \sum_1^{m-1} \frac{c_n}{\lambda_n^{2r}} \psi_n(s) + \sum_0^\infty (-1)^r \frac{x^{2r}}{r!} \sum_m^\infty \frac{c_n}{\lambda_n^{2r}} \psi_n(s).$$

Now corresponding to any small quantity ε we can choose m so that

$$\sum_m^\infty |c_n \psi_n(s)| < \varepsilon$$

also

$$|\lambda_n| > |\lambda_m| \quad \text{if} \quad n > m,$$

therefore

$$\left| \sum_m^\infty \frac{c_n}{\lambda_n^{2r}} \psi_n(s) \right| < \frac{\varepsilon}{\lambda_m^{2r}}.$$

Hence

$$\left| \sum_0^\infty (-1)^r \frac{x^{2r}}{r!} \sum_m^\infty \frac{c_n}{\lambda_n^{2r}} \psi_n(s) \right| < \sum_0^\infty \varepsilon \frac{1}{r!} \frac{x^{2r}}{\lambda_m^{2r}} < \varepsilon e^{\frac{x^2}{\lambda_m^2}}.$$

Thus

$$H(s, x) = \sum_1^{m-1} c_n e^{-\frac{x^2}{\lambda_n^2}} \psi_n(s) + \eta$$

where

$$\eta < \varepsilon \cdot e^{\frac{x^2}{\lambda_m^2}}.$$

Making ε tend to zero we have

$$H(s, x) = \sum_1^\infty c_n e^{-\frac{x^2}{\lambda_n^2}} \psi_n(s). \tag{9}$$

*) It is known that the quantities λ_n are all real.

Similarly it can be shown that

$$F(t,x) = \int_a^b G(s,t)\, R(s,x)\, ds$$

where

$$R(s,x) = \sum_1^\infty c_n \frac{x}{\lambda_n} e^{-\frac{x^2}{\lambda_n^2}} \psi_n(s). \tag{10}$$

Now let μ be any arbitrary finite small positive quantity, then a number m can be found so that

$$\sum_m^\infty |c_n \psi_n(s)| < \frac{\mu}{2}$$

and a large quantity M can be chosen so that

$$\sum_1^m |c_n e^{-\frac{M^2}{\lambda_n^2}} \psi_n(s)| < \frac{\mu}{2}.$$

Then will

$$|H(s,M)| = \left| \sum_1^{m-1} c_n e^{-\frac{M^2}{\lambda_n^2}} \psi_n(s) + \sum_m^\infty c_n e^{-\frac{M^2}{\lambda_n^2}} \psi_n(s) \right| < \frac{\mu}{2} + \frac{\mu}{2} < \mu$$

accordingly we have the following theorem.

'*If $f(s)$ can be expanded in an absolutely and uniformly convergent series of the functions $\psi_n(s)$ then a function $\varphi(t)$ can be determined so that $\int_a^b G(s,t)\, \varphi(t)\, dt$ differs from $f(s)$ by a quantity less than μ.*'

If however we wish to make $\int_a^b G(s,t)\, \varphi(t)\, dt$ exactly equal to $f(s)$ it is necessary to make M infinite and then it is by no means certain that the integral for $\varphi(t)$ has a meaning. Two points remain to be settled.

(1) We must show that the function $F(t,x)$ given by formula (10) can be integrated with regard to x up to $x = \infty$.

(2) We must show that the order of integration in the double integral

$$\int_c^d G(s,t)dt \int_0^\infty F(t,x)dx$$

can be inverted.

The general case is rather difficult to deal with, accordingly we shall content ourselves by showing that if the function $\varphi(t)$ has a certain form our method does certainly lead to its determination.

Let us assume that the function $\varphi(t)$ can be expanded in an absolutely and uniformly convergent series of the functions $\chi_n(t)$ which satisfy the homogeneous equations

$$\chi_n(t) = \mu_n \int_c^d h(s, t)\, \chi_n(s) ds$$

where

$$h(s, t) = \int_a^b G(r, s)\, G(r, t) dr.$$

Then since

$$f(s) = \int_c^d G(s, t) \varphi(t) dt$$

and

$$\varphi(t) = \sum_1^\infty a_n \chi_n(t)$$

it follows that

$$F(t, x) = \sum_1^\infty \frac{x}{\mu_n^2}\, e^{-\frac{x^2}{\mu_n^2}} a_n \chi_n(t). \tag{11}$$

For

$$\begin{aligned} g_1(t) &= \int_a^b G(u, t) f_1(u) du \\ &= \int_a^b G(u, t)\, du \int_c^d G(u, v)\, dv \int_a^b G(w, v) f(w) dw \\ &= \int_a^b G(u, t) du \int_c^d G(u, v) dv \int_a^b G(w, v) dw \int_c^d G(w, r)\, \varphi(r) dr \\ &= \int_c^d h(t, v)\, dv \int_c^d h(v, r)\, \varphi(r) dr. \end{aligned}$$

Similarly

$$g_n(t) = \int_c^d h(t, v) g_{n-1}(v) dv$$

hence

$$g_1(t) = \int_c^d h(t, v)dv \int_c^d h(v, r)dr \sum_1^\infty a_n \chi_n(r)$$

$$= \sum_1^\infty \frac{a_n}{\mu_n^2} \chi_n(t)$$

and

$$g_r(t) = \sum_1^\infty \frac{a_n}{\mu_n^{r+1}} \chi_n(t)$$

which lead to the required result.

We must now determine $2\int_0^\infty F(t, x)dx$ and to do this we must integrate the series (11) term by term and this will be legitimate if the following sufficient conditions are satisfied.

1°. The series $u_1(x) + u_2(x) + \cdots$ should be uniformly convergent in an arbitrary interval.

2°. $\int u_n dx$ should exist for all values of n.

3°. $\sum_{n=1}^\infty \int_a^\infty u_n(x)dx$ should converge for values of a within the range of integration.

4°. A number p can be found independent of r and such that

$$\left| \sum_{n=1}^r \int_x^\infty u_n(x)dx \right| < \varepsilon$$

for all k's greater than p.

The first three conditions are evidently satisfied on account of the uniform convergence of the series $\sum_1^\infty a_n \chi_n(t)$. The fourth condition will be satisfied if p can be found independent of r such that

$$\left| \sum_{n=1}^r a_n e^{-\frac{x^2}{\mu_n^2}} \chi_n(t) \right| < \varepsilon$$

for all k's greater than p. Now since the series $\sum_1^\infty a_n \chi_n(t)$ is absolutely convergent we can determine a number m such that

$$\sum_{m}^{\infty} |a_n \chi_n(t)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

and then

$$\sum_{m}^{r} \left| a_n e^{-\frac{x^2}{\mu_n^2}} \chi_n(t) \right| < \sum_{m}^{\infty} \left| a_n e^{-\frac{x^2}{\mu_n^2}} \chi_n(t) \right| < \frac{\varepsilon}{2};$$

also we can determine a number p such that

$$\left| \sum_{1}^{m} a_n e^{-\frac{x^2}{\mu_n^2}} \chi_n(t) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

if $x > p$, and then we shall have

$$\left| \sum_{n=1}^{r} a_n e^{-\frac{x^2}{\mu_n^2}} \chi_n(t) \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

All the conditions being satisfied the integration term by term may be effected and we have

$$2\int_0^{\infty} F(t, x)dx = 2\int_0^{\infty} \sum_{1}^{\infty} \frac{x}{\mu_n^2} e^{-\frac{x^2}{\mu_n^2}} a_n \chi_n(t) \cdot dx$$

$$= \sum_{0}^{\infty} a_n \chi_n(t) = \varphi(t).$$

Hence the proposed method is in this case successful. It can also be used in some cases when the limits of integration are infinite provided the functions $g_r(t)$, $f_r(s)$, are defined by the equations

$$g_1(t) = \int_a^b G(u, t)\, du \int_c^d G(u, v)dv \int_a^b G(w, v) f(w)\, dw$$

$$g_n(t) = \int_a^b G(u, t)\, du \int_c^d G(u, v)\, g_{n-1}(v)\, dv$$

$$f_n(s) = \int_c^d G(s, v)\, dv \int_a^b G(w, v) f_{n-1}(w) dw.$$

For example if

$$f(s) = \int_0^{\infty} J_0(st) \sqrt{st}\, \varphi(t) dt$$

where J_0 denotes the zeroeth Bessel function, it has been shown by Hankel*) that

$$\varphi(t) = \int_0^\infty J_0(st)\sqrt{st}f(s)\,ds$$

and our function $F(t, x)$ is found to be

$$xe^{-x^2}\int_0^\infty J_0(st)\sqrt{st}f(s)ds$$

and so the method leads to the correct result.

§ 2.

Solution of a particular equation.

We shall now consider the particular integral equation

$$f(s) = \int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(t\,dt}{(1-2ts+s^2)^{\frac{n}{2}}} \quad (n = 1, 3, \cdots) \quad (-1 < s < +1)$$

and shall show that *if $f(s)$ is regular within the unit circle $|s| = 1$, the solution is given by*

$$\varphi(t) = \frac{1}{4\pi}(1-t^2)^{\frac{n-1}{2}}\int_0^{2\pi}[nf\{t+i\sqrt{1-t^2}\cos\alpha\}$$
$$+ 2\{t+i\sqrt{1-t^2}\cos\alpha\} + f''\{t+i\sqrt{1-t^2}\cos\alpha\}]\sin^{n-1}\alpha\,d\alpha.$$

Let $x_1, x_2, \cdots, x_{n+2}$ be a system of rectangular coordinates in a space of $n+2$ dimensions and $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+2}^2 = 1$ a unit hypersphere situated in this space.

The equations

$$V_1 = f(x_1 + ix_2)$$
$$V_0 = \frac{1}{r^n} f\left(\frac{x_1 + ix_2}{r^2}\right)$$

define a potential function for points inside and outside the hypersphere respectively. This potential function is continuous at the boundary and so will be due to a boundary distribution σ, the conditions of being continuous within the hypersphere and of vanishing at infinity being fulfilled since $f(s)$ is regular for $|s| < 1$.

*) Mathematische Annalen, Bd. 8 (1875), p. 482. The function $f(s)$ must of course be such that the improper integral has a meaning.

Poisson's equation for the space we are dealing with is

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 V}{\partial x_{n+2}^2} + \lambda \rho = 0$$

where λ is n times the total area of the boundary of a unit hypersphere. The corresponding equation for determining the surface density is accordingly

$$\frac{\partial V_1}{\partial n_1} + \frac{\partial V_0}{\partial n_0} + \lambda \sigma = 0$$

where the normals are drawn into the two portions of space separated by the boundary.

Substituting the above values of V for the boundary $r = 1$, we find that

$$\lambda \sigma = nf(x_1 + ix_2) + 2(x_1 + ix_2) f'(x_1 + ix_2).$$

The potential at the point $(s, 0, 0, \cdots)$ when calculated by direct integration is

$$V = \int_S \frac{\sigma \, dS}{(1 - 2x_1 s + s^2)^{\frac{n}{2}}}.$$

Put

$$\begin{aligned} x_1 &= \cos\theta \\ x_2 &= \sin\theta \cos\varphi \\ x_3 &= \sin\theta \sin\varphi \cos\chi \\ &\cdots\cdots\cdots \\ x_{n+1} &= \sin\theta \sin\varphi \sin\chi \cdots \cos\omega \\ x_{n+2} &= \sin\theta \sin\varphi \sin\chi \cdots \sin\omega \end{aligned}$$

then

$$dS = \sin^n\theta \cdot \sin^{n-1}\varphi \cdots d\theta \, d\varphi \cdots d\omega,$$

accordingly

$$V = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\sin^n\theta \sin^{n-1}\varphi \cdot \sigma \, d\theta \, d\varphi}{(1 - 2s\cos\theta + s^2)^{\frac{n}{2}}} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \cdots \sin^{n-2}\chi \cdots d\chi \cdots d\omega.$$

and

$$\lambda = n\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \sin^n\theta \sin^{n-1}\varphi \, d\theta \, d\varphi \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \cdots \sin^{n-2}\chi \cdots d\chi \cdots d\omega.$$

Now by an easy calculation we find that

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \sin^n\theta \sin^{n-1}\varphi \cdot d\theta \, d\varphi = \frac{4\pi}{n},$$

hence our equation becomes

$$f(s) = V = \frac{n}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\lambda\sigma \sin^n\theta \sin^{n-1}\varphi \cdot d\theta\, d\varphi}{(1-2s\cos\theta+s^2)^{\frac{n}{2}}}$$

i. e. if

$$f(s) = \int_0^{\pi} \frac{\varphi(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta}{(1-2s\cos\theta+s^2)^{\frac{n}{2}}}$$

then

$$\varphi(\cos\theta) = \frac{n}{4\pi}\sin^{n-1}\theta \int_0^{2\pi} \lambda\sigma \sin^{n-1}\varphi \cdot d\varphi.$$

Putting $\cos\theta = t$ and substituting the value of $\lambda\sigma$ obtained above, we have

$$\varphi(t) = \frac{1}{4\pi}(1-t^2)^{\frac{n-1}{2}} \int_0^{2\pi} \big[nf(t+i\sqrt{1-t^2}\cos\alpha) + 2(t+i\sqrt{1-t^2}\cos\alpha)f'(t+i\sqrt{1-t^2}\cos\alpha)\big]\sin^{n-1}\alpha\, d\alpha$$

which is the formula stated.

If we put $n = 1$, $\varphi(t) = P_m(t)$ where P_m is the Legendre polynomial we find that $f(s) = \frac{2}{2m+1}s^m$, and our formula gives

$$\varphi(t) = P_m(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (t+\sqrt{t^2-1}\cos\alpha)^m\, d\alpha$$

which is Laplace's formula for $P_m(t)$.

Our formula may also be written in another form. If we differentiate the equation

$$f(s) = \int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(t)\, dt}{(1-2ts+s^2)^{\frac{n}{2}}}$$

we get

$$\chi(s) = nf(s) + 2sf'(s) = n\int_{-1}^{+1} \frac{(1-s^2)\varphi(t)\, dt}{(1-2ts+s^2)^{\frac{n}{2}+1}}$$

accordingly the solution of

$$\chi(s) = \int_{-1}^{+1} \frac{n(1-s^2)}{(1-2ts+s^2)^{\frac{n+2}{2}}}\varphi(t)\, dt$$

is given by

$$\varphi(t) = \frac{(1-t^2)^{\frac{n-1}{2}}}{4\pi} \int_0^{2\pi} \chi(t + \sqrt{t^2-1}\cos\alpha) \sin^{n-1}\alpha \cdot d\alpha.$$

The result may be obtained by another method which also applies when n is an even integer.

The function $\frac{(1-s^2)(1-t^2)^{\frac{n-1}{2}}}{(1-2ts+s^2)^{\frac{n+2}{2}}}$ only differs by a constant factor from $\frac{\partial G}{\partial \nu}$ where G is the Green's function for the hypersphere, and the formula

$$V = \int_0^{\pi} \chi(x_1 + \sqrt{r^2 - x_1^2}\cos\alpha) \sin^{n-1}\alpha \cdot d\alpha$$

represents a potential function which is a function of r and x_1 only and which takes the value

$$\int_0^{\pi} \chi(s) \sin^{n-1}\alpha \cdot d\alpha$$

at the point $(s, 0, 0, \cdots)$.

The values which this potential function takes at points on the hypersphere will be given by

$$V(t) = \int_0^{\pi} \chi(t + \sqrt{t^2-1}\cos\alpha) \sin^{n-1}\alpha \cdot d\alpha$$

and Green's formula $V = \int_s \frac{\partial G}{\partial \nu} V(t)\, ds$ gives us the required relation, hence we have the following theorem:

If $\chi(s)$ is regular within the unit circle $|s| = 1$, the integral equation

$$\chi(s) = \int_{-1}^{+1} \frac{n(1-s^2)}{(1-2ts+s^2)^{\frac{n+2}{2}}} \varphi(t)\, dt \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots, \infty)$$

is satisfied by

$$\varphi(t) = \frac{(1-t^2)^{\frac{n-1}{2}}}{2\pi} \int_0^{\pi} \chi(t + \sqrt{t^2-1}\cos\alpha) \sin^{n-1}\alpha \cdot d\alpha.$$

The previous relation may be deduced from this; hence if

$$f(s)=\int_{-1}^{+1}\frac{\varphi(t)\,dt}{(1-2ts+s^2)^{\frac{n}{2}}} \qquad (n=1,2,3,\cdots) \qquad (-1<s<+1)$$

then

$$\varphi(t)=\frac{1}{2\pi}(1-t^2)^{\frac{n-1}{2}}\int_0^{\pi}\Big[nf(t+\sqrt{t^2-1}\cos\alpha)$$
$$+2(t+\sqrt{t^2-1}\cos\alpha)f'(t+\sqrt{t^2-1}\cos\alpha)\Big]\sin^{n-1}\alpha\cdot d\alpha.$$

An interesting case occurs when $n=2$, for if $s+\frac{1}{s}=2z$ the first equation may be written

$$F(z)=sf(s)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\frac{\varphi(t)}{z-t}\,dt$$

and the second equation gives

$$\varphi(t)=\frac{1}{i\pi}\Big[(t+\sqrt{t^2-1}\cos\alpha)f(t+\sqrt{t^2-1}\cos\alpha)\Big]_0^{\pi}.$$

The function $F(z)$ is in general a many-valued function of the form $\frac{1}{2}\varphi(z)\operatorname{Log}\frac{z+1}{z-1}+\psi(z)$ and since the two values of the logarithm differ by $2i\pi$ we see at once how the above formula will give the correct result.

The formula which we have obtained may be used to make the solution of an integral equation of the first kind depend upon that of an integral equation of the second kind.

Let

$$\chi(s)=\int_{-1}^{+1}\left[G(s,t)+\frac{n(1-s^2)}{(1-2ts+s^2)^{\frac{n+2}{2}}}\right]\varphi(t)\,dt$$

then if

$$\psi(t)=\frac{(1-t^2)^{\frac{n-1}{2}}}{2\pi}\int_0^{\pi}\chi(t+\sqrt{t^2-1}\cos\alpha)\sin^{n-1}\alpha\cdot d\alpha$$

we shall have

$$\psi(t)=\varphi(t)+\int_{-1}^{+1}\varkappa(s,t)\,\varphi(t)\,dt$$

where

$$\varkappa(s,t)=\frac{(1-s^2)^{\frac{n-1}{2}}}{2\pi}\int_0^{\pi}G(s+\sqrt{s^2-1}\cos\alpha,t)\sin^{n-1}\alpha\cdot d\alpha.$$

Now this is an integral equation of the second kind and so can be solved by Fredholm's method provided the determinantal function δ is not equal to zero.

§ 3.

A partial integral equation.

The theory of the integral equation of the second kind

$$f(s) = \varphi(s) - \lambda \int_a^b \varkappa(s, t)\, \varphi(t)\, dt \tag{1}$$

is closely connected with that of a certain partial integral equation

$$\int_a^b \varkappa(s, x)\, f(x, t)\, dx = \int_a^b \varkappa(x, t)\, f(s, x)\, dx. \tag{2}$$

This equation has many remarkable properties, for instance if $f(s, t)$ and $g(s, t)$ are two solutions then the function

$$h(s, t) = \int_a^b f(s, x)\, g(x, t)\, dx$$

is also a solution.

For if we multiply both sides by $g(r, s)$ and integrate with regard to s between a and b we have, assuming that the order of integration can be reversed,

$$\int_a^b \int_a^b g(r, s)\, \varkappa(s, x)\, f(x, t)\, ds\, dx = \int_a^b \varkappa(x, t)\, h(r, x)\, dx$$

or

$$\int_a^b \int_a^b \varkappa(r, s)\, g(s, x)\, f(x, t)\, ds\, dx = \int_a^b \varkappa(x, t)\, h(r, x)\, dx$$

since $g(r, s)$ is a solution of (1).

Hence

$$\int_a^b \varkappa(r, s)\, h(s, t)\, ds = \int_a^b \varkappa(x, t)\, h(r, x)\, dx$$

which proves the proposition.

The function $\varkappa(s, t)$ itself is evidently a solution of (2) hence we can form at once a number of other solutions, namely

$$\varkappa\varkappa(s, t) = \int_a^b \varkappa(s, x)\, \varkappa(x, t)\, dx,$$

$$\varkappa\varkappa\varkappa(s, t) = \int_a^b \varkappa(s, x)\, \varkappa\varkappa(x, t)\, dx,$$

. . . . . .

The solving function $K(s,t)$ of the equation (1) is also a solution for we have the equations

$$\varkappa(s,t) = K(s,t) - \lambda \int_a^b \varkappa(s,r)\, K(r,t)\, dr,$$

$$K(s,t) = \varkappa(s,t) + \lambda \int_a^b K(s,r)\, \varkappa(r,t)\, dr.$$

Again, if we seek a solution of the form $\varphi(s)\,\psi(t) = f(s,t)$ we find at once that we must have

$$\varphi(s) - \lambda \int_a^b \varkappa(s,t)\, \varphi(t)\, dt = 0,$$

$$\psi(t) - \lambda \int_a^b \varkappa(s,t)\, \psi(s)\, ds = 0$$

and it is known*) that these equations are satisfied by functions $\varphi(s)$ and $\psi(s)$ when λ is one of the roots of the determinantal equation

$$\delta(\lambda) = 0.$$

Now let us consider the particular case in which the function $\varkappa$ is the Green's function corresponding to boundary conditions I . . . IV**) for the self-adjoint linear differential equation of the second order

$$L_2(u) = 0.$$

It is then evident that a function $f(s,t)$ which satisfies the integral equation

$$\int_a^b G(s,x)\, f(x,t)\, dx = \int_a^b G(x,t)\, f(s,x)\, dx \tag{3}$$

must satisfy the same boundary conditions as $G(s,x)$.

For instance if we take boundary conditions I, viz.

$$G(a,x) = G(b,x) = 0$$

we have, putting $s = a$ in the above equation,

$$0 = \int_a^b G(x,t)\, f(0,x)\, dx.$$

But if $\varphi(t)$ is a function which has a continuous second derivate and which satisfies the given boundary conditions, the solution of the equation

$$\varphi(t) = \int_a^b G(x,t)\, f(x)\, dx$$

*) Plemelj, Zur Theorie der Fredholmschen Funktionalgleichung. Monatshefte für Mathematik und Physik. XV. Jahrg., p. 93 u. p. 337).

**) Cf. Hilbert, Gött. Nachr. 1904. Zweite Mitteilung.

is given by $f(x) = -L_x\{\varphi(x)\}$ and this solution is unique, accordingly we must have $f(0, x) = 0$.

If we refer to the definitions of the functions $G(s, t)$ in Hilbert's paper it is easy to see that they are all solutions of the partial differential equation

$$L_s(u) = L_t(u). \tag{4}$$

We can now show that a continuous solution of equation (3) is also a solution of this partial differential equation. If we write

$$\varphi(s, t) = \int_a^b G(s, x) f(x, t)\, dx = \int_a^b G(x, t) f(s, x)\, dx$$

we have

$$\begin{aligned} f(s, t) &= -L_s \varphi(s, t) \\ &= -\int_a^b G(x, t)\, L_s f(s, x)\, dx. \end{aligned}$$

But since $f(s, t)$ satisfies the given boundary conditions we have

$$f(s, t) = -\int_a^b G(x, t)\, L_x \cdot f(s, x)\, dx$$

therefore

$$0 = \int_a^b G(x, t)\, [L_s f(s, x) - L_x f(s, x)]\, dx.$$

Now the equation $0 = \int_a^b G(x, t)\, \psi(t)\, dt$ only possesses one solution viz. $\psi(t) = 0$, hence we have

$$L_s f(s, x) - L_x f(s, x) = 0.$$

Thus corresponding to each Green's function for $L_x(u) = 0$ there is a group of solutions of the partial differential equation, and if $f(s, t)$, $g(s, t)$ are any two members of this group the function

$$h(s, t) = \int_a^b f(s, x)\, g(x, t)\, dx$$

will also belong to the group.

If $\psi_n(s)$ is an 'Eigenfunktion' belonging to the function $G(s, t)$ the quantity $\psi_n(s)\, \psi_n(t)$ is a solution of (3) and so

$$\int_a^b f(s, x)\, \psi_n(x)\, \psi_n(t)\, dx$$

is a solution and is of the form $\varphi(s)\, \psi_n(t)$, hence we must have $\varphi(s) = \mu_n \psi_n(s)$, that is

$$\mu_n \psi_n(s) = \int_a^b f(s, x)\, \psi_n(x)\, dx.$$

This equation shows that the functions $\psi_n(s)$ are also Eigenfunctions for the 'Kern' $f(s, t)$.

There are other types of integral equations which are satisfied by certain groups of solutions of a partial differential equation. For example we can show that if $F(x, y, z)$ is a solution of Laplace's equation

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} F(x, y, z + i\rho\cos\theta)\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(x + \rho\cos\varphi,\ y + \rho\sin\varphi,\ z)\, d\varphi$$

provided the integrals have a meaning.

In other words the integral of a solution of Laplace's equation round a circle of radius ρ is equal to the integral of the same solution multiplied by a certain definite function, along an axis drawn through the centre of the circle and perpendicular to it, the integration extending from the centre of one point sphere passing through the given circle to the centre of the other.

A simple proof of this relation may be obtained by remarking that each integral represents the solution of

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \rho} = 0$$

which reduces to $F(x, y, z)$ when $\rho = 0$, and this solution is known to be unique.

The two paths of integration appear to be related in some way to the characteristics of the differential equation

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0;$$

if the relation could be expressed in a more definite form it might suggest how similar integral equations could be obtained for more general partial differential equations.

§ 4.

Construction of an integral equation possessing assigned solutions.

The problem of determining a function $\varkappa(s, t)$ so that the equation

$$\varphi(s) = \lambda \int_a^b \varkappa(s, t)\, \varphi(t)\, dt$$

may be satisfied for a given set of functions $\psi_n(s)$ and for a given set

of values of λ, has been considered by Hilbert. If the functions $\psi_n(s)$ possess the orthogonal properties,

$$\int_a^b \psi_m(s)\,\psi_n(s)\,ds = 0 \quad m \neq n$$
$$= 1 \quad m = n$$

and the series $\sum \frac{1}{\lambda_n}\psi_n(s)\,\psi_n(t)$ is uniformly convergent it will furnish a solution of the problem. It is however not necessary for this series to be uniformly convergent as the following example will show.

Choosing the Legendre polynomials for our given set of functions we remark that they satisfy the equations

$$\frac{d}{ds}\left\{(1-s^2)\frac{du}{ds}\right\} + n(n+1)u = 0$$

and so we can obtain a simple function developable in the form

$$\sum A_n P_n(s)\,P_n(t)$$

by finding a suitable solution of the partial differential equation

$$\frac{d}{ds}\left\{(1-s^2)\frac{\partial x}{\partial s}\right\} = \frac{d}{dt}\left\{(1-t^2)\frac{\partial x}{\partial t}\right\}.$$

Assuming a solution of the form $x = F(s^2+t^2)$ we obtain

$$x(s,t) = \frac{1}{\sqrt{1-s^2-t^2}}.$$

We shall now show that the function

$$x(s,t) = \frac{1}{\sqrt{1-s^2-t^2}} \quad s^2+t^2 < 1$$
$$= 0 \quad s^2+t^2 > 1$$

gives us a solution of our problem.

If we integrate the expansion

$$P_n\left(st+\sqrt{(1-s^2)(1-t^2)}\cos\alpha\right) = P_n(s)\,P_n(t) + 2\sum_1^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!}\,P_n^m(s)P_n^m(t)\cos m\alpha$$

between 0 and π we obtain

$$\int_0^\pi P_n\left(st+\sqrt{(1-s^2)(1-t^2)}\cos\alpha\right)d\alpha = \pi\,P_n(s)\,P_n(t).$$

Putting $x = st+\sqrt{(1-s^2)(1-t^2)}\cos\alpha$ this relation gives

$$\int \frac{P_n(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2-s^2-t^2+2stx}} = \pi\,P_n(s)\,P_n(t),$$

the integral being taken over the values of x between -1 and $+1$ for which the quantity under the square root is positive.

When $t = 0$, this gives

$$\int_{-\sqrt{1-s^2}}^{+\sqrt{1-s^2}} \frac{P_n(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2-s^2}} = \pi P_n(s) P_n(0)$$

which shows that with the above function $u(s, t)$ the functions $P_n(s)$ are solutions of the homogeneous integral equation.

The corresponding expansion is obtained by making use of a theorem of Darboux's.*)

Sufficient conditions that a function $f(s)$ may be expanded in a convergent series of Legendre polynomials for values of s lying between -1 and $+1$ are that

(1) The integrals $\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{+1} ds f(s) P_n(s)$ should have a meaning, this requires that if $f(s)$ becomes infinite within the range it should become infinite to an order less than unity.

(2) If $P_n(s)$ becomes infinite at one of the points ± 1 it should become infinite to an order less than $\frac{3}{4}$.

(3) $f(s)$ should satisfy the conditions laid down by Dirichlet for a function developable in a Fourier series, i. e. it should only have a limited number of maxima and minima and of discontinuities within the range.

When these conditions are satisfied the series

$$\sum_0^\infty \frac{2n+1}{2} P_n(s) \int_{-1}^{+1} f(s) P_n(s)\,ds$$

will converge to the value $f(s)$ at all points where $f(s)$ is continuous, and to the value

$$\tfrac{1}{2} \sum [f(s+0) + f(s-0)]$$

at any point where $f(s)$ is discontinuous.

Applying this theorem to the function

$$\begin{aligned} f(s) &= (1-s^2-x^2-t^2+2stx)^{-\frac{1}{2}} && 1-s^2-x^2-t^2+2stx > 0 \\ &= 0 && 1-s^2-x^2-t^2+2stx < 0 \end{aligned}$$

*) Approximation des fonctions de très grands nombres. Journ. de Math. (3e série) tome IV, (1878), p. 393.

we obtain the series

$$\frac{\pi}{2}\sum_0^\infty (2n+1)\,P_n(s)\,P_n(t)\,P_n(x).$$

Putting $x=0$ the expansion becomes

$$\frac{\pi}{2}\sum_0^\infty (-1)^n \frac{1\cdot 3\cdots 2n-1}{2\cdot 4\cdots 2n}(4n+1)P_{2n}(s)\,P_{2n}(t) = \begin{matrix}(1-s^2-t^2)^{-\frac{1}{2}} & 1>s^2+t^2\\ 0 & 1<s^2+t^2;\end{matrix}$$

the particular case when $t=0$ has already been given by Heine.*)

Other expansions may be obtained in a similar way, for instance if $t^2=s^2$

$$\int_{-\sqrt{1-t^2}}^{+\sqrt{1-t^2}} \frac{ds}{\sqrt{1-s^2-t^2}}\int_{-\sqrt{1-s^2}}^{+\sqrt{1-s^2}} \frac{P_n(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2-s^2}} = \pi\,P_n(0)\int_{-\sqrt{1-t^2}}^{+\sqrt{1-t^2}} \frac{P_n(s)}{\sqrt{1-s^2-t^2}} = \pi^2 P_n^2(0)\,P_n(t).$$

The left hand side becomes on changing the order of integration

$$\int_{-1}^{-t} P_n(x)\,dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{+\sqrt{1-x^2}} \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2-t^2)(1-x^2-s^2)}} + \int_{-t}^{+t} P_n(x)\,dx\int_{-\sqrt{1-t^2}}^{+\sqrt{1-t^2}} \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2-t^2)(1-x^2-s^2)}}$$
$$+\int_{t}^{1} P_n(x)\,dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{+\sqrt{1-x^2}} \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2-t^2)(1-x^2-s^2)}};$$

hence if $4K$ is the period of the Jacobian elliptic functions

$$\frac{\pi^2}{4}\sum_0^\infty (4n+1)\frac{1^2\cdot 3^2\cdots(2n-1)^2}{2^2\cdot 4^2\cdots(2n)^2}P_{2n}(s)\,P_{2n}(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}K\left(\sqrt{\frac{1-s^2}{1-t^2}}\right) \quad s^2>t^2$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1-s^2}}K\left(\sqrt{\frac{1-t^2}{1-s^2}}\right) \quad s^2<t^2.$$

Putting $t=0$ we have the expansion

$$K'(s) = \frac{\pi^2}{4}\sum_0^\infty (-1)^n(4n+1)\frac{1^3\cdot 3^3\cdots(2n-1)^3}{2^3\cdot 4^3\cdots(2n)^3}P_{2n}(s).$$

If the solution of the integral equation of the second kind

$$f(s) = \varphi(s) - \int_a^b \varkappa(s,t)\,\varphi(t)\,dt$$

is known for values of b contained within the interval a to $a+A$, the function $\varkappa(s,t)$ can be uniquely determined.

*) Handbuch der Kugelfunctionen Bd. 1, p. 85.

For when $b = a$ we have $\varphi(s) = f(s)$, and so the equation may be written

$$\varphi(s, b) - \varphi(s, a) = \int_a^b \varphi(t, b)\, \varkappa(s, t)\, dt$$

and is therefore of the form

$$F(b) - F(a) = \int_a^b \varphi(t, b)\, \psi(t)\, dt.$$

Now Volterra*) has shown that if in an integral equation of this kind $F(b)$ and $F'(b)$ remain finite and continuous for values of b between a and $a + A$, and the functions

$$\varphi(t, b) \quad \text{and} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial b} = H(t, b)$$

are always finite for $b > t > a$, $a + A > b > a$, and are integrable, and if the lower limit of the absolute value of $\varphi(b, b)$ is different from zero, there will exist one and only one finite and continuous function $\psi(t)$ which satisfies the functional equation for values of b between a and $a + A$ and this function will be given by

$$\varphi(b) = \frac{F'(b)}{\varphi(b, b)} - \frac{1}{\varphi(b, b)} \int_a^b F'(x) \sum_0^\infty S_i(x, b)\, dx$$

where

$$S_0(x, b) = \frac{H(x, b)}{\varphi(b, b)}$$

$$S_i(x, b) = \int_b^x S_{i-j}(x, \xi)\, S_{j-1}(\xi, b)\, d\xi.$$

Applying this theorem to our equation we see that the function $\varkappa(s, t)$ can be uniquely determined provided the above conditions are satisfied.

Göttingen, March 6th 1906.

*) Sopra alcune quistioni di inversione di integrali definiti. Annali di Matematica 1897.

Über das Anwachsen analytischer Funktionen.*)

Von

Georg Faber in Karlsruhe.

Unter $\mathsf{M}(r)$ verstehe ich, wie üblich, den Maximalwert, den der absolute Betrag der im Kreise $|x| \leqq r$ regulären analytischen Funktion $f(x) = \sum_0^\infty a_\nu x^\nu$ auf der Peripherie dieses Kreises annimmt. Die Funktion $\mathsf{M}(r)$ spielt bekanntlich bei funktionentheoretischen Überlegungen, besonders auch in der neueren Theorie der ganzen Funktionen eine große Rolle. Es ist allgemein bekannt, daß $\mathsf{M}(r)$ mit r monoton zunimmt, und es ist leicht zu beweisen, daß $\mathsf{M}(r)$ eine stetige Funktion von r ist; ferner ist unschwer einzusehen, daß nicht zu jeder stetigen monoton zunehmenden Funktion $\vartheta(r)$ eine analytische Funktion $f(x)$ gehört, deren $\mathsf{M}(r) = \vartheta(r)$ wäre. Es erhebt sich daher die Frage: welchen weiteren Einschränkungen unterliegen die Funktionen $\mathsf{M}(r)$? Diese Frage, deren Lösung auch Herr Borel**) als wünschenswert bezeichnet, scheint nicht näher untersucht zu sein; einen kleinen Beitrag hierzu liefere ich im folgenden, indem ich zeige, daß in einem rechtwinklgen (ξ, η)-Koordinatensystem die Kurven $\eta = \lg \mathsf{M}(e^\xi)$ — wo also $r = e^\xi$ gesetzt ist — nirgends konvex sind.

Die Funktion der zwei komplexen Veränderlichen x, y:

$$F(x, y) = \frac{1}{1 - y \cdot f(x)} = \sum_0^\infty y^\nu (f(x))^\nu$$

*) Nachdem ich die vorliegende Note der Annalenredaktion eingereicht hatte, teilte mir Herr Blumenthal mit, daß er schon im August d. J. von einer ganz andern Seite her zu dem gleichen Satz gelangt ist und denselben in den Jahresberichten der D. Math.-Ver. zu veröffentlichen gedenkt (vgl. Bd. 6, Heft 2).

**) Leçons sur les fonctions entières p. 120.

ist regulär, solange $|x| < r$, $y < \frac{1}{\mathsf{M}(r)}$ bleibt (denn in diesem Gebiete ist $|y \cdot f(x)| < 1$); dagegen hat die Funktion sicher eine singuläre Stelle für $|x| = r$, $|y| = \frac{1}{\mathsf{M}(r)}$; denn für mindestens einen Wert $x = r \cdot e^{i\vartheta}$ des Kreises $|x| = r$ wird $|f(x)| = \mathsf{M}(r)$, also $f(x) = \mathsf{M}(r) e^{i\vartheta_1}$, dann wird für $x = r \cdot e^{i\vartheta}$, $y = \frac{1}{\mathsf{M}(r)} \cdot e^{-i\vartheta_1}$ die Funktion $F(x, y) = \infty$.

r und $\frac{1}{\mathsf{M}(r)}$ sind demnach zusammengehörige Konvergenzradien der Potenzreihe $F(x, y) = \sum_0^\infty {}_{\mu,\nu} a_{\mu\nu} x^\mu y^\nu$; daraus folgt*) zunächst, daß $\mathsf{M}(r)$ differenzierbar ist (wenigstens in dem Sinne, daß die zwei vorwärts und rückwärts genommenen Differentialquotienten

$$\left(\frac{d\mathsf{M}(r)}{dr}\right)_+ \quad \text{und} \quad \left(\frac{d\mathsf{M}(r)}{dr}\right)_-$$

existieren, ob sie voneinander verschieden sein können, bleibe dahingestellt); sodann, daß $R = \frac{1}{\mathsf{M}(r)}$ der Differentialungleichung genügt:

$$\left(\frac{d^2R}{dr^2}\right)_+ \leqq \frac{1}{R}\left(\frac{dR}{dr}\right)_+^2 - \frac{1}{r}\left(\frac{dR}{dr}\right)_+,$$

wo unter $\left(\frac{d^2R}{dr^2}\right)_+$, solange die Existenz des zweiten Differentialquotienten nicht feststeht, der obere oder untere Limes für $h = 0$ von

$$\frac{\left(\frac{d(\mathsf{M}(r+h))^{-1}}{dr}\right)_+ - \left(\frac{d(\mathsf{M}(r))^{-1}}{dr}\right)_+}{h}$$

verstanden werden, und der Index + durchweg durch den Index − ersetzt werden darf.

Setzt man nun $\lg r = \xi$, $\lg \mathsf{M}(r) = \eta$, so geht nach einer ganz elementaren Rechnung die obige Differentialungleichung, abgesehen von dem stets positiven Faktor $e^\eta \cdot e^{-2\xi}$, über in $\left(\frac{d^2\eta}{d\xi^2}\right)_+ \geqq 0$, womit die Behauptung bewiesen ist. Die so gefundene notwendige Beschränkung für die Funktionen $\mathsf{M}(r)$ ist nicht hinreichend, um dieselben vollständig zu charakterisieren.

Zum Schlusse will ich noch bemerken, daß die bekannte Lemairesche Grenzbeziehung zwischen den zusammengehörigen Konvergenzradien nun

---

*) S. Fabry C. R. Bd. 134 (1902), p. 1190—1192. — Faber, Math. Ann. Bd. 61 (1905), p. 300. — Hartogs, Math. Ann. Bd. 62 (1905), p. 77.

auch einen Grenzausdruck für die Funktion $M(r)$ liefert: Bedeutet wieder $a_{\mu\nu}$ den Koeffizienten von x^μ in $(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots)^\nu$, so ist:

$$\overline{\lim_{\mu+\nu=\infty}} \sqrt[\mu+\nu]{|a_{\mu\nu}|} \cdot \frac{r^\mu}{(M(r))^\nu} = 1.$$

Statt der hier benutzten Hilfsfunktion $F(x, y)$ hätten natürlich auch beliebig viele andere dem gleichen Zweck dienen können; diese Bemerkung läßt sich vielleicht verwerten zur Herstellung anderer Grenzausdrücke für $M(r)$, die zu weiteren Folgerungen geeigneter sind als der obige.

Karlsruhe, den 14. Oktober 1906.

The Finite, Discontinuous, Primitive Groups of Collineations in Three Variables.*)

By

H. F. BLICHFELDT of Stanford University, California, U. S. A.

A complete enumeration of all finite, discontinuous groups of collineations in three variables was first attempted by C. Jordan in his well-known paper *Mémoire sur les équations différentielles linéaires à intégrale algebrique*, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 84 (1878), p. 89. It appeared, however, shortly afterwards, that Jordan had overlooked two important groups, viz.: the G_{168}, discovered by Klein (*Mathematische Annalen*, 14 (1879), p. 428), and the G_{360}, discovered by Valentiner (Copenhagen, *Videnskabernes Selskabs Skrifter*, 6. *Raekke*, 1889). No other groups have since been added to Jordan's list. It seems therefore desirable to have a new and rigorous proof of the fact that Jordan's *groups together with the G_{168} and the G_{360} form indeed a complete set of the finite, discontinuous groups of collineations in three variables.* This is the theorem to be proved in the present paper.

1. We consider only finite groups of linear projective transformations of the plane $(x:y:z)$, and we call such groups *Collineation-groups* in three variables. We represent them by isomorphic groups of *linear homogeneous substitutions of determinants unity* in three variables (x, y, z), which groups we call *Linear Groups* (or *groups*, simply, where it cannot be misunderstood). The isomorphism will be 1 : 1 or 1 : 3, according as the linear group *does not* or *does* contain the group F of *similarity-substitutions* of order 3:

$$F:\begin{cases} x' = x, & y' = y, & z' = z; \\ x' = \omega x, & y' = \omega y, & z' = \omega z; \\ x' = \omega^2 x, & y' = \omega^2 y, & z' = \omega^2 z; \end{cases} \qquad \omega^3 = 1,\ \omega \neq 1.$$

*) For a bibliography of this subject consult Wiman: *Endliche Gruppen linearer Substitutionen, Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften*, Bd. I, pp. 528—530. See also two papers by the author, *On the Order of Linear Homogeneous Groups*, *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 4 (1903), pp. 387—397, and vol 5 (1904), pp. 310—325.

Thus, to the three linear homogeneous substitutions

$$x' = \theta(a_1x + b_1y + c_1z), \qquad y' = \theta(a_2x + b_2y + c_2z),$$
$$z' = \theta(a_3x + b_3y + c_3z), \qquad \theta^3 = 1,$$

will correspond the one collineation

$$x' : y' : z' = (a_1x + b_1y + c_1z) : (a_2x + b_2y + c_2z) : (a_3x + b_3y + c_3z).$$

2. We say that the group is *primitive* if it does not leave invariant a *point* or a *triangle*. A finite group leaving invariant a point will also leave invariant a straight line not passing through the point and vice versa (the group is completely 'reducible'*). We call such a group *intransitive**). A group which leaves invariant the triangle of reference is said to be written in *monomial form***). Its substitutions merely permute among themselves the variables x, y, z, in addition to affecting them with certain constant factors. A substitution or a group which leaves invariant each of the vertices of the triangle of reference, is said to be written in *canonical form*. The variables x, y, z are merely multiplied by certain constants by the substitutions of such a group. A substitution S of finite period n

$$x' = a_1x + b_1y + c_1z, \quad y' = a_2x + b_2y + c_2z, \quad z' = a_3x + b_3y + c_3z$$

can always be transformed, by a proper choice of new variables x_1, y_1, z_1, into the canonical form:***)

$$x_1' = \theta_1x_1, \quad y_1' = \theta_2y_1, \quad z_1' = \theta_3z_1.$$

The quantities θ_1, θ_2, θ_3, called the *multipliers* of S, satisfy the equation $\theta^n = 1$. We have the equation

$$[S] = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = a_1 + b_2 + c_3.$$

The quantity $[S]$, so defined, shall be called the *weight* of S.

3. The more fundamental phraseology and theory of abstract groups and permutation-groups will be supposed known.†) In particular, it may be mentioned that an *abelian group* consists of mutually commutative substitutions, and that a *simple group* contains no invariant subgroup. The only simple groups whose orders are $\leqq 504$ are the following: the alternating permutation-groups in 5 and 6 letters, of orders 60 and 360 respectively; a group of order 168 and one of order 504††). The

*) Maschke, *Mathematische Annalen* 52 (1899), p. 363.

**) Maschke, *American Journal of Mathematics* 17 (1895), p. 168.

***) See Moore, *Mathematische Annalen* 50 (1898), p. 215 for proof and references.

†) Consult Burnside, *Theory of Groups*, Cambridge University Press, 1897; and Weber, *Algebra*, Bd II, Braunschweig (Vieweg und Sohn), 2nd edition, 1899.

††) Burnside, *Theory of groups*, pp. 371—375.

usual way of executing a consecutive set of linear substitutions $ABC\cdots$ in the order from left to right will be adhered to here. For instance, if we restrict ourselves to two variables x, y, and A is the substitution $x'' = a_1x' + b_1y'$, $y'' = c_1x' + d_1y'$, B the substitution $x' = a_2x + b_2y$, $y' = c_2x + d_2y$, so that

$$x'' = (a_1a_2 + b_1c_2)x + (a_1b_2 + b_1d_2)y,$$
$$y'' = (c_1a_2 + d_1c_2)x + (c_1b_2 + d_1d_2)y,$$

we write instead but one accent in the two substitutions A, B (i. e. B as above, $A: x' = a_1x + b_1y$, $y' = c_1x + d_1y$), and then indicate the order in which the two substitutions are executed by the symbol AB.

By the order of a group (i. e. total number of substitutions of the group) *shall be understood the order of the corresponding collineation-group, unless otherwise stated.*

4. A list of the finite, non-abelian, groups of linear homogeneous substitutions, of determinants $= 1$, in two variables x, y, will be useful for later references and is therefore given here. Each group is represented by a set of substitutions that generate it.*)

1°. The *Dihedral* group of order $2n$:

$$\begin{cases} S: & x' = \alpha x, \quad y' = \alpha^{-1}y, \quad \alpha^n = 1; \\ T: & x' = y, \quad y' = -x. \end{cases}$$

2°. The *Tetrahedral* group of order 12 (as a collineation-group; of order 24 as a linear group. When written as a linear group, it contains the group of similarity-substitutions in two variables: $x' = x$, $y' = y$; $x' = -x$, $y' = -y$):

$$\begin{cases} S: & x' = y, \quad y' = -x; \\ T: & x' = ix, \quad y' = -iy, \quad i^2 = -1; \\ U: & x' = \frac{1}{2}(-1-i)x + \frac{1}{2}(1+i)y, \\ & y' = \frac{1}{2}(-1+i)x + \frac{1}{2}(-1+i)y. \end{cases}$$

3°. The *Octahedral* group of order 24 (as a collineation-group; of order 48 as a linear group):

$$\begin{cases} S,\ T \text{ and } U \text{ of } 2^0; \\ V: \quad x' = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)x, \quad y' = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)y. \end{cases}$$

*) See Klein, *Vorlesungen über das Ikosaeder* (Leipzig 1884), pp. 36—42; Weber, *Algebra*, Bd. II, pp. 269—287 (2nd edition, 1899).

4°. The *Icosahedral* group of order 60 (as a collineation-group; of order 120 as a linear group):

$$\begin{cases} S: & x' = y, \quad y' = -x; \\ T: & x' = \alpha x, \quad y' = \alpha^{-1} y, \quad \alpha^5 = 1, \quad \alpha \neq 1; \\ U: & x' = \dfrac{1}{\alpha - \alpha^{-1}}(x - (\alpha^2 + \alpha^{-2})\, y), \quad y' = \dfrac{1}{\alpha - \alpha^{-1}}(-(\alpha^2 + \alpha^{-2})\, x - y). \end{cases}$$

5. The arrangement of the analysis is as follows:

I. *Preliminary Theorems.*

II. *The Order is not Divisible by any Prime* > 7.

III. *The Order is a Factor of* $2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2$. It is shown that, if the order is divisible by 2^4, or 3^4 etc., then will the group considered contain a certain invariant subgroup H, and will not be primitive unless the order of H is of the form 3^k. The primitive groups containing invariant subgroups of this order are the 'Hessian' group of order $216 = 2^3 \cdot 3^3$ and some of its subgroups (art. 23). The Theorem III is therefore established.

IV. *Auxiliary Theorems.* In any case where the order is divisible by $3^3 \cdot 5$, $3^3 \cdot 7$, 5^2, 7^2 or $5 \cdot 7$, the group has an invariant subgroup H and is therefore not primitive. Hence, the order is a factor of one of the numbers $2^3 \cdot 3^3$, $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$, or $2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$.

V. *Classification of the Primitive Groups.* The results are as follows:

A. Primitive groups having invariant intransitive subgroups (none).

B. Primitive groups having invariant monomial subgroups:

1°. The *Hessian* group of order 216 as a collineation-group, of order 648 as a linear group:

$$\begin{cases} S: & x' = y, \quad y' = z, \quad z' = x; \\ T: & x' = x, \quad y' = \omega y, \quad z' = \omega^2 z, \quad \omega^3 = 1, \quad \omega \neq 1; \\ U: & x' = \varphi x, \quad y' = \varphi y, \quad z' = \varphi \omega z, \quad \varphi^3 = \omega^2; \\ V: & x' = \varrho(x + y + z), \quad y' = \varrho(x + \omega y + \omega^2 z), \quad z' = \varrho(x + \omega^2 y + \omega z), \\ & \varrho = \dfrac{1}{\omega - \omega^2}. \end{cases}$$

2°. A subgroup of the Hessian group, of order 72 as a collineation-group, and of order 216 as a linear group:

$$\begin{cases} S,\ T \text{ and } V \text{ of } 1^\circ; \\ UVU^{-1}: & x' = \varrho(x + y + \omega^2 z), \quad y' = \varrho(x + \omega y + \omega z), \\ & z' = \varrho(\omega x + y + \omega z). \end{cases}$$

3°. A subgroup of the Hessian group, of order 36 as a collineation-group, and of order 108 as a linear group: S, T and V of 1°.

C. Primitive groups isomorphic with simple abstract groups:

4°. Group of order 60, both as a collineation- and as a linear group:

$$\begin{cases} E_1: & x' = y, \quad y' = z, \quad z' = x; \\ E_2: & x' = x, \quad y' = -y, \quad z' = -z; \\ E_3: & x' = \frac{1}{2}(-x + \mu_2 y + \mu_1 z), \quad y' = \frac{1}{2}(\mu_2 x + \mu_1 y - z), \\ & z' = \frac{1}{2}(\mu_1 x - y + \mu_2 z), \\ & \mu_1 = \alpha + \alpha^4 = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{5}), \quad \mu_2 = \alpha^2 + \alpha^3 = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{5}), \\ & \alpha^5 = 1. \end{cases}$$

5°. Group of order 360 as a collineation-group, of order 1080 as a linear group:

$$\begin{cases} E_1, E_2 \text{ and } E_3 \text{ of } 4^0; \\ E_4: \quad x' = -x, \quad y' = -\omega z, \quad z' = -\omega^2 y, \qquad \omega^2 + \omega + 1 = 0. \end{cases}$$

6°. Group of order 168, both as a collineation- and as a linear group:

$$\begin{cases} S: & x' = \varepsilon x, \quad y' = \varepsilon^2 y, \quad z' = \varepsilon^4 z, \qquad \varepsilon^7 = 1, \quad \varepsilon \neq 1; \\ T: & x' = z, \quad y' = x, \quad z' = y; \\ U: & x' = h(\alpha x + \beta y + \gamma z), \quad y' = h(\beta x + \gamma y + \alpha z), \quad z' = h(\gamma x + \alpha y + \beta z), \\ & \alpha = \varepsilon^4 - \varepsilon^{-4}, \quad \beta = \varepsilon^2 - \varepsilon^{-2}, \quad \gamma = \varepsilon - \varepsilon^{-1}, \\ & h = \frac{1}{7}(\varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^4 - \varepsilon^{-1} - \varepsilon^{-2} - \varepsilon^{-4}) = \frac{1}{\sqrt{-7}}. \end{cases}$$

6. For a detailed study of the subject of linear groups consult the following memoires, in addition to those mentioned in the footnotes and in the synopsis by Wiman, '*Endliche Gruppen linearer Substitutionen*', *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften*, Bd. 1, pp. 522—554:

Weber: Algebra II, Lineare Gruppen.

Frobenius: a series of articles in the *Sitzungsberichte der Kgl. Preuß. Akademie der Wissenschaften*, beginning with '*Über Gruppencharaktere*', Sitzungsberichte 1896, p. 985.

I. Schur: '*Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen*', *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Bd. 127 (1904), p. 20; also articles given in the *Sitzungsberichte der Kgl. Preuß. Akad. d. Wiss.*, beginning with '*Über eine Klasse von endlichen Gruppen linearer Substitutionen*', 1905, p. 77.

W. Burnside: a series of papers in the *Proceedings of the London Mathematical Society*, beginning with '*On group characteristics*', vol. 33 (1900), p. 146; also a paper '*On the reduction of a group of homogeneous linear substitutions of finite order*', *Acta Mathematica* 28 (1904), p. 369.

A. Loewy: '*Über die Reducibilität der Gruppen linearer homogener Substitutionen*', *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 4 (1903), p. 44, and further papers in the same journal.

On the special problem of the collineation groups in four variables consult Bagnera, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 1901, p. 161, and 1905, p. 1; Autonne, *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1901, p. 351; Blichfeldt, *Transactions of the Am. Math. Society*, 1905, p. 230 and *Mathematische Annalen*, 1905, p. 204.

I. Preliminary Theorems.

7. The Theorems 1—3 will be assumed true for all linear groups in two variables, as they may be verified either directly from the list of the binary groups given (art. 4), or by employing the methods used below in the case of three variables to the case of two variables.

Theorem 1. *An abelian group can be written in canonical form.*

An abelian group G which is not the group F (art. 1) merely (for which the theorem is evident), contains an invariant substitution A which is not a similarity-substitution. Let us choose the variables so that A is written in canonical form (art. 2), say

$$x' = \alpha x, \quad y' = \beta y, \quad z' = \gamma z.$$

If no two of the multipliers α, β, γ are equal, we prove the theorem simply by determining the general form of any other substitution B of G, which must satisfy the relation

$$AB = BA.$$

If $\alpha = \beta \neq \gamma$, we find the general form of B (i. e. of every substitution of G) to be the following:

$$x' = ax + by, \quad y' = cx + dy, \quad z' = ez.$$

The substitutions

$$x' = ax + by, \quad y' = cx + dy$$

form an abelian group in two variables, which can be written in canonical form. New variables x_1, y_1, certain linear functions of x, y, may therefore be choosen so that every substitution of G is of the form

$$x_1' = \theta_1 x_1, \quad y_1' = \theta_2 y_1, \quad z' = \theta_3 z.$$

Theorem 2. *A group G containing an invariant abelian subgroup $H \neq F$ is either intransitive or can be written in monomial form.*

We prove the theorem simply by writing H in canonical form, and then find the general form of a substitution B of G such that $BA_1 = A_2 B$, where A_1, A_2 belong to H.

Theorem 3. *A group G whose order is the power of a prime p can be written in monomial form.*

Consider a group G of order p^m. We can construct a series of groups

$$G, G_1, G_2, \cdots$$

of orders p^m, p^{m-1}, p^{m-2}, $\cdots$, each of which is contained in all that stand to the left of it and is invariant in G*). Now, if G is abelian, the theorem is true (Theo. 1). If G_1 is abelian, but G not, then can G_1 not be the group F, whose substitutions are commutative with every substitution of G**). Hence, G is intransitive or can be written in monomial form, by Theo. 2. If G is intransitive, say of the form

$$x' = ax + by, \quad y' = cx + dy, \quad z' = ez,$$

the group formed of the substitutions

$$x' = ax + by, \quad y' = cx + dy$$

will be of order p^n. The Theorem to be proved being true for two variables, it would be true for three.

If G_{i+1} is abelian, but G_i not, then is $G_{i+1} + F$. The group G, leaving G_{i+1} invariant, could be written in monomial form, and the Theorem is proved.

8. Lemma 1. *Let $\Sigma = 0$ be a true equation, the left-hand member of which is the sum of a finite number of roots of unity. A certain root of unity of order p^n (p being a prime), say θ, may be selected so that every term of Σ is the product of a power of θ and a root whose index****) is prime to p. Then, if θ be replaced by* 1, *the resulting equation may no longer be true, but the left-hand member will become $p \times$ (the sum of a finite number of roots of unity).*

This follows immediately from a Theorem by Kronecker†) which says that, θ being regarded a variable, the quantity Σ either is divisible by the expression

$$1 + \theta^{p^n-1} + \theta^{2p^n-1} + \cdots + \theta^{(p-1)p^n-1}$$

or vanishes for all values of θ. If θ_1 represents θ^{p^n-1}, so that θ_1 is a primitive root of the equation $\theta_1^p - 1 = 0$, then we can write every power of θ occurring in Σ in the form $\theta^t\theta_1^{t_1}$, where $t < p$, $t_1 < p$. Then Kronecker's Theorem says that either will Σ vanish for every value of θ and θ_1, or must be divisible by $1 + \theta_1 + \theta_1^2 + \cdots + \theta_1^{p-1}$. In other

*) Burnside, *Theory of Groups*, p. 64.

**) Ibid. p. 63.

***) By the *index* of a root of unity φ we mean the least positive integer m for which $\varphi^m = 1$.

†) *Mémoire sur les facteurs irréductibles de l'expression $x^n - 1$, Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. 19 (1854), p. 178.

words, *if* Σ *be arranged according to powers of* θ_1, *then are the coefficients equal.*

9. Let $\theta, \alpha, \beta, \cdots$ represent a system of primitive roots of the equations

$$\theta^{p^n} - 1 = 0, \quad \alpha^{q^m} - 1 = 0, \quad \beta^{r^l} - 1 = 0, \cdots,$$

and $\theta_1, \alpha_1, \beta_1, \cdots$ primitive roots of the equations

$$\theta_1^{p} - 1 = 0, \quad \alpha_1^{q} - 1 = 0, \quad \beta_1^{r} - 1 = 0, \cdots,$$

$p, q, r, \cdots$ being different primes. We shall suppose the system $\theta, \alpha, \beta, \cdots$ chosen so that every term of Σ can be written in the form of a product of powers of roots of the system. Then a little consideration of Kronecker's Theorem will convince one that the terms of the quantity Σ can be arranged in the following form:

$$\Sigma = T(1 + \theta_1 + \theta_1^2 + \cdots + \theta_1^{p-1}) + A(1 + \alpha_1 + \alpha_1^2 + \cdots + \alpha_1^{q-1}) + B(1 + \beta_1 + \beta_1^2 + \cdots + \beta_1^{r-1}) + \cdots,$$

where the powers of θ contained in T are $< p$, those of α in A are $< q$, those of β in B are $< r$, etc. It is then apparent that the equation $\Sigma = 0$ is satisfied whatever finite values be given to the roots $\theta, \alpha, \beta, \cdots, \theta^2, \alpha^2, \beta^2, \cdots$, etc.; $\theta_1, \alpha_1, \beta_1, \cdots, \theta_1^2, \alpha_1^2, \beta_1^2, \cdots$, etc., regarded now as independent quantities, so long as

$$1 + \theta_1 + \theta_1^2 + \cdots + \theta_1^{p-1} = 0, \quad 1 + \alpha_1 + \alpha_1^2 + \cdots + \alpha_1^{q-1} = 0,$$
$$1 + \beta_1 + \beta_1^2 + \cdots + \beta_1^{r-1} = 0, \cdots.$$

In particular, we may put 0 for every $\theta, \theta^2, \cdots, \theta^{p-1}, \alpha, \alpha^2, \cdots, \alpha^{q-1}$ $\beta, \beta^2, \cdots, \beta^{r-1}, \cdots$, occurring in $T, A, B, \cdots$, and replace $\theta_1, \theta_1^2, \cdots, \theta_1^{p-1}, \alpha_1, \alpha_1^2, \cdots, \alpha_1^{q-1}, \beta_1, \beta_1^2, \cdots, \beta_1^{r-1}, \cdots$ in such a manner by the numbers 0, 1, -1 that we have $1 + \theta_1 + \theta_1^2 + \cdots + \theta_1^{p-1} = 0$, etc. If, however, this scheme be carried out only with reference to the roots $\theta, \theta^2, \cdots, \theta^{p-1}, \alpha, \alpha^2, \cdots, \alpha^{q-1}, \beta_1, \alpha_1^2, \cdots, \beta_1, \cdots$, at the same time replacing each of the roots $\theta_1, \theta_1^2, \cdots, \theta_1^{p-1}$ by 1, the quantity Σ will not necessarily be $= 0$, but will certainly be $\equiv 0 \pmod{p}$. We shall state this result in the following form:

Lemma 2. *Let every term of* Σ *be written in the form*

$$(\theta^t \alpha^a \beta^b \cdots)\ (\theta_1^{t_1} \alpha_1^{a_1} \beta_1^{b_1} \cdots), \qquad t, t_1 < p;\ a, a_1 < q;\ b, b_1 < r, \cdots.$$

Then if every factor $(\theta^t \alpha^a \beta^b \cdots)$ *which is not already* $= 1$ *be replaced by* 0, *every factor* $\theta_1^{t_1}$ *by* 1, *and the powers* $\alpha_1, \alpha_1^2, \cdots, \alpha_1^{q-1}, \beta_1, \beta_1^2, \cdots, \beta_1^{r-1}, \cdots$, *regarded now as so many independent quantities, be replaced by* 0, 1 *or* -1 *in such a manner that the equations*

$$1 + \alpha_1 + \alpha_1^2 + \cdots + \alpha_1^{q-1} = 0, \quad 1 + \beta_1 + \beta_1^2 + \cdots + \beta_1^{r-1} = 0, \cdots$$

are satisfied, then will the resulting value of Σ *be an integer* $\equiv 0 \pmod{p}$.

II. The Order is not Divisible by any Prime > 7.

10. Let G be a group whose order is divisible by a prime $p > 7$. Then it contains a substitution S of order p, which we may write in canonical form:

$$S: \quad x' = \theta_1 x, \quad y' = \theta_2 y, \quad z' = \theta_3 z, \qquad \theta_1^p = \theta_2^p = \theta_3^p = 1.$$

Two cases may arise: the multipliers are all different, or $\theta_1 = \theta_2 + \theta_3$. We shall consider only the first possibility. remarking that there will be hardly any difference in the manner of procedure in the two cases.

Let T be any other substitution of order p in G:

$$T: \quad x' = a_1 x + b_1 y + c_1 z, \quad y' = a_2 x + b_2 y + c_2 z, \quad z' = a_3 x + b_3 y + c_3 z.$$

Let us form the substitutions TS, TS^2, TS^λ. We have (art. 2)

$$\begin{aligned} [T] &= a_1 + b_2 + c_3, \\ [TS] &= a_1\theta_1 + b_2\theta_2 + c_3\theta_3, \\ [TS^2] &= a_1\theta_1^2 + b_2\theta_2^2 + c_3\theta_3^2, \\ [TS^\lambda] &= a_1\theta_1^\lambda + b_2\theta_1^\lambda + c_3\theta_3^\lambda. \end{aligned}$$

Eliminating the quantities a_1, b_2, c_3 we get the equation

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} [T] & 1 & 1 & 1 \\ [TS] & \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 \\ [TS^2] & \theta_1^2 & \theta_2^2 & \theta_3^2 \\ [TS^\lambda] & \theta_1^\lambda & \theta_2^\lambda & \theta_3^\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Dividing by $(\theta_1 - \theta_2)(\theta_2 - \theta_3)(\theta_3 - \theta_1)$ we get

$$[TS^\lambda] + [T]\,\Sigma_1 + [TS]\,\Sigma_2 + [TS^2]\,\Sigma_3 = 0,$$

the coefficients Σ_1, Σ_2, Σ_3 being certain integral functions of θ_1, θ_2, θ_3. The weights $[TS^\lambda]$, $[T]$, $\cdots$ being each the sum of three roots of unity (art. 2), we have an equation $\Sigma = 0$ of the type considered in articles 8—9.

We shall apply the Lemma 2, and put 1 for every root whose index is p. To such roots belong θ_1, θ_2 and θ_3, and the quantities Σ_1, Σ_2 and Σ_3 take the values

$$-\frac{\lambda-1)(\lambda-2)}{2}, \quad \lambda(\lambda-2), \quad -\frac{\lambda(\lambda-1)}{2}$$

respectively, as may be proved readily. To clear of fractions we multiply throughout by $p+1$. The weights $[TS^\lambda]$, $[T]$, etc., being each the sum of three roots of unity, will take integral values lying between -3 and $+3$, inclusive, by the process of article 9. Indicating the resulting value of the indeterminate quantity $[TS^\lambda]$ by $[TS^\lambda]'$, we obtain, finally, a congruence of the form

$$[TS^\lambda]' \equiv a\lambda^2 + b\lambda + c \pmod{p}, \qquad \lambda = 0, 1, 2, \cdots, p-1;$$

a, b, c being certain integers independent of λ.

Bearing in mind that $[TS^\lambda]'$ can have only 7 different values, namely $\pm 3, \pm 2, \pm 1, 0$, we find without much trouble that the congruence is possible only if $a \equiv b \equiv 0 \pmod{p}$ when $p > 7$. It follows that

$$[TS^\lambda]' \equiv [T]' \equiv 3 \pmod{p},$$

since T was, by assumption, a substitution of order p.

Now, the weight $[TS^\lambda]$, for any given value of λ, could contain no roots not satisfying the equation $\theta^p - 1 = 0$. For if it did, we could at the outset have made one such root 0 by the scheme laid down in article 9, in which case the quantity $[TS^\lambda]$ (for the value of λ given) would have had one of the values $\pm 2, \pm 1, 0$ only. No one of these numbers is, however, $\equiv 3 \pmod{p}$, if $p > 7$.

11. The product of any two substitutions of G each of order p, as TS, must therefore be the identical substitution (whose weight is $1+1+1$) or be a substitution of order p. It follows that all the substitutions of order p contained in G, together with the identical substitution, form a group by themselves. This group, H say, is transformed into itself by the substitutions of G, as a substitution of order p is transformed into one of the same order. The order of H is evidently a power of p. It can therefore be written in monomial form (Theorem 3). A monomial group will, however, contain substitutions of order 2 or 3, unless the monomial form is the canonical merely, in which case the group is evidently abelian. Accordingly, H is an abelian group, and G can not be primitive (Theorem 2). Hence, finally, a primitive group can contain no substitution of prime order $p > 7$.

Theorem 4. *The order of a primitive group is not divisible by any prime $p > 7$.*

III. The Order is a Factor of $2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2$.

12. We may study a group whose order is the power of a prime very easily by writing it in monomial form (Theorem 3). We shall not enter into the details of this simple problem, but merely state the following results:

α. A group of order 2^4 must contain a substitution of order 8, or a substitution of order 4 whose weight has the form $(-1+i+i)$, $i^2 = -1$.

β. A group of order 3^4 (of order 3^5 as a linear group containing F) must contain a substitution whose 3^{rd} power is neither the identical substitution nor a similarity-substitution.

γ. A group of order p^3, $p > 3$, must contain a substitution of order p^2.

We shall proceed to show that a group G containing any of the special substitutions just mentioned must leave invariant a certain subgroup H, defined below, and that as a consequence it cannot be primitive. Now, by a well known theorem, a group whose order is divisible by p^n (p being a prime) contains a subgroup of order p^n.*) It follows, from Theorem 4 and from the results stated under α, β, γ, that the order of a primitive group must be a factor of $2^8 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2$.

13. Consider a group G containing a substitution S of order 8, whose multipliers are φ_1, φ_2, φ_3. At least one of these must be a primitive 8^{th} root of unity, and we shall, for the present, assume that they are different one from the other. We choose the variables of G so that S is written in canonical form.

Let T be any other substitution of G. We can form an equation in the same manner as we formed (1) of article 10, by eliminating certain quantities a_1, b_2, c_3 from the weights of the substitutions T, TS^4, TS and TS^2, namely the equation:

$$\begin{vmatrix} [TS] & 1 & 1 & 1 \\ [TS^4] & \varphi_1^4 & \varphi_2^4 & \varphi_3^4 \\ [TS] & \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \\ [TS^2] & \varphi_1^2 & \varphi_2^2 & \varphi_3^2 \end{vmatrix} = 0.$$

After multiplying out we divide by $(\varphi_1 - \varphi_2)(\varphi_2 - \varphi_3)(\varphi_3 - \varphi_1)$. The weights $[T]$, etc., being each the sum of three roots of unity, we obtain an equation $\Sigma = 0$ of the type considered in articles 8—9. We shall apply the Lemma 1, and put 1 for every root whose index is a power of 2. Indicating the modified weights by the symbols $[T]_2$, $[TS^4]_2, \cdots$, the resulting equation will be found to be of the form

$$3[T]_2 - [TS^4]_2 - 8[TS]_2 - 6[TS^2]_2 \equiv 0 \pmod 2,$$

or

$$[T]_2 \equiv [TS^4]_2 \pmod 2.$$

14. The group G considered may contain other substitutions $S_1, S_2, \cdots$, besides S^4, enjoying the same property, viz:

$$[T]_2 \equiv [TS_1]_2, \quad [T]_2 \equiv [TS_2]_2, \cdots \pmod 2, \tag{2}$$

T being any substitution of G. We shall prove *firstly*, that all such substitutions form a group H, and *secondly*, that this group is invariant in G.

Firstly, to show that, if S_1 and S_2 satisfy the congruences (2), so will $S_1 S_2$; i. e. to show that

$$[T]_2 \equiv [T(S_1 S_2)]_2 \pmod 2.$$

*) Sylow's Theorem; see Burnside, *Theory of Groups*, p. 90.

Now, as T represents in turn all the substitutions of G, so does TS_1. Substituting TS_1 for T in the second of the congruences (2), we have

$$[(TS_1)]_2 \equiv [(TS_1)S_2]_2 \pmod 2,$$

i. e.

$$[TS_1]_2 \equiv [T(S_1S_2)]_2$$
$$\equiv [T]_2 \pmod 2$$

by the first of the congruences (2), proving the proposition.

Secondly, to show that, if T and V be any two substitutions of G, and if S_1 be a substitution of H, then is also VS_1V^{-1} a substitution of H. We have

$$[V^{-1}TV]_2 \equiv [(V^{-1}TV)S_1]_2 \pmod 2 \tag{3}$$

by (2). But, we may readily prove that

$$[B] = [ABA^{-1}],$$

whatever be the substitutions (of finite orders) A and B. Hence,

$$[V^{-1}TV] = [T],$$
$$[(V^{-1}TV)S_1] = [V(V^{-1}TVS_1)V^{-1}] = [T(VS_1V^{-1})].$$

Substituting in (3) we get

$$[T]_2 \equiv [T(VS_1V^{-1})]_2 \pmod 2,$$

proving that VS_1V^{-1} belongs to H. That is, H is an invariant subgroup of G. The group H can neither be the group F nor the identical substitution, since H contains a substitution of order 2, namely S^4 (art. 13).

15. We have so far studied the effect of the presence in G of a substitution S of order 8, with three distinct multipliers. In like manner we may deal with the cases where G contains a substitution S' of order 8, two of whose multipliers are equal; or a substitution S'' of order 4, whose multipliers are -1, i, i; $i^2 = -1$. We begin with a determinant differing from the one of article 13 simply by lacking its last row and column in the former case, and its second row and last column in the latter. We show the presence of an invariant subgroup H in both cases, containing a known substitution of order 2, namely $(S')^4$ in the former case and $(S'')^2$ in the latter.

It remains for us to study the group H. It cannot contain a substitution whose order is a prime number $q \neq 2$. To prove this, let T in the congruences (2) be the identical substitution. Then we have

$$[T]_2 \equiv 3 \equiv [S^j]_2 \pmod 2,$$

S being a tentative substitution of H of order q, and S^j any power of S. If the multipliers of S are α, β, γ, we have

$$3 \equiv [S^j]_2 = \alpha^j + \beta^j + \gamma^j \pmod 2,$$

and therefore

$$3 \sum_{j=1}^{q} \eta^j \equiv \sum_{j=1}^{q} \eta^j (\alpha^j + \beta^j + \gamma^j) \pmod 2,$$

η being a root of the equation $\theta^2 - 1 = 0$, which equation is also satisfied by α, β and γ. Now, if none of the latter roots are $= 1$, we get, by putting $\eta = 1$, the impossibility

$$3q \equiv 0 \pmod 2.$$

In all other cases we get similar impossibilities by choosing a suitable value for η.

It follows that the order of H is a power of 2. We can therefore write this invariant subgroup of G in monomial form. When so written, we find it to be either

a) abelian, in which case G is not primitive (Theorem 2), or

b) intransitive, having a single invariant straight line. This line should evidently also be invariant under G, in which case G is intransitive, not primitive (art. 2).

To resume, if the order of G is divisible by 2^4, then will G contain a substitution of order 8, or one of order 4 whose multipliers are $-1, i, i$. The group G will, in both cases, contain an invariant subgroup H and is not primitive. Accordingly, *the order of a primitive group is not divisible by* 2^4.

16. In exactly the same way we prove that if G has a substitution of order p^2, $p > 3$, then it has an invariant subgroup H of order p^m. Such a group being abelian (cf. art. 11), it follows that G is not primitive (Theorem 2). Hence, *the order of a primitive group is not divisible by* p^3, p *being a prime* > 3.

In the case $p = 3$ we find that *a linear group can have no substitution of order* 3^m, *whose* 3^{rd} *power is not the identical or a similarity-substitution, unless it has an invariant subgroup* H *of order* 3^n. It will be shown later (art. 23) that there are three primitive groups which contain invariant subgroups whose orders are powers of 3. A cursory examination of these groups reveals the fact, however, that they contain no substitution whose 3^{rd} power is not the identical or a similarity-substitution. It follows that *the order of no primitive collineation group is divisible by* 3^4 (cf. articles 12 and 16). Hence, finally, we have the

Theorem 5. *The order of a primitive group is a factor of* $2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2$.

IV. Auxiliary Theorems.

17. Theorem 6. *If the group G contains a substitution S of order 5 and one T of order 7; i. e. if the order of G is divisible by $5 \cdot 7$, then will G contain a substitution of order $5 \cdot 7$.*

Let $[S] = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$. Choose the variables so that T is written in canonical form. Then if a_1, b_2, c_3 be the coefficients in the principal diagonal of the matrix of S, we have

$$[ST^i] = a_1\beta_1^i + b_2\beta_2^i + c_3\beta_2^i, \quad i = 0, 1, 2, \cdots, 6.$$

Hence, if β be a primitive 7^{th} root of unity different from β_1^{-1}, β_2^{-1}, β_3^{-1}, then

$$(4)\quad [S] + \beta[ST] + \beta^2[ST^2] + \beta^3[ST^3] + \beta^4[ST^4] + \beta^5[ST^5] + \beta^6[ST^6] = 0$$

Assume the theorem not true, so that none of the weights $[ST^i]$ contains both 7^{th} and 5^{th} roots at the same time. Let us arrange according to powers of β. Then must the coefficients of the different powers be equal (art. 8). Now,

a) if none of the weights $[ST^i]$ contains 7^{th} roots of unity, the equation considered is already arranged, and we have

$$[S] = [ST];$$

b) if some of the weights contain 7^{th} roots, say $[ST]$, $[ST^3]$, $\cdots$ then we will write the sum of the corresponding terms in the form

$$\beta[ST] + \beta^3[ST^3] + \cdots = k_0 + \beta k_1 + \beta^2 k_2 + \cdots + \beta^6 k_6,$$

and (4) becomes

$$\{[S] + k_0\} + \beta k_1 + \beta^2\{k_2 + [ST^2]\} + \beta^3 k_3 + \cdots = 0,$$

from which follows:

$$(5)\qquad [S] + k_0 = k_1, \quad \text{or} \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + k_0 - k_1 = 0.$$

Arranging this equation according to the five different powers of α, the coefficients should be equal (art. 8). But, $k_0 - k_1$ being free from 5^{th} roots, the equation (5) has at most four different powers of α, so that the coefficients should all be $= 0$, which is absurd. Hence, only (a) is tenable.

By writing S in canonical form instead of T, still assuming the theorem to be proved not true, we get in the same way

$$[T] + \alpha[ST] + \alpha^2[S^2T] + \alpha^3[S^3T] + \alpha^4[S^4T] = 0,$$

and

$$[T] = [ST].$$

Hence,

$$[S] = [T], \quad \text{or} \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3,$$

which, like (5), is an impossibility. Accordingly, at least one of the weights $[ST^i]$ must contain both 5^{th} and 7^{th} roots of unity, and the theorem is proved.

18. Theorem 7. *If a linear group G has a substitution S of order* 5 *(or* 7*) and a substitution T whose multipliers are $\varphi, \varphi, \varphi\omega^2$, where $\varphi^3 = \omega$, $\omega^2 + \omega + 1 = 0$, then it has one of order* $9 \cdot 5$ *(or* $9 \cdot 7$*).*

Proceeding as in article 17, we obtain an equation of the form

$$[S] + \varphi^2\omega[ST] + \varphi[ST^2] = 0. \tag{6}$$

Now, it follows from Kronecker's Theorem (art. 8) that the equation

$$A + \varphi B + \varphi^2 C = 0,$$

(A, B, C being sums of roots of unity none of which can be written in the form $\varepsilon\varphi\omega^a$ or $\varepsilon\varphi^2\omega^a$, where ε is a root whose index is prime to 3) can be satisfied only if $A = B = C = 0$. Then the assumption that none of the weights $[ST]$ and $[ST^2]$ can contain both 9^{th} roots and 5^{th} (or 7^{th}) roots at the same time is readily proved untenable.

19. The two preceeding theorems state that G contains a substitution V of order $p^n q$, p and q being prime to each other, under certain conditions. This is the same as saying that, when these conditions are fulfilled, G contains two commutative substitutions $S\,(=V^{p^n})$ and $T\,(=V^q)$ whose orders are prime to each other. In such cases G will have an invariant subgroup H, as we shall proceed to show, unless the weights of S and T are of certain types.

Theorem 8. *Let S and T be two commutative substitutions of a group G, of orders q and p^n respectively; p and q being different prime numbers. Then if two of the multipliers of S be not equal, G has an invariant subgroup H.*

The substitutions S and T generate an abelian group, which we will write in canonical form. We suppose

$$S: x' = \alpha_1 x, \quad y' = \alpha_2 y, \quad z' = \alpha_3 z;$$
$$T: x' = \beta_1 x, \quad y' = \beta_2 y, \quad z' = \beta_3 z$$

and assume that α_1, α_2 and α_3 are all different. Let A be any substitution of G, and let the coefficients in the principal diagonal of the matrix of A be a_1, b_2 and c_3. Then if we eliminate the three last quantities between the four equations obtained by writing down the weights

$$[A] = a_1 + b_2 + c_3, \; [AT] = a_1\beta_1 + b_2\beta_2 + c_3\beta_3, \; [AS] = \text{etc.}, \; [AS^2] = \text{etc.},$$

as in article 10, we get the equation

$$\begin{vmatrix} [A] & 1 & 1 & 1 \\ [AT] & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ [AS] & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ [AS^2] & \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 \end{vmatrix} = 0.$$

We shall apply the Lemma 1, and write 1 for every root whose index is a power of p. Then we have

$$\{[A]_p - [AT]_p\}(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_3 - \alpha_1) \equiv 0 \pmod{p}.$$

This congruence can be changed into the following

$$[A]_p - [AT]_p \equiv 0 \pmod{p},$$

by multiplying both sides by a suitable factor. Now, A being any substitution of G, this last congruence indicates an invariant subgroup H of the kind defined in article 14 for $p = 2$.

20. It is thus shown that, if G contains a substitution V of order $p^n q$, p and q being different primes > 2, and is to be primitive, then must the substitution V^{p^n}, when written in canonical form, be of the type:

$$V^{p^n} : x' = \alpha_1 x, \quad y' = \alpha_1 y, \quad z' = \alpha_2 z; \quad \alpha_1^q = \alpha_2^q = 1. \tag{7}$$

Again, if the order of G is divisible by 5^2 (or by 7^2), then G has an abelian subgroup of order 5^2 (or 7^2) (cf. art. 11) and must necessarily have a substitution of order 5 (or 7) of type (7). This we prove readily by constructing the different possible types of canonical groups of order 5^2 (or 7^2), omitting the cases where such groups contain substitutions of order 5^2 (or 7^2) (cf. art. 16).

Let us now consider a group G having a substitution S_1 of type (7). This substitution leaves invariant a point ($x = 0$, $y = 0$) and *every* straight line through it. Let S_2 be another substitution into which S_1 is transformed by a substitution of G; S_2 will also leave invariant a certain point (say $\bar{x} = 0$, $\bar{y} = 0$) and every straight line through that point. Therefore, the straight line joining the two points, ($x = 0$, $y = 0$) and ($\bar{x} = 0$, $\bar{y} = 0$), must be left invariant by both S_1 and S_2. Accordingly, S_1 and S_2 will generate an intransitive group (art. 2) say of type

$$x' = ax + by, \quad y' = cx + dy, \quad z' = ez. \tag{8}$$

The substitutions

$$x' = ax + by, \quad y' = cx + dy \tag{9}$$

will form a finite group in two variables.

21. Let S_1 be of order 7. A substitution of order 7, contained in a group of type (9), must be commutative with every substitution of the group (cf. art. 4). Hence, the substitutions S_1 and S_2 must be commutative with each other, as far as they are looked upon as transforming the variables x, y. But then it is readily seen from the form of (8) that they are completely commutative. Accordingly, all the substitutions $S_1, S_2, \cdots$, which are transformed one into the other by the substitutions of G, are mutually commutative, and will therefore generate an abelian

group, evidently contained invariantly in G. In this event G is not primitive (Theorem 2).

22. Let S_1 be of order 5. If S_1 and S_2 are not commutative, the group (9) generated by them must be the Icosahedral group 4^0, article (4). Among its substitutions are found the two, A, of order 3, written in canonical form, and B, a similarity-substitution of order 2:

$$A: x' = \omega x, \quad y' = \omega^2 y; \quad \omega^2 + \omega + 1 = 0;$$
$$B: x' = -x, \quad y' = -y.$$

The group (8) will then contain the substitutions

$$A_1: x' = \omega x, \quad y' = \omega^2 y, \quad z' = e_1 z;$$
$$B_1: x' = -x, \quad y' = -y, \quad z' = e_2 z.$$

The quantities e_1 and e_2 are 1 or are 5^{th} roots of unity, (8) being generated by substitutions of order 5. It is therefore allowed to put $e_1 = e_2 = 1$, which is equivalent to replacing A_1 and B_1 by their 5^{th} powers. But, A_1 and B_1 being commutative, we may call them S and T respectively and employ the reasoning of art. 19 to show that G has an invariant subgroup H. Hence, if G is to be primitive, S_1 and S_2 must be commutative. However, by following the reasoning of the latter half of article 21, we find that G cannot be primitive in this case either. Hence, finally, *a primitive group G can have no substitution of order 5 or 7 and of type (7).*

Constructing the different possible types of collineation-groups of order 3^3 allowed in a primitive group after article 16, we find that all such groups have a substitution T of the kind mentioned in Theorem 7. Now, by referring to the theorems 6, 7 and 8, we verify the following:

Theorem 9. *The order of a primitive group G is not divisible by $3^3 \cdot 5$, $3^3 \cdot 7$, 5^2, 7^2 nor by $5 \cdot 7$. The order is therefore a factor of one of the numbers $2^3 \cdot 3^3$, $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ or $2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$.*

V. Classification of the Primitive Groups.

A Primitive groups having invariant intransitive subgroups.

23. No such subgroup could be abelian (Theorem 2). If an intransitive group is not abelian, it has a single invariant point. This point must evidently be transformed into itself by any group G containing the given intransitive group invariantly, and such a group G could not be primitive (art. 2).

B. Primitive groups having invariant monomial subgroups.

Let G contain an invariant monomial subgroup K. This subgroup leaves invariant the triangle whose sides are $x=0$, $y=0$ and $z=0$. If this is the only triangle left invariant by K, then must G evidently leave that triangle invariant also. We therefore seek the form of a monomial group K leaving more than one triangle invariant, and yet not being intransitive. We readily find but one type for K, namely that generated by the substitutions:

$$\begin{cases} S: x' = y, \quad y' = z, \quad z' = x; \\ T: x' = x, \quad y' = \omega y, \quad z' = \omega^2 z, \quad \omega^2 + \omega + 1 = 0. \end{cases}$$

This group is of order 9 (as a collineation-group) and leaves invariant each of the four triangles:

$$t_1 = (x=0,\ y=0,\ z=0),$$

$$t_2, t_3, t_4 = (x+y+\theta z=0,\ x+\omega y+\theta\omega^2 z=0,\ x+\omega^2 y+\theta\omega z=0);$$

$$\theta = 1, \omega, \omega^2.$$

The primitive groups permuting among themselves these four triangles are generated by the substitutions

$$U = (t_2 t_3 t_4): x' = \varphi x, \quad y' = \varphi y, \quad z' = \varphi\omega z, \quad \varphi^3 = \omega^2;$$

$$V = (t_1 t_2)(t_3 t_4): x' = \varrho(x+y+z), \quad y' = \varrho(x+\omega y+\omega^2 z),$$

$$z' = \varrho(x+\omega^2 y+\omega z), \quad \varrho = \frac{1}{\omega - \omega^2};$$

$$UVU^{-1} = (t_1 t_4)(t_2 t_3): x' = \varrho(x+y+\omega^2 z), \quad y' = \varrho(x+\omega y+\omega z),$$

$$z' = \varrho(\omega x+y+\omega z);$$

as follows:

1°. The Hessian group of order 216*):

S and T of K, U and V.

2°. An invariant subgroup of the Hessian group, of order 72:

S, T, V and UVU^{-1}.

3°. An invariant subgroup of 2°, of order 36:

S, T and V.

These groups, when written as linear groups, all contain the group F of similarity-substitutions, and their orders as linear groups are therefore 648, 216 and 108 respectively.

*) Cf. Jordan, *Mémoire sur les équations différentielles linéaires à intégrale algébrique*, Journal für die reine und angewandte Mathematik, 84 (1878), p. 209.

C. Primitive groups isomorphic with abstract simple groups.

24. We found that the order of a primitive collineation-group was a factor of one of the numbers: $2^3 \cdot 3^3$, $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ and $2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$ (art. 22). The greatest of these numbers being 504, the question is therefore to determine all the primitive groups isomorphic with the four simple groups whose orders are not greater than this number; viz. the well known simple groups of orders 60, 168, 360 and 504 (art. 3).

There can be no group in three variables isomorphic with the simple group of order 504. For, this has an abelian subgroup of order 8, formed of 7 distinct substitutions of order 2 and the identical substitution.*) Attempting to write this subgroup in canonical form, we find it impossible as a group in three variables.

There is one, and only one, type of a primitive group isomorphic with each of the simple groups of orders 60 and 360 respectively, as shown by Maschke in Mathematische Annalen, Bd. 51 (1899), pp. 264—267. He derives the following types:

4°. A simple group of order 60, generated by the substitutions

$$E_1 : x' = y, \quad y' = z, \quad z' = x;$$

$$E_2 : x' = x, \quad y' = -y, \quad z' = -z;$$

$$E_3 : x' = \tfrac{1}{2}(-x + \mu_2 y + \mu_1 z), \quad y' = \tfrac{1}{2}(\mu_2 x + \mu_1 y - z),$$

$$z' = \tfrac{1}{2}(\mu_1 x - y + \mu_2 z),$$

$$\mu_1 = \alpha + \alpha^4 = \tfrac{1}{2}(-1 + \sqrt{5}), \quad \mu_2 = \alpha^2 + \alpha^3 = \tfrac{1}{2}(-1 - \sqrt{5}), \quad \alpha^5 = 1.$$

This group does not contain the group F of similarity-substitutions and is therefore of order 60 as a linear group. It is simply isomorphic with the alternating permutation-group in five letters a, b, c, d, e, and its generating substitutions can be identified with the following permutations:

$$E_1 = (abc), \quad E_2 = (ab)(cd), \quad E_3 = (ab)(de).$$

5°. A simple group of order 360 generated by**)

$$E_1, E_2 \text{ and } E_3 \text{ of } 4^0;$$

$$E_4 : x' = -x, \quad y' = -\omega z, \quad z' = -\omega^2 y, \quad \omega^2 + \omega + 1 = 0.$$

This group contains F and is therefore of order 1080 as a linear

*) See Burnside, *Theory of Groups*, p. 373.

**) See also Valentiner, *De endelige Transformations-Gruppers Theori*, Copenhagen, Videnskabernes Selkabs Skrifter, 6. Rekke (1889), p. 192.

group.*) It is simply isomorphic with the alternating group in six letters a, b, c, d, e, f:

$$E_1 = (abc), \quad E_2 = (ab)(cd), \quad E_3 = (ab)(de), \quad E_4 = (ab)(ef).$$

There is one, and only one type of a collineation-group simply isomorphic with the simple group of order 168, as shown by Weber in his Algebra, Bd. II, pp. (497—502) 2nd edition, 1899).**) This group is generated by the substitutions:

$$6^0.\ S: x' = \varepsilon x, \quad y' = \varepsilon^2 y, \quad z' = \varepsilon^4 x, \quad \varepsilon^7 = 1, \quad \varepsilon \neq 1;$$

$$T: x' = z, \quad y' = x, \quad z' = y;$$

$$U: x' = h(\alpha x + \beta y + \gamma z), \quad y' = h(\beta x + \gamma y + \alpha z), \quad z' = h(\gamma x + \alpha y + \beta z),$$

$$\alpha = \varepsilon^4 - \varepsilon^{-4}, \quad \beta = \varepsilon^2 - \varepsilon^{-2}, \quad \gamma = \varepsilon - \varepsilon^{-1},$$

$$h = \frac{1}{7}(\varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^4 - \varepsilon^{-1} - \varepsilon^{-2} - \varepsilon^{-4}) = \frac{1}{\sqrt{-7}}.$$

This group does not contain F and is therefore of order 168 as a linear group. We can represent the group as a permutation group in 7 letters a, b, c, d, e, f, g, in which case the generating substitutions given will appear in the forms

$$S_1 = (abcdefg), \quad T_1 = (abd)(cfe), \quad U_1 = (ab)(ce).$$

D. Primitive groups having primitive invariant subgroups.

We saw (art. 22) that the order of a primitive collineation group should be a factor of one of the numbers $2^3 \cdot 3^3$, $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ or $2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$. The groups 1^0 and 5^0 can therefore not be contained as subgroups in larger groups. The groups 2^0 and 3^0 have each a single invariant subgroup of order 9, namely the group K (art. 23). A group containing either 2^0 or 3^0 invariantly should therefore also leave K invariant, and could be none other than either 1^0 or 2^0. We find that 1^0 contains 2^0 invariantly, and 2^0 contains 3^0 invariantly.

Consider the group 4^0, of order $2^2 \cdot 3 \cdot 5$. A group G containing 4^0 invariantly must be of order $2^{2+a} \cdot 3^{1+b} \cdot 5$. Now, 4^0 has 10 subgroups of order 3, which must be permuted among themselves by the substitutions of G. Accordingly, there is in G a subgroup of order $2^{2+a} \cdot 3^{1+b} \cdot 5 : 10 = 2^{1+a} \cdot 3^{1+b}$, which transforms a given subgroup of 4^0 of order 3 into itself. Therefore, if $a > 0$, G contains a substitution of

*) That the linear group cannot be written without similarity-substitutions, is seen in the following manner. The simple G_{360} has an abelian subgroup of order 9, containing 8 substitutions of order 3. No such subgroup can be written in three variables directly as a linear group.

**) Cf. Klein, Mathematische Annalen, 14 (1878), p. 444.

order 2 commutative with a substitution of 4^0 of order 3. This is impossible, by Theorem 8. Hence, $a = 0$. Again, 4^0 has 6 subgroups of order 5. If $b > 0$, we would find in G a substitution of order 3 commutative with a substitution of order 5, which is likewise impossible by Theorem 8. Thus, the order of G is $2^3 \cdot 3 \cdot 5$, and $G = 4^0$.

Consider the group 6^0 of order $2^3 \cdot 3 \cdot 7$. A group G leaving this invariant should be of order $2^3 \cdot 3^{1+b} \cdot 7$. Now, 6^0 has 8 subgroups of order 7, and a substitution of order 3 which transforms a given substitution of order 7 into its 2^{nd} or 4^{th} power. If $b > 0$, G must contain a substitution of order 3 which is commutative with a substitution in 6^0 of order 7. But this is impossible by Theorem 8.

Über Flächenscharen, deren orthogonale Trajektorien ebene Kurven sind.

Von

Erich Mosch in Charlottenburg.

Die Untersuchungen von Flächenscharen haben sich bisher meist auf die dreifach orthogonalen Systeme bezogen; im folgenden soll auf eine Aufgabe eingegangen werden, die zuerst 1899 von der Académie de Toulouse gestellt wurde — soweit mir bekannt, ohne eine Beantwortung zu finden —: Flächenscharen zu untersuchen, deren orthogonale Trajektorien eben sind. Anfang 1905, als der erste Teil dieser Arbeit schon abgeschlossen war, erschienen in den Comptes Rendus zwei Noten von Carrus und Darboux*), die darin zu Resultaten gelangen, wie sie auf anderem Wege auch in der vorliegenden Arbeit erhalten werden. In einer weiteren Note (C. R., Band CXLIII, 1906) erledigt Carrus den in vorliegender Arbeit nicht behandelten Fall, daß die Flächenschar einem dreifach orthogonalen System angehört und orthogonale Trajektorien hat, deren Ebenen alle durch einen Punkt gehen. Schließlich ist noch ganz kürzlich in den *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse* (série 2, tome VIII, 1906) eine Arbeit von Goursat erschienen: *Sur les familles de surfaces à trajectoires orthogonales planes.* Leider habe ich mir diese Arbeit nicht verschaffen können.

In § 1 sollen einige allgemeine Resultate über die Trajektorien abgeleitet werden. Die dann erfolgende Wahl des Koordinatensystems nötigt zu einer Teilung, in § 2 wird die Theorie von Scharen nichtabwickelbarer Flächen in Angriff genommen, in § 3 werden einige einfache Beispiele dazu gegeben, worauf in § 4 auf die Theorie von Scharen abwickelbarer Flächen, insbesondere von Ebenen- und Kegelscharen eingegangen wird.

§ 1.

Allgemeines.

Es sei eine Schar von einfach unendlich vielen Flächen mit dem Flächenparameter ϱ gegeben durch

$$x = x(uv\varrho), \quad y = y(uv\varrho), \quad z = z(uv\varrho). \tag{1}$$

*) C. R., Band CXL, 23. Janvier 1905.

Bezeichnet man die Richtungscosinusse der Flächennormalen mit XYZ, so lauten die Differentialgleichungen der orthogonalen Trajektorien von (1):

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z} = dT, \tag{2}$$

wo dT das Linienelement einer Trajektorie ist. Die Bedingung dafür, daß die Trajektorien eben sind, lautet dann bekanntlich:

$$\Sigma \pm X dY d^2Z = 0, \tag{3}$$

wo die d Zuwüchse längs der Trajektorien bedeuten und mit Hilfe von (2) zu berechnen sind. Statt (3) kann man auch schreiben:

$$\Sigma dX d(YdZ - ZdY) = 0, \tag{4}$$

wo das Summenzeichen — wie stets im folgenden — eine durch zyklische Vertauschung entstehende Summe bedeutet. Nimmt man mit (4) zusammen:

$$\Sigma X d(YdZ - ZdY) \equiv 0,$$

so folgt weiter:

$$d(YdZ - ZdY) : d(ZdX - XdZ) : d(XdY - YdX)$$
$$= (YdZ - ZdY) : (ZdX - XdZ) : (XdY - YdX).$$

Ist also keine der Größen der rechten Seite Null, so können wir die Gleichung des Problems auch erhalten, indem wir eines der drei Verhältnisse

$$(YdZ - ZdY) : (ZdX - XdZ) : (XdY - YdX) \tag{5}$$

nach T differenzieren und das Resultat gleich Null setzen. Die drei Größen (5) sind übrigens den Richtungscosinussen der Trajektorienebenen proportional. Außerdem folgt, daß die Größen

$$\frac{YdZ - ZdY}{XdY - YdX} = c_1, \quad \frac{ZdX - XdZ}{XdY - YdX} = c_2 \tag{6}$$

längs der Trajektorien konstant, die Gleichungen (6) also die Gleichungen der ∞^2 Trajektorien sind. Fassen wir die Kurve $YdZ - ZdY = 0$, $XdY - YdX = 0$ (woraus $ZdX - XdZ = 0$ folgt), oder, was dasselbe ist, die Kurve $dX = dY = dZ = 0$ ins Auge, so sehen wir, daß c_1 und c_2 längs dieser Kurve unbestimmt werden, d. h. alle Trajektorien treffen sie. Betrachten wir noch den Krümmungsradius R_T einer Trajektorie:

$$\frac{1}{R_T^2} = \sum \left(\frac{d^2x}{dT^2}\right)^2 = \sum \left(\frac{dX}{dT}\right)^2 \tag{7}$$

so sehen wir, daß er für die Punkte jener Kurve $= \infty$ wird, die Trajektorien haben hier also Wendepunkte. Fassen wir zusammen, so haben wir den

Satz. *Hat man eine Flächenschar, deren orthogonale Trajektorien eben sind, so erhält man die Gleichungen der Trajektorien durch Differentiation. Alle Trajektorien treffen eine bestimmte Kurve und haben hier Wendepunkte.*

§ 2.

Scharen von nichtabwickelbaren Flächen.

Wir wählen jetzt die krummlinigen Koordinaten u, v und setzen noch voraus:

$$\sum \pm \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial \varrho} \not\equiv 0. \tag{8}$$

Ein Nullsetzen dieser Funktionaldeterminante liefert bekanntlich die Umhüllungsfläche der Schar (1). Wir wählen u und v so, daß diese beiden Kurvenscharen bei der Gaußschen Abbildung auf die Einheitskugel in die Schar der Meridiane und Parallelkreise übergehen, daß also das Linienelement auf der Einheitskugel die Form annimmt:

$$ds = du^2 + \sin^2 u\, dv^2. \tag{9}$$

Außerdem führen wir zur Bestimmung eines Flächenpunktes Weingartensche Ebenenkoordinaten ein, d. h. XYZ und den Abstand w der Tangentialebene vom Koordinatenanfang. Mit der Wahl dieser Koordinaten beschränken wir uns zunächst auf die Betrachtung von Scharen *nichtabwickelbarer* Flächen. Auf die *abwickelbaren* Flächen, die nicht mit Hilfe von Ebenenkoordinaten behandelt werden können, werden wir später (in § 4) eingehen. Dann genügen XYZ den folgenden Differentialgleichungen*):

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial u^2} = -\mathfrak{x},\quad \frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial u\,\partial v} = \operatorname{ctg} u \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial v},\quad \frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial v^2} = -\sin u \cos u \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u} - \sin^2 u \cdot \mathfrak{x}. \tag{10}$$

Als allgemeinste Werte für XYZ ergeben sich daraus folgende:

$$X = (\alpha_1 \sin v + \beta_1 \cos v)\sin u + \gamma_1 \cos u,\quad Y = \cdots,\quad Z = \cdots, \tag{11}$$

wo $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3\ \beta_1 \cdots \gamma_3$ Funktionen von ϱ sind und außerdem

$$\Sigma\alpha^2 = \Sigma\beta^2 = \Sigma\gamma^2 = 1,\quad \Sigma\alpha\beta = \Sigma\alpha\gamma = \Sigma\beta\gamma = 0 \text{ usw.}$$

ist. Weiter ist dann (Bianchi p. 140):

$$x = wX + \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial v},\quad y = \cdots,\quad z = \cdots. \tag{12}$$

Kennt man also auch noch w, so ist die Flächenschar bestimmt; das Problem wird demnach auf die Bestimmung dieser Funktion hinauskommen. Übrigens läßt sich leicht folgende geometrische Deutung der Koordinatenscharen u und v verifizieren:

Satz. *Schneidet man eine Fläche mit einer Schar paralleler Ebenen und verbindet immer solche Punkte, in denen die Fläche unter gleichem Winkel geschnitten wird, so erhält man ∞^1 Kurven auf der Fläche. Verbindet man jetzt weiter immer solche Punkte, in denen die Tangenten der Kurven der ersten Schar einander parallel sind, so liefert dies eine zweite*

*) S. z. B. Bianchi, Vorlesungen über Differentialgeometrie. Deutsch von Lukat. p. 122.

Schar von ∞^1 Kurven. Bei der sphärischen Abbildung gehen diese beiden Scharen in die Scharen der Parallelkreise und der Meridiane über; es sind also unsere Kurven u und v.

Wir spezialisieren unser Koordinatensystem noch, indem wir in (11):

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = \alpha_3 = 0, \quad \beta_2 = 1, \quad \beta_1 = \beta_3 = 0, \quad \gamma_3 = 1, \quad \gamma_1 = \gamma_2 = 0$$

setzen. Geometrisch bedeutet das, daß wir *alle* Flächen der Schar mit *derselben* Schar von Ebenen schneiden. Dann wird:

$$X = \sin u \sin v, \quad Y = \sin u \cos v, \quad Z = \cos u. \tag{13}$$

Ferner seien hier noch einige Formeln zusammengestellt, die später gebraucht werden. Sind EFG die Koeffizienten der ersten, $DD'D''$ die der zweiten Fundamentalform einer Fläche, r_1 und r_2 deren Hauptkrümmungsradien, so ist:

$$\begin{cases} D = -\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} - w, \quad D' = -\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} + \operatorname{ctg} u \frac{\partial w}{\partial v}, \\ D'' = -\frac{\partial^2 w}{\partial v^2} - \sin u \cos u \frac{\partial w}{\partial u} - \sin^2 u \cdot w. \end{cases} \tag{14}$$

$$E = D^2 + \frac{D'^2}{\sin^2 u}, \quad F = D'\left(D + \frac{D''}{\sin^2 u}\right), \quad G = D'^2 + \frac{D''^2}{\sin^2 u}, \tag{15}$$

$$r_1 + r_2 = -\left(D + \frac{D''}{\sin^2 u}\right), \quad r_1 \cdot r_2 = \frac{DD'' - D'^2}{\sin^2 u}, \tag{16}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial u} = -D\frac{\partial X}{\partial u} - \frac{D'}{\sin^2 u}\frac{\partial X}{\partial v}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = -D'\frac{\partial X}{\partial u} - \frac{D''}{\sin^2 u}\frac{\partial X}{\partial v}, \\ \frac{\partial x}{\partial \varrho} = X\frac{\partial w}{\partial \varrho} + \frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial \varrho} + \frac{1}{\sin^2 u}\frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial^2 w}{\partial v \partial \varrho}. \end{cases} \tag{17}$$

Wir betrachten jetzt die Gleichung (3) des Problems. Da XYZ nur von u und v abhängen, kann man (3) auch für die Einheitskugel deuten, deren Punkte ja durch XYZ gegeben sind. Hier bedeutet (3) nichts anderes als die Gleichung der ∞^2 größten Kreise, oder was dasselbe sagt, die Schar aller geodätischen Linien. Deren Gleichung lautet aber (Bianchi p. 154):

$$du\, d^2v - dv\, d^2u + 2 \operatorname{ctg} u\, du^2 dv + \sin u \cos u\, dv^3 = 0. \tag{18}$$

Das ist eine andere Form der Gleichung (3), zu der man auch durch Einsetzen der Werte $X dX d^2X \cdots$ in (3) hätte kommen können. Jetzt sind $du\, dv\, d^2u\, d^2v$ zu berechnen. Multipliziert man die drei Gleichungen:

$$\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv + \frac{\partial x}{\partial \varrho} d\varrho = X dT, \quad \cdots, \quad \cdots$$

der Reihe nach mit XYZ, $\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial Y}{\partial u}\frac{\partial Z}{\partial u}$, $\frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial Y}{\partial v}\frac{\partial Z}{\partial v}$ und addiert jedesmal, so erhält man wegen (17) und (9):

$$(19)\quad \frac{\partial w}{\partial \varrho}\,d\varrho = dT,\quad D\,du + D'\,dv = \frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial \varrho}\,d\varrho,\quad D'\,du + D''\,dv = \frac{\partial^2 w}{\partial v\,\partial \varrho}\,d\varrho,$$

oder statt der zwei letzten Gleichungen:

$$(20)\quad \begin{cases} \frac{\partial w}{\partial \varrho}(DD''-D'^2)\frac{du}{dT} = \quad D''\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial \varrho} - D'\frac{\partial^2 w}{\partial v\,\partial \varrho}, \\ \frac{\partial w}{\partial \varrho}(DD''-D'^2)\frac{dv}{dT} = -D'\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial \varrho} + D\frac{\partial^2 w}{\partial v\,\partial \varrho}. \end{cases}$$

$d^2u\,d^2v$ werden für das Folgende nicht gebraucht. Man übersieht aber leicht, daß (18) eine partielle Differentialgleichung 3. Ordnung für w wird. Betrachten wir jetzt (18). Man kann diese Gleichung, vorausgesetzt, daß $du \neq 0$ ist, auch schreiben:

$$(21)\quad \frac{d}{du}\frac{dv}{du} + 2\operatorname{ctg} u\,\frac{dv}{du} + \sin u\cos u\left(\frac{dv}{du}\right)^3 = 0$$

und hieraus folgt

$$(22)\quad \frac{dv}{du} = \frac{1}{\sin u\sqrt{C\sin^2 u - 1}}$$

und weiter:

$$(23)\quad v = -\frac{1}{2}\arcsin\left[\frac{2}{(C-1)\sin^2 u} - \frac{C+1}{C-1}\right] + C',$$

wo C und C' zwei Funktionen sind, die längs der einzelnen Trajektorien invariant bleiben. Für C und C' ergeben sich die Werte:

$$(24)\quad C = \frac{du^2 + \sin^2 u\,dv^2}{\sin^4 u\,dv^2},\quad C' = v + \frac{1}{2}\arcsin\frac{\sin^2 u\cos^2 u\,dv^2 - du^2}{\sin^2 u\cos^2 u\,dv^2 + du^2}.$$

Setzt man für du und dv ihre Werte aus (20) ein, führt außerdem statt C und C' die Funktionen Θ und Λ ein durch:

$$(25)\quad C = \frac{1}{\cos^2\Theta},\quad C' = \frac{\pi}{4} - \Lambda,$$

so erhält man für Θ und Λ die Ausdrücke:

$$(26)\quad \begin{cases} \frac{1}{\cos^2\Theta} = \dfrac{G\left(\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial \varrho}\right)^2 - 2F\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial \varrho}\frac{\partial^2 w}{\partial v\,\partial \varrho} + E\left(\frac{\partial^2 w}{\partial v\,\partial \varrho}\right)^2}{\sin^2 u\left(D\frac{\partial^2 w}{\partial v\,\partial \varrho} - D'\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial \varrho}\right)^2}, \\ \operatorname{tg}(v+\Lambda) = \dfrac{D''\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial \varrho} - D'\frac{\partial^2 w}{\partial v\,\partial \varrho}}{\sin u\cos u\left(-D'\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial \varrho} + D\frac{\partial^2 w}{\partial v\,\partial \varrho}\right)}. \end{cases}$$

Wir hatten schon in (6) zwei Funktionen c_1 und c_2 gefunden, die längs der Trajektorien sich nicht änderten. c_1 und c_2 stehen mit Θ und Λ in dem folgenden Zusammenhang, den man leicht durch Rechnung verifiziert:

$$(27)\qquad \begin{cases} \operatorname{tg}\Lambda = -\frac{c_1}{c_2}, & c_1 = \sin\Lambda \operatorname{tg}\Theta, \\ \operatorname{tg}\Theta = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}, & c_2 = -\cos\Lambda \operatorname{tg}\Theta. \end{cases}$$

Da außerdem $c_1 c_2 1$ den Richtungscosinussen der Trajektorienebenen proportional sind, also $c_1 X + c_2 Y + Z = 0$ ist, so besteht die Relation:

$$(28)\qquad \operatorname{tg}\Theta \cos(v+\Lambda) = \cos u.$$

Aus der Form von (26) kann man wieder den in § 1 bewiesenen Satz ableiten, daß alle Trajektorien eine Kurve treffen, nämlich die durch die Gleichungen

$$(29)\qquad \frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial\varrho} = \frac{\partial^2 w}{\partial v\,\partial\varrho} = 0$$

gegebene, und in den Punkten dieser Kurve Wendepunkte haben.

Wir gehen jetzt zu den Ebenen der ∞^2 Trajektorien über. Die Richtungscosinusse ihrer Normalen sind ja wegen (27) proportional

$$\sin\Lambda, \quad -\cos\Lambda, \quad \operatorname{ctg}\Theta.$$

Bedeutet also $\xi\eta\zeta$ den laufenden, xyz einen festen Punkt einer Trajektorienebene, so lautet die Gleichung dieser ∞^2 Ebenen:

$$(30)\qquad \xi\sin\Lambda - \eta\cos\Lambda + \zeta\operatorname{ctg}\Theta = x\sin\Lambda - y\cos\Lambda + z\operatorname{ctg}\Theta.$$

An sich enthalten xyz alle drei Variabeln $uv\varrho$; da es aber nur ∞^2 Ebenen geben darf — jede einzelne ist durch je einen Wert von Θ und Λ bestimmt — so muß die rechte Seite eine Funktion von Θ und Λ allein sein. Also:

$$(31)\qquad x\sin\Lambda - y\cos\Lambda + z\operatorname{ctg}\Theta = f(\Lambda\Theta).$$

Denkt man sich hierin für $\Theta\Lambda xyz$ ihre Werte eingesetzt, so kommen von w nur die Differentialquotienten bis zur 2. Ordnung vor; außerdem enthält die Gleichung eine willkürliche Funktion f. Wir haben damit den

Satz. *Die Gleichung* (31) *ist eine Integralgleichung 2. Ordnung der allgemeinen Gleichung 3. Ordnung des Problems.*

§ 3.

Beispiele.

I) Wir stellen uns zunächst die Aufgabe, alle Kugelscharen zu finden, deren orthogonale Trajektorien eben sind. Aus der geometrischen Bedeutung von u und v folgt, daß diese Kurvenscharen in unserem Fall Krümmungslinien sind, daß also, wenn durch $R(\varrho)$ die Kugelradien gegeben sind, $D' = 0$, ferner wegen (16)

$$D = -R(\varrho), \qquad D'' = -R\sin^2 u$$

ist. Aus (14) und (12) folgt dann für w, xyz:

$$(32)\qquad \begin{cases} w = R + [\alpha(\varrho)\sin v + \beta(\varrho)\cos v]\sin u + \gamma(\varrho)\cos u, \\ x = \alpha(\varrho) + R\sin u\sin v, \\ y = \beta(\varrho) + R\sin u\cos v, \\ z = \gamma(\varrho) + R\cos u. \end{cases}$$

Aus (20) ergibt sich durch Einsetzen der Werte von $DD'D''$:

$$\frac{du}{dv} = \sin^2 u \,\frac{\dfrac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial\varrho}}{\dfrac{\partial^2 w}{\partial v\,\partial\varrho}}$$

und hieraus:

$$dv\,d^2u - du\,d^2v = 2\operatorname{ctg} u\,du^2\,dv + \sin^2 u\,dv^2\,d\,\frac{\dfrac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial\varrho}}{\dfrac{\partial^2 w}{\partial v\,\partial\varrho}}.$$

Die Differentialgleichung (18) wird damit zu

$$dv^2\left[d\,\frac{\dfrac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial\varrho}}{\dfrac{\partial^2 w}{\partial v\,\partial\varrho}} - \operatorname{ctg} u\,dv\right] = 0.$$

Lassen wir zunächst den Fall $dv = 0$ beiseite, so vereinfacht sich die entstandene Gleichung nach der Differentiation und durch Einsetzen der sich aus (14) ergebenden dritten Differentialquotienten:

$$\frac{\partial^3 w}{\partial u^2\,\partial\varrho} = R' - \frac{\partial w}{\partial\varrho}, \qquad \frac{\partial^3 w}{\partial u\,\partial v\,\partial\varrho} = \operatorname{ctg} u\,\frac{\partial^2 w}{\partial v\,\partial\varrho},$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial v^2\,\partial\varrho} = R'\sin^2 u - \sin u\cos u\,\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial\varrho} - \sin^2 u\,\frac{\partial w}{\partial\varrho}$$

zu:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial v\,\partial\varrho}\,\frac{\partial^3 w}{\partial u\,\partial\varrho^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial\varrho}\,\frac{\partial^3 w}{\partial v\,\partial\varrho^2} = 0.$$

Diese Gleichung sagt aus, daß das Verhältnis $\dfrac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial\varrho} : \dfrac{\partial^2 w}{\partial v\,\partial\varrho}$ frei von ϱ sein muß, d. h. wegen (32), daß

$$\frac{(\alpha'\sin v + \beta'\cos v)\cos u - \gamma'\sin u}{(\alpha'\cos v - \beta'\sin v)\sin u}$$

ϱ nicht enthalten darf. Dies führt auf folgende Werte für $\alpha\beta\gamma$:

$$\alpha = a_1\varepsilon(\varrho) + a_2, \quad \beta = b_1\varepsilon(\varrho) + b_2, \quad \gamma = c_1\varepsilon(\varrho) + c_2,$$

wo die abc Konstanten sind. Die Gleichungen der *Kurve der Mittelpunkte*

$$x = \alpha, \quad y = \beta, \quad z = \gamma$$

zeigen dann, daß diese Kurve *eine Gerade* ist. — Der vorhin ausgeschlossene Fall $dv = 0$ ergibt wegen (20) $\frac{\partial^2 w}{\partial v \partial \varrho} = 0$ und wegen (32)

$$\alpha' \sin v + \beta' \cos v = 0$$

d. h. $\alpha' = \beta' = 0$. α und β müssen Konstante sein. Die Kurve der Kugelmittelpunkte ist eine der x-Achse parallele Gerade. Wir haben also den

Satz. *Eine Kugelschar hat nur dann ebene orthogonale Trajektorien, wenn die Kugelmittelpunkte auf einer Geraden liegen; die Größe des Kugelradius kann sich dabei nach einem willkürlichen Gesetze ändern.*

Die Gestalt der Trajektorien ist in diesem Falle besonders einfach. Um sie zu übersehen, nehme man eine Schar von Kreisen, deren Mittelpunkte auf einer Geraden liegen, und konstruiere deren orthogonale Trajektorien. Man erhält Kurven, deren jede auf der Umhüllungskurve der Kreisschar eine Spitze hat, deren Verlauf im übrigen von der Funktion $R(\varrho)$ abhängt und die die Gerade der Kreismittelpunkte als Asymptote haben. Im Falle gleich großer Radien ist jede Trajektorie eine Tractrix.

II) Als zweites Beispiel wählen wir den Fall, in dem die Trajektorienebenen alle einer festen Geraden, etwa der x-Achse, parallel sind. Dann ist Θ wegen seiner geometrischen Bedeutung $= \frac{\pi}{2}$ (vgl. (30)), außerdem wegen (28) $\Lambda = \frac{\pi}{2} - v$ und wegen (26):

$$D' \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial \varrho} - D \frac{\partial^2 w}{\partial v \partial \varrho} = 0. \tag{33}$$

Statt (33) kann man wegen (20) auch schreiben $dv = 0$, d. h. v ist längs der Trajektorien konstant. Die Hauptgleichung (18) ist mit $dv = 0$ erfüllt, so daß wir es nur mit (33) zu tun haben. Diese Gleichung wandelt man mit Benutzung von (17) und (12) leicht in die folgende um:

$$w \cos u - \frac{\partial w}{\partial u} \sin u = \Phi\left(\frac{\partial w}{\partial \varrho}, \varrho\right), \tag{34}$$

wo Φ eine willkürliche Funktion ihrer Argumente ist. Von der Integration dieser Gleichung 1. Ordnung hängt die Lösung des Problems ab. Die Gleichung ist allgemein nicht integrierbar. Es seien aber noch einige Eigenschaften der betreffenden Flächenscharen angezeigt. Zunächst können auch hier, wenn auch die Größen Θ und Λ versagen, die Gleichungen der Trajektorien in endlicher Form gegeben werden. Erstens ist für dieselben $v = c_1$, zweitens folgt aus der Gleichung der Trajektorien, die in diesem Fall, wie leicht zu übersehen,

$$\xi \cos v - \eta \sin v = x \cos v - y \sin v \tag{35}$$

heißt, durch Einsetzen der Werte aus (12) und unter Berücksichtigung des Umstandes, daß es nur ∞^2 Trajektorienebenen gibt, daß

$$v = c_1, \quad \frac{1}{\sin u}\frac{\partial w}{\partial v} = c_2 \tag{36}$$

die gesuchten Gleichungen der Trajektorien sind.

Eine andere nicht ganz einfache Eigenschaft, die leicht zu verifizieren ist, ist die folgende: Die Flächenschar $v = c_1$ schneidet jede der Flächen ϱ in ∞^1 Kurven $\delta v = 0$. Die ∞^2 Trajektorienebenen andererseits bestimmen in jedem Flächenpunkte eine Fortschreitungsrichtung und man erhält so ∞^1 Kurven $D'\delta u + D''\delta v = 0$. Bezeichnet man den Winkel, unter dem sich zwei Kurven dieser beiden Scharen in einem Flächenpunkte treffen, mit ϑ, die beiden Normalkrümmungen der beiden Kurven mit $\frac{1}{\varrho_1}$ und $\frac{1}{\varrho_2}$, die Totalkrümmung und mittlere Krümmung der Fläche in jenem Punkte mit K und H, so besteht die Beziehung:

$$(H - K\varrho_1 \cos^2\vartheta)\varrho_2 = 1.$$

Schließlich kann man leicht folgende Eigenschaft ableiten:

Satz. *Die Umhüllungsfläche der Flächen ϱ berührt die Flächen nach ebenen Kurven, deren Ebenen senkrecht auf der z-Achse stehen.*

In einem Falle läßt sich die eben behandelte Aufgabe ganz durchführen: wenn die Schar der Trajektorienebenen sich auf eine einfach unendliche reduziert. Dann ist offenbar wegen (36), wenn φ eine willkürliche Funktion von v ist:

$$\frac{1}{\sin u}\frac{\partial w}{\partial v} = \varphi(v). \tag{37}$$

Hieraus folgt durch Differentiation nach ϱ und u:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial v\,\partial \varrho} = 0, \qquad \operatorname{ctg} u\frac{\partial w}{\partial v} - \frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v} = D' = 0, \tag{38}$$

Aus $D' = 0$ folgt wegen (15) noch $F = 0$, d. h. die Kurven u und v sind Krümmungslinien. Andererseits sind die Schnitte der Ebenen senkrecht zur z-Achse mit den Flächen ϱ gegeben durch $\delta z = 0$, oder, entwickelt, wegen (17) $\delta u = 0$, das sind aber die Krümmungslinien der einen Schar. *Die Flächen haben also eine Schar Krümmungslinien in parallelen Ebenen.* Aus (37) folgt noch:

$$w = \psi(v)\sin u + \chi(u\varrho), \tag{39}$$

wo $\psi(v) = \int \varphi(v)\,dv$ gesetzt ist. Um die Form und Lage der Trajektorien zu untersuchen, beachten wir, daß deren Ebenen

$$\xi\cos v - \eta\sin v = \psi'(v) \tag{40}$$

einen Zylinder umhüllen, dessen Gleichungen aus (40) sich in der Form ergeben:

$$\begin{cases} \xi = \quad \psi'\cos v - \psi''\sin v, \\ \eta = -\psi'\sin v - \psi''\cos v. \end{cases} \tag{41}$$

Diese Gleichungen geben zugleich die Form der Leitkurve des Zylinders in der $\xi\eta$-Ebene an. Das Linienelement $d\sigma$ dieser Kurve ist:

$$d\sigma = -(\psi' + \psi''')dv. \tag{42}$$

Die Flächen der Schar sind dargestellt durch:

$$\begin{cases} x = \psi \sin v + \psi' \cos v + \left(\chi \sin u + \dfrac{\partial \chi}{\partial u} \cos u\right) \sin v, \\ y = \psi \cos v - \psi' \sin v - \left(\chi \sin u + \dfrac{\partial \chi}{\partial u} \cos u\right) \cos v, \\ z = \chi \cos u - \dfrac{\partial \chi}{\partial u} \sin u, \end{cases} \tag{43}$$

wo ψ und χ beliebige Funktionen ihrer Argumente sind. Andererseits kann man (43) auch als die Gleichungen der Trajektorien betrachten, jeder Wert $v = c_1$ liefert eine Trajektorie. Um darüber Aufschluß zu gewinnen, wie die Trajektorien in den Ebenen verteilt sind, greifen wir eine solche Ebene heraus und führen ein neues Koordinatensystem ein. Als $\mathfrak{z}$-Achse wählen wir die Gerade, längs deren die Ebene den Zylinder (41) berührt, als $\mathfrak{y}\mathfrak{z}$-Ebene die Trajektorienebene selbst. Nach der Transformation erhält man die Gleichungen der Trajektorien in der Form:

$$\begin{aligned} \mathfrak{x} &= 0, \\ \mathfrak{y} &= \psi + \psi'' + \chi \sin u + \frac{\partial \chi}{\partial u} \cos u, \\ \mathfrak{z} &= \chi \cos u - \frac{\partial \chi}{\partial u} \sin u. \end{aligned}$$

Beachtet man, daß $\mathfrak{z}$ für alle Trajektorienebenen dieselbe Funktion von u und ϱ ist, da es von v unabhängig ist, beachtet man weiter, daß $\mathfrak{y} + \sigma$ wegen (42) auch von v frei ist, so erhält man das Resultat, daß die Kurven aller Ebenen kongruent sind, sowie, daß die Kurven einer Ebene mit denen aller andern dadurch zur Deckung gebracht werden können, daß man ihre Ebene auf dem Zylinder rollen läßt. Wendet man jetzt noch einen bekannten Satz von Ribaucour über die Umhüllungsfläche der Trajektorienebenen an*), so kann man den umhüllenden Zylinder durch eine beliebige abwickelbare Fläche ersetzen und hat damit den

Satz. *Nimmt man eine beliebige abwickelbare Fläche, konstruiert in einer ihrer Tangentialebenen eine einfach unendliche Kurvenschar und läßt die Tangentialebene samt der Kurvenschar auf der Abwickelbaren rollen, so sind die so erzeugten doppelt unendlich vielen Kurven die orthogonalen Trajektorien einer Flächenschar.*

*) s. z. B. von Lilienthal, „Grundlagen einer Krümmungstheorie der Kurvenscharen", p. 58.

§ 4.

Scharen von abwickelbaren Flächen.

Im vorhergehenden konnten infolge der Benutzung von Ebenenkoordinaten nur *nichtabwickelbare* Flächen betrachtet werden. Die dadurch entstandene Lücke wollen wir jetzt ausfüllen und nach Scharen von *Abwickelbaren* fragen, deren orthogonale Trajektorien eben sind.

I) *Ebenenscharen.* Die orthogonalen Trajektorien einer Ebenenschar

$$a_1(\varrho)x + a_2(\varrho)y + a_3(\varrho)z = a_4(\varrho), \quad a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$$

sind gegeben durch

$$\frac{dx}{a_1} = \frac{dy}{a_2} = \frac{dz}{a_3} = dT.$$

Damit die Trajektorien eben sind, muß $\sum \pm \frac{dx}{dT}\frac{d^2y}{dT^2}\frac{d^3z}{dT^3} = 0$ sein. Die Bedingung kommt, wie leicht einzusehen, auf die folgende hinaus:

$$\Sigma \pm a_1 a_2' a_3'' = 0.$$

Setzt man

$$a_1 = \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2+\mu^2}}, \quad a_2 = \frac{\mu}{\sqrt{1+\lambda^2+\mu^2}}, \quad a_3 = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2+\mu^2}},$$

so nimmt obige Determinantengleichung die Form an:

$$\lambda'\mu'' - \mu'\lambda'' = 0$$

und liefert

$$\lambda = c_1 v(\varrho) + k_1, \qquad \mu = c_2 v(\varrho) + k_2.$$

Die Gleichung der Ebenenschar wird damit

$$(c_1 v + k_1)x + (c_2 v + k_2)y + z = a_4\sqrt{1 + (c_1 v + k_1)^2 + (c_2 v + k_2)^2}.$$

Als Umhüllungsfläche dieser Ebenenschar findet man einen Zylinder. Da auch umgekehrt klar ist, daß eine Ebenenschar, die einen Zylinder umhüllt, ebene orthogonale Trajektorien hat, haben wir den

Satz. *Eine Ebenenschar hat dann und nur dann ebene orthogonale Trajektorien, wenn die Ebenen der Schar einen Zylinder umhüllen.*

II) *Kegelscharen.* Eine Schar von Kegelflächen sei durch die Gleichungen gegeben:

$$(1) \qquad \begin{cases} x = p(\varrho) + ul(v\varrho), \\ y = q(\varrho) + um(v\varrho), \\ z = r(\varrho) + un(v\varrho). \end{cases}$$

Die Funktionen $pl\cdots$ können unbeschadet der Allgemeinheit so gewählt werden, daß

$$(2) \qquad \Sigma p'^2 = 1, \qquad \Sigma l^2 = 1, \qquad \Sigma L^2 = 1$$

ist, wo $L = \frac{\partial l}{\partial v}\cdots$ gesetzt ist. Dann bedeuten die Gleichungen

$$(3) \qquad x = p(\varrho), \qquad y = q(\varrho), \qquad z = r(\varrho)$$

die Kurve der Kegelspitzen, ϱ den Bogen dieser Kurve, $l\,m\,n$ die Richtungscosinusse der Erzeugenden der Kegel; endlich liefert $u = 1$ für jeden bestimmten Kegel ϱ die Kurve, deren Punkte um die Einheit von der Kegelspitze entfernt auf den erzeugenden Geraden liegen, v ist der Bogen dieser Kurve.

Für die Richtungscosinusse der Kegelnormalen hat man

$$X = mN - nM, \quad \cdots, \quad \cdots, \tag{4}$$

und die Bedingungsgleichung dafür, daß wir es mit ebenen orthogonalen Trajektorien zu tun haben:

$$\Sigma dX\, d(YdZ - ZdY) = 0,$$

nimmt nach Einsetzen der Werte von XdX usw. und gehöriger Vereinfachung unter Berücksichtigung von (2) und den sich aus (2) durch Differentiation ergebenden Formeln die Gestalt an:

$$\Sigma(dl\,d^2L - dL\,d^2l) + \Sigma L dl[3(\Sigma dL^2 + \Sigma dl^2) - 4(\Sigma L dl)^2] = 0. \tag{5}$$

Führt man die Differentiationen weiter aus, so erhält man eine Gleichung von der Form

$$F_0(d\varrho\, d^2v - dv\, d^2\varrho) + F_1 dv^3 + F_2 dv^2 d\varrho + F_3 dv\, d\varrho^2 + F_4 d\varrho^3 = 0, \tag{6}$$

worin

$$\left\{\begin{aligned}
F_0 &= \sum \frac{\partial L}{\partial v}\frac{\partial l}{\partial \varrho}, \qquad F_1 = \sum\left(\frac{\partial L}{\partial v}\right)^2 - 1,\\
F_2 &= \sum \frac{\partial l}{\partial \varrho}\frac{\partial^2 L}{\partial v^2} + \sum \frac{\partial L}{\partial v}\frac{\partial L}{\partial \varrho} + 3\sum L\frac{\partial l}{\partial \varrho}\Big[\sum\left(\frac{\partial L}{\partial v}\right)^2 - 1\Big],\\
F_3 &= 2\sum \frac{\partial l}{\partial \varrho}\frac{\partial^2 L}{\partial v\,\partial \varrho} - \sum \frac{\partial L}{\partial v}\frac{\partial^2 l}{\partial \varrho^2} + 6\sum L\frac{\partial l}{\partial \varrho}\sum \frac{\partial L}{\partial v}\frac{\partial L}{\partial \varrho}\\
&\qquad - 6\Big(\sum L\frac{\partial l}{\partial \varrho}\Big)^2 + 3\sum\left(\frac{\partial l}{\partial \varrho}\right)^2,\\
F_4 &= \sum \frac{\partial l}{\partial \varrho}\frac{\partial^2 L}{\partial \varrho^2} - \sum \frac{\partial L}{\partial \varrho}\frac{\partial^2 l}{\partial \varrho^2} + \sum L\frac{\partial l}{\partial \varrho}\Big[3\sum\left(\frac{\partial L}{\partial \varrho}\right)^2 + 3\sum\left(\frac{\partial l}{\partial \varrho}\right)^2\\
&\qquad - 4\Big(\sum L\frac{\partial l}{\partial \varrho}\Big)^2\Big]
\end{aligned}\right. \tag{7}$$

zu setzen ist.

Für $du\,dv\,d\varrho$ findet man aus den Gleichungen

$$dx = (mN - nM)dT \text{ usw.},$$

da

$$\frac{\partial x}{\partial u} = l, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = uL, \quad \frac{\partial x}{\partial \varrho} = p' + u\frac{\partial l}{\partial \varrho} \tag{8}$$

ist:

$$du = -\Sigma l p'\, d\varrho, \quad dv = -\Big(\frac{1}{u}\sum Lp' + \sum L\frac{\partial l}{\partial \varrho}\Big)d\varrho \tag{9}$$

und hieraus:

$$(10)\quad \begin{cases} d\varrho\, d^2v - dv\, d^2\varrho = -\frac{1}{u^2}\sum Lp' \sum lp'\, d\varrho^3 - \frac{1}{u}\Big(\sum p' \frac{\partial L}{\partial v}\, dv + \sum p' \frac{\partial L}{\partial \varrho}\, d\varrho \\ \quad + \sum Lp''\, d\varrho\Big) d\varrho^2 - \Big(\sum L \frac{\partial^2 l}{\partial \varrho^2} d\varrho + \sum \frac{\partial l}{\partial \varrho}\frac{\partial L}{\partial v}\, dv + \sum \frac{\partial l}{\partial \varrho}\frac{\partial L}{\partial \varrho}\, d\varrho\Big) d\varrho^2. \end{cases}$$

Durch Einsetzen von (9) und (10) in (6) erhält diese Gleichung die Gestalt:

$$(11)\qquad \frac{f_0}{u^3} + \frac{f_1}{u^2} + \frac{f_2}{u} + f_3 = 0,$$

worin

$$f_0 = -F_1(\Sigma Lp')^3,$$

$$f_1 = \sum Lp'\Big[F_0\Big(\sum p' \frac{\partial L}{\partial v} - \sum Lp'\Big) - 3F_1 \sum Lp' \sum L \frac{\partial l}{\partial \varrho} + F_2 \sum Lp'\Big],$$

$$f_2 = F_0\Big(\sum L \frac{\partial l}{\partial \varrho} \sum p' \frac{\partial L}{\partial v} - \sum p' \frac{\partial L}{\partial \varrho} - \sum Lp'' + \sum Lp' \sum \frac{\partial l}{\partial \varrho}\frac{\partial L}{\partial v}\Big) - 3F_1 \sum Lp' \Big(\sum L \frac{\partial l}{\partial \varrho}\Big)^2 + 2F_2 \sum Lp' \sum L \frac{\partial l}{\partial \varrho} - F_3 \sum Lp',$$

$$f_3 = F_0\Big(-\sum L \frac{\partial^2 l}{\partial \varrho^2} + \sum L \frac{\partial l}{\partial \varrho} \sum \frac{\partial l}{\partial \varrho}\frac{\partial L}{\partial v} - \sum \frac{\partial l}{\partial \varrho}\frac{\partial L}{\partial \varrho}\Big) - F_1\Big(\sum L \frac{\partial l}{\partial \varrho}\Big)^3 + F_2\Big(\sum L \frac{\partial l}{\partial \varrho}\Big)^2 - F_3 \sum L \frac{\partial l}{\partial \varrho} + F_4$$

ist. Da die Funktionen f die Variable u gar nicht enthalten, muß wegen (11) einzeln:

$$f_0 = f_1 = f_2 = f_3 = 0$$

sein. Betrachten wir zunächst $f_0 = 0$. Das bedeutet entweder $F_1 = 0$ oder $\Sigma Lp' = 0$.

A) $F_1 = 0$. Aus (7) folgt dann $\sum \Big(\frac{\partial L}{\partial v}\Big)^2 = 1$. Dann ist aber, da $\Sigma lL = 0$, also

$$\sum l \frac{\partial L}{\partial v} = -\sum L^2 = -1$$

ist:

$$\sum \Big(m \frac{\partial N}{\partial v} - n \frac{\partial M}{\partial v}\Big)^2 = \sum l^2 \sum \Big(\frac{\partial L}{\partial v}\Big)^2 - \Big(\sum l \frac{\partial L}{\partial v}\Big)^2 = 0,$$

d. h.:

$$(12)\qquad l = -\frac{\partial L}{\partial v}, \ \ldots, \ \ldots.$$

Betrachten wir nun eine Kurve $u = \text{const.}$ eines Kegels ϱ, also eine Leitlinie. Für sie ist:

$$x = p + ul, \ \ldots, \ \ldots$$

ferner

$$x' = L, \quad x'' = \frac{1}{u}\frac{\partial L}{\partial v}, \quad x''' = \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 L}{\partial v^2},$$

und wir erhalten für ihren Krümmungsradius k und ihre Torsion T:

$$\frac{1}{k^2} = \frac{1}{u^2}\sum\left(\frac{\partial L}{\partial v}\right)^2 = \frac{1}{u^2}, \qquad T = \frac{\left|L\,\frac{\partial L}{\partial v}\,\frac{\partial^2 L}{\partial v^2}\right|}{u\sum\left(\frac{\partial L}{\partial v}\right)^2}. \tag{13}$$

k ist konstant, T ist wegen (12) Null; wir haben es also mit einer Schar gerader Kreiskegel zu tun. Den halben Öffnungswinkel σ eines dieser Kegel erhält man aus:

$$\sin\sigma = \frac{k}{u}. \tag{14}$$

Also ist wegen (13) $\sigma = \frac{\pi}{2}$; *die Kegel arten in Ebenen aus*, wir kommen auf den oben schon erledigten Fall der Ebenenschar.

B) $\sum Lp' = 0$. Da dann auch $\sum p'\frac{\partial L}{\partial v} = 0$ und $\sum Lp'' + \sum p'\frac{\partial L}{\partial \varrho} = 0$ ist, so werden f_1 und f_2 identisch Null; es bleibt nur noch

$$f_3 = 0$$

zu betrachten übrig. Zunächst sei noch folgendes bemerkt: Aus

$$\sum Lp' = 0, \qquad \sum \frac{\partial L}{\partial v}\,p' = 0$$

folgt:

$$p' = \frac{M\frac{\partial N}{\partial v} - N\frac{\partial M}{\partial v}}{\sqrt{\sum\left(\frac{\partial L}{\partial v}\right)^2}}, \quad \ldots, \quad \ldots. \tag{15}$$

Andrerseits folgt aus $\sum Ll = 0$, $\sum L\frac{\partial L}{\partial v} = 0$:

$$L = \frac{m\frac{\partial N}{\partial v} - n\frac{\partial M}{\partial v}}{\sqrt{\sum\left(\frac{\partial L}{\partial v}\right)^2 - 1}}, \quad \ldots, \quad \ldots$$

und hieraus nach Multiplikation mit LMN und Addition:

$$\left|l\;L\;\frac{\partial L}{\partial v}\right| = -\sqrt{\sum\left(\frac{\partial L}{\partial v}\right)^2 - 1}. \tag{16}$$

Aus $\Sigma Lp' = 0$ folgt weiter $\Sigma lp' = \varphi(\varrho)$, also mit Rücksicht auf (15), (16):

$$-\sqrt{\sum\left(\frac{\partial L}{\partial v}\right)^2 - 1} = \varphi(\varrho)\sqrt{\sum\left(\frac{\partial L}{\partial v}\right)^2}$$

oder:

$$\sum\left(\frac{\partial L}{\partial v}\right)^2 = \frac{1}{1-\varphi^2(\varrho)} = \psi^2(\varrho). \tag{17}$$

Aus (15) ergibt sich dann durch Differentiation nach v, wie leicht zu übersehen:

$$L = \frac{\frac{\partial^2 L}{\partial v^2}}{\sqrt{\sum\left(\frac{\partial^2 L}{\partial^2 v}\right)^2}}, \quad \ldots, \quad \ldots. \tag{18}$$

Durch Multiplikation dieser Werte mit LMN und Addition erhält man, da $\sum L\frac{\partial^2 L}{\partial v^2} = -\sum\left(\frac{\partial L}{\partial v}\right)^2$ ist:

$$\sqrt{\sum\left(\frac{\partial^2 L}{\partial v^2}\right)^2} = -\psi^2,$$

und wegen (18) sind also LMN durch die Differentialgleichungen bestimmt:

$$L\psi^2(\varrho) + \frac{\partial^2 L}{\partial v^2} = 0, \quad \cdots, \quad \cdots. \tag{19}$$

Die allgemeinsten Lösungen derselben sind:

$$l = -\frac{A_1}{\psi}\cos(\psi v) + \frac{B_1}{\psi}\sin(\psi v) + C_1, \quad \cdots, \quad \cdots. \tag{20}$$

Die ABC, die Funktionen von ϱ sind, genügen dabei wegen der zwischen l und seinen Ableitungen bestehenden Formeln den Beziehungen:

$$\Sigma A^2 = \Sigma B^2 = 1, \quad \Sigma AB = \Sigma AC = \Sigma BC = 0, \quad \Sigma C^2 = \frac{\psi^2 - 1}{\psi^2}. \tag{21}$$

Setzt man jetzt die Werte für lmn in die Gleichung $f_3 = 0$ ein, vereinfacht gehörig und führt zur Abkürzung noch die Funktionen $\varphi\chi\omega$ ein durch:

$$\Sigma A'B = \varphi(\varrho), \quad \Sigma A'C = \chi(\varrho), \quad \Sigma B'C = \omega(\varrho), \tag{22}$$

so erhält man eine Gleichung von der Form:

$$a_1\sin^3(\psi v) + a_2\cos^3(\psi v) + a_3\sin^2(\psi v)\cos(\psi v) + \cdots + a_9\cos(\psi v) + a_{10} = 0. \tag{23}$$

In den Koeffizienten a kommt der Winkel ψv nicht vor, es sind Funktionen von ϱ allein. (23) muß also identisch verschwinden: Dies liefert, wenn durch $\mathfrak{R}$ der Koeffizient des betr. Arguments bezeichnet wird, die Relationen:

$$\begin{cases} \mathfrak{R}(\sin^3) = \mathfrak{R}(\cos^2\sin) = -\mathfrak{R}(\sin), \\ \mathfrak{R}(\cos^3) = \mathfrak{R}(\sin^2\cos) = -\mathfrak{R}(\cos), \\ \mathfrak{R}(\sin^2) = \mathfrak{R}(\cos^2) \quad\quad = -\mathfrak{R}(1), \\ \mathfrak{R}(\sin\cos) = 0. \end{cases} \tag{24}$$

Führt man die Rechnung durch, so erhält man als Ergebnis nur die beiden Gleichungen:

$$\begin{cases} \omega\psi^4(\omega^2 + \chi^2) - \varphi\chi\psi\psi' - 3\omega\psi'^2 + \psi(\omega\psi'' - \omega'\psi') = 0, \\ \chi\psi^4(\omega^2 + \chi^2) - \varphi\omega\psi\psi' - 3\chi\psi'^2 + \psi(\chi\psi'' - \chi'\psi') = 0, \end{cases} \tag{25}$$

denen man auch die Form geben kann:

$$(26)\quad \begin{cases} \omega\chi' - \chi\omega' = \varphi(\chi^2+\omega^2), \\ \psi^4(\omega^2+\chi^2)^2 - 3\psi'^2(\omega^2+\chi^2) + \psi\psi''(\omega^2+\chi^2) - \psi\psi'(\omega\omega'+\chi\chi') = 0. \end{cases}$$

Wir gehen zur Deutung dieser Gleichungen über. Aus (13) ergibt sich für Krümmungsradius und Torsion einer Leitlinie $u = \text{const.}$ eines Kegels ϱ:

$$\frac{1}{k} = \frac{\psi(\varrho)}{u},$$

d. h. längs der Leitlinie ist k konstant,

$$T = \frac{\left| L \frac{\partial L}{\partial v} \frac{\partial^2 L}{\partial v^2} \right|}{u \sum \left(\frac{\partial L}{\partial v'}\right)^2} = 0 \text{ wegen (19).}$$

Die Kegelschar besteht demnach aus geraden Kreiskegeln. Bezeichnen wir weiter Krümmungsradius und Torsion der Kurve (3), die von den Kegelspitzen gebildet wird, mit k_s und T_s, so erhält man mit Berücksichtigung von (15) und (20) und nach Einführung der Funktionen $\varphi\chi\omega$ die Ausdrücke:

$$(27)\quad \begin{cases} \frac{1}{k_s^2} = \frac{(\chi^2+\omega^2)\psi^2}{\psi^2-1}, \\ \frac{1}{T_s} = \frac{1}{\chi^2+\omega^2}[\omega\chi' - \chi\omega' - \varphi(\chi^2+\omega^2)]. \end{cases}$$

Aus der ersten Gleichung (26) ergibt sich sofort, daß die *Kurve der Kegelspitzen eben* ist.

Um die Kegelschar konstruieren zu können, müssen wir noch für jeden Punkt der Kegelspitzenkurve den Öffnungswinkel des zugehörigen Kegels kennen. Diesen liefert uns die zweite Gleichung (26). Der halbe Öffnungswinkel λ ist ja bestimmt durch:

$$(28)\qquad \sin\lambda = \frac{k}{u} = \frac{1}{\psi}, \qquad \psi = \frac{1}{\sin\lambda}.$$

Aus der ersten Gleichung (27) folgt dann:

$$(29)\qquad \chi^2 + \omega^2 = \frac{\cos^2\lambda}{k_s^2}.$$

Setzt man die Werte (29) und (28) in die zweite Gleichung (26) ein, so kommt:

$$(30)\qquad 1 - k_s^2\lambda'^2 - kk_s'\lambda' \operatorname{tg}\lambda - k_s^2\lambda'' \operatorname{tg}\lambda = 0.$$

Aus dieser Gleichung findet man durch zwei Quadraturen:

$$\cos\lambda = C\sin\left(\int\frac{d\varrho}{k_s}+C'\right) \tag{31}$$

und *diese Formel liefert für jeden Punkt der Kegelspitzenkurve die Öffnung des zugehörigen Kegels.*

Wie liegen schließlich die Kegelachsen? Die Tangenten der Kegelspitzenkurve:

$$\frac{\xi-p}{p'}=\frac{\eta-q}{q'}=\frac{\zeta-r}{r'}$$

bilden im Punkte pqr mit den Erzeugenden des Kegels, deren Richtungscosinusse ja lmn sind, einen Winkel, dessen Cosinus gleich $\sum lp'=\frac{\sqrt{\psi^2-1}}{\psi}$ also $=\cos\lambda$, d. h. der gleich dem halben Öffnungswinkel ist. *Die Kegelachsen sind demnach die Tangenten der Kegelspitzenkurve.* Wir haben damit folgende Konstruktion der Kegelschar:

Satz. *Man gibt sich eine beliebige ebene Kurve, konstruiert in allen Punkten die Tangenten an diese Kurve und benutzt sie als Achsen, die Berührungspunkte als Spitzen der zu konstruierenden Kegel. Als halben Öffnungswinkel nimmt man den Winkel λ, der sich aus der Formel* (31) *ergibt, worin CC' willkürliche Konstanten sind und k_s den Krümmungsradius der gewählten Kurve in dem betreffenden Punkte bedeutet.*

Wählt man, um eine einfache Konstruktion zu erzielen, $C=1$, $C'=0$, so daß

$$\cos\lambda=\sin\int\frac{d\varrho}{k_s}$$

wird, so bemerkt man, daß das Integral den Winkel darstellt, den eine Tangente der Kegelspitzenkurve mit einer festen Tangente bildet. Dies führt zu dem

Satz. *Man gibt sich eine beliebige ebene Kurve und auf ihr eine feste Tangente. Von jedem Punkte der Kurve aus fällt man das Lot auf die feste Tangente. Durch Rotation dieser Lote um die Tangenten in den zugehörigen Kurvenpunkten erhält man die Kegel der Schar.*

III) Scharen von Zylinderflächen und von beliebigen Abwickelbaren.

Für diese Flächenscharen seien hier nur die Resultate angegeben. Geht man von ähnlichen Parameterdarstellungen aus wie in dem eben behandelten Beispiel, so erhält man in beiden Fällen ähnliche, nur noch weit kompliziertere Rechnungen als im Beispiel der Kegelscharen. Die Diskussion der dadurch erhaltenen Gleichungen führt zu einfachen Ergebnissen, die in keinem Verhältnisse zur Langwierigkeit der Rechnungen

stehen, so daß die Hoffnung besteht, es werde gelingen, diese Resultate auch auf einfachem Wege abzuleiten. — Man gelangt zu folgenden Sätzen:

Eine Schar von Zylinderflächen hat nur dann ebene orthogonale Trajektorien, wenn die erzeugenden Geraden der Zylinder sämtlich einander parallel sind.

Um zur allgemeinsten Schar abwickelbarer Flächen zu gelangen, deren orthogonale Trajektorien ebene Kurven sind, geht man von einer Fläche aus, deren Krümmungslinien der einen Schar eben sind. Die Abwickelbaren längs der Krümmungslinien der zweiten Schar bilden dann die verlangte Flächenschar.

Einladung zum 4. Internationalen Mathematiker-Kongreß in Rom 1908.

Der Organisationsausschuß des Kongresses hat folgende Einladung erlassen und um ihre Verbreitung durch die mathematischen Zeitschriften gebeten:

Hochgeehrter Herr!

Der Organisationsausschuß hat die Ehre, Sie zur Teilnahme an dem vierten internationalen Mathematiker-Kongresse einzuladen, der

vom 6. bis zum 11. April 1908 in Rom

stattfinden soll. Wie Ihnen bekannt, fanden die früheren Kongresse in Zürich (1897), in Paris (1900) und in Heidelberg (1904) statt; bei dieser letzten Versammlung wurde Rom zum Sitze des nächsten Kongresses gewählt.

Unser Ausschuß hat den Kongreß unter die Leitung einer zahlreichen internationalen Vertretung der «R. Accademia dei Lincei» und des «Circolo Matematico di Palermo» gestellt*), und wird sein möglichstes tun, damit der Kongreß der hervorragenden Gelehrten, die an ihm teilnehmen, würdig ausfalle und der Wissenschaft gute Dienste leiste.

Im Hinblick auf die Zwecke, für welche diese internationalen Kongresse ins Leben gerufen wurden, glaubt der Ausschuß, daß, bei dem gegenwärtigen Stande der mathematischen Wissenschaften nach einem Jahrhundert unermüdlicher Forschung, es nützlich und willkommen sein wird, einen Überblick über die hauptsächlichsten bis jetzt erreichten Resultate zu geben und zugleich die wichtigsten Fragen zu beleuchten, die heute im Vordergrunde stehen.

Wir haben uns daher bemüht, eine Reihe von Vorträgen anzuregen, die einen Überblick über den gegenwärtigen Stand der mathematischen Wissenschaften und deren Anwendungen zu geben bestimmt sind. Zu unserer Freude können wir Ihnen mitteilen, daß, unseren Absichten freundlich

*) Zur Teilnahme am internationalen Ausschuß sind, vom Präsidenten der «R. Accademia dei Lincei», alle italienischen und auswärtigen Mitglieder der mathematischen und mechanischen Sektion der genannten Akademie eingeladen worden, außerdem der Präsident und die Mitglieder des «Consiglio Direttivo» des «Circolo Matematico di Palermo».

entgegenkommend, die Herren G. DARBOUX, A. R. FORSYTH, D. HILBERT, F. KLEIN, H. A. LORENTZ, G. MITTAG-LEFFLER, S. NEWCOMB, E. PICARD, H. POINCARÉ geneigt sind in den allgemeinen Sitzungen Vorträge zu halten, deren Themata später angezeigt werden sollen.

Der Organisationsausschuß:
- P. BLASERNA, *Präsident.*
- G. CASTELNUOVO, *Generalsekretär.*
- V. REINA, *Kassierer.*
- V. CERRUTI.
- A. DI LEGGE.
- G. PITTARELLI.
- A. SELLA.
- A. TONELLI.
- V. VOLTERRA.

Für alle auf den Kongreß bezüglichen Auskünfte wende man sich an

Prof. G. CASTELNUOVO,

5 Piazza S. Pietro in Vincoli, Rom (Italien).

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

Ahrens, Dr. W., in Magdeburg, C. G. J. Jacobi als Politiker. Ein Beitrag zu seiner Biographie. (Erweiterter Sonderabdruck aus „Bibliotheca Mathematica". 3. Folge. VII. Band.) [46 S.] gr. 8. 1907. geh. n. ℳ 1.20.

Blaschke, Dr. E., Professor an der Technischen Hochschule zu Wien, Vorlesungen über mathematische Statistik. Die Lehre von den statistischen Maßzahlen. Mit 17 Textfiguren und 5 Tafeln. [VIII u. 368 S.] gr. 8. 1906. In Leinw. geb. n. ℳ 7.40.

Bopp, Dr. Karl, Privatdozent an der Universität Heidelberg, die Kegelschnitte des Gregorius a St. Vincentio in vergleichender Bearbeitung. A. u. d. T.: Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. Begründet von Moritz Cantor. XX. Heft. 2. Stück. Mit 89 Textfiguren. [III u. 278 S.] gr. 8. 1907. geh. n. ℳ 10.—

Bruns, Dr. Heinrich, Professor der Astronomie an der Universität Leipzig, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kollektivmaßlehre. [VIII u. 310 S. u. Anhang 18 S.] gr. 8. 1906. In Leinw. geb. n. ℳ 8.40.

Cantor, Moritz, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. In 4 Bänden. I. Band. Von den ältesten Zeiten bis zum Jahre 1200 n. Chr. 3. Auflage. Mit 114 Figuren im Text und 1 lithogr. Tafel. [VI u. 941 S.] gr. 8. 1907. geh. n. ℳ 24.—, in Halbfranz geb. n. ℳ 26.—

———— ———— IV. Band. Von 1759 bis 1799. 1. Lieferung. [S. 1—128.] gr. 8. 1907. ℳ 5.60.

Inhalt: Abschnitt XIX. Geschichte der Mathematik. Von S. Günther.
Abschnitt XX. Arithmetik. Gleichungslehre. Zahlentheorie. Von P. Bachmann.

Czuber, Dr. Emanuel, Professor an der Technischen Hochschule zu Wien, Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung. 2 Bände. 2., sorgfältig durchgesehene Auflage. gr. 8.

I. Band. Mit 115 Figuren im Text. [XIV u. 580 S.] 1906. In Leinw. geb. n. ℳ 12.—
II. — Mit 97 Figuren im Text. [VIII u. 522 S.] 1907. In Leinw. geb. n. ℳ 13.—

Durège, Dr. H., weil. Professor an der Universität Prag, Elemente der Theorie der Funktionen einer komplexen veränderlichen Größe. 5. Auflage neu bearbeitet von Dr. L. Maurer, Professor an der Universität Tübingen. Mit 41 Figuren im Text. [X u. 397 S.] gr. 8. 1906. geh. n. ℳ 9.—, in Leinw. geb. n. ℳ 10.—

Felgentraeger, Dr. W., technischer Hilfsarbeiter bei der Kaiserl. Normal-Eichungs-Kommission, Theorie, Konstruktion und Gebrauch der feineren Hebelwage. Mit 126 Figuren im Text. [VI u. 310 S.] gr. 8. 1907. In Leinw. geb. n. ℳ 8.—

Fischer, Dr. Otto, Professor an der Universität Leipzig, theoretische Grundlagen für eine Mechanik der lebenden Körper mit speziellen Anwendungen auf den Menschen, sowie auf einige Bewegungsvorgänge an Maschinen. In möglichst elementarer und anschaulicher Weise dargestellt. Mit 67 in den Text gedruckten Figuren und 4 Tafeln. [X u. 372 S.] gr. 8. 1906. In Leinw. geb. n. ℳ 14.—

Fleming, J. A., Professor der Elektrotechnik am University College zu London, elektrische Wellen-Telegraphie. 4 Vorlesungen. Autorisierte deutsche Ausgabe von Professor Dr. E. Aschkinaß, Privatdozent an der Universität Berlin. Mit 53 Abbildungen. [IV u. 185 S.] gr. 8. 1906. geh. n. ℳ 4.20, in Leinw. geb. n. ℳ 5.—

Gans, Dr. Richard, Privatdozent an der Universität Tübingen, Einführung in die Vektoranalysis. Mit Anwendungen auf die mathematische Physik. Mit 31 Figuren im Text. [X u. 98 S.] gr. 8. 1905. In Leinw. geb. n. ℳ 2.80.

Gauss', C. F., Werke. Weiterführung der von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen veranstalteten Gesamtausgabe von Gauss' Werken.

VII. Band: Theoria motus und Theoretisch-Astronomischer Nachlaß. (Parabolische Bewegung, Störungen der Ceres und der Pallas, Theorie des Mondes.) [590 S.] 4. 1906. kart. n. ℳ 30.—

Haring, K., Ingenieur in Darmstadt, das 200jährige Jubiläum der Dampfmaschine 1706—1906. Eine historisch-technisch-wirtschaftliche Betrachtung. A. u. d. T.: Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. Begründet von Moritz Cantor. XXII. Heft. Mit 13 Figuren im Text. gr. 8. 1907. geh.

Jacobi, C. G. J., und M. H. Jacobi, Briefwechsel. Herausgegeben von Dr. W. Ahrens in Magdeburg. A. u. d. T.: Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. Begründet von Moritz Cantor. XXII. Heft. Mit 2 Bildnissen. [XX u. 282 S.] gr. 8. 1907. geh. n. ℳ 8.20, in Leinw. geb. n. ℳ 7.50.

Lorentz, Dr. H. A., Professor an der Universität Leiden, **Abhandlungen über theoretische Physik.** In 2 Bänden. I. Band, 1. Lieferung. Mit 8 Figuren im Text. [230 S.] gr. 8. 1906. geh. n. ℳ 10.—

[Die 2. (Schluß-)Lieferung des I. Bandes erscheint im Frühjahr 1907.]

——— **Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern.** Unveränderter Abdruck der 1895 bei J. Brill in Leiden erschienenen 1. Auflage. [III u. 138 S.] gr. 8. 1906. In Leinw. geb. n. ℳ 3.20.

Love, A. E. H., M. A., D. Sc., F. R. S., Professor an der Universität Oxford, **Lehrbuch der Elastizität.** Autorisierte deutsche Ausgabe unter Mitwirkung des Verfassers besorgt von Dr. A. Timpe, Assistent an der Technischen Hochschule zu Danzig. Mit 75 Abbildungen im Text. [XVI u. 604 S.] gr. 8. 1907. In Leinw. geb. n. ℳ 16.—

Meyerhoffer, Dr. W., weil. Professor an der Universität Berlin, **Gleichgewichte der Stereomeren.** Mit einem Begleitwort von Professor Dr. J. H. van 't Hoff in Berlin. Mit 28 Figuren im Text. [IV u. 71 S.] gr. 8. 1906. geh. n. ℳ 2.40.

Neumann, Franz, gesammelte Werke. In 3 Bänden. II. Band. Bei der Herausgabe dieses Bandes sind tätig gewesen die Herren: E. Dorn (Halle), O. E. Meyer (Breslau), C. Neumann (Leipzig), C. Pape (früher in Königsberg), L. Saalschütz (Königsberg), K. Vonder Mühll (Basel), A. Wangerin (Halle), H. Weber (Straßburg). Mit einem Bildnis Franz Neumanns aus dem 86. Lebensjahre in Heliogravüre. [XVI u. 620 S.] gr. 4. 1906. geh. n. ℳ 36.—

Nielsen, Dr. Niels, Dozent der reinen Mathematik an der Universität Kopenhagen, **Handbuch der Theorie der Gammafunktion.** [X u. 326 S.] gr. 8. 1906. In Leinw. geb. n. ℳ 12.—

——— **Theorie des Integrallogarithmus und verwandter Transcendenten.** [VI u. 106 S.] gr. 8. 1906. geh. n. ℳ 3.60.

Osgood, Dr. W. F., Professor an der Harvard-Universität, Cambridge, Mass., V. St. A., **Lehrbuch der Funktionentheorie.** In 2 Bänden. I. Band. Mit 150 Figuren im Text. [XII u. 642 S.] gr. 8. 1907. In Leinw. geb. n. ℳ 15.60.

Pockels, Dr. F., Professor an der Universität Heidelberg, **Lehrbuch der Kristalloptik.** Mit 168 Figuren im Text und 6 Doppeltafeln. [X u. 519 S.] gr. 8. 1906. In Leinw. geb. n. ℳ 16.—

Poincaré, Henri, Membre de l'Institut, **Wissenschaft und Hypothese.** Autorisierte deutsche Ausgabe mit erläuternden Anmerkungen von F. und L. Lindemann. 2., verbesserte Auflage. [XVI u. 346 S.] 8. 1906. In Leinw. geb. n. ℳ 4.80.

——— **der Wert der Wissenschaft.** Mit Genehmigung des Verfassers ins Deutsche übertragen von E. Weber. Mit Anmerkungen und Zusätzen von H. Weber, Professor in Straßburg i. E., und einem Bildnis des Verfassers. [V u. 202 S.] 8. 1906. In Leinw. geb. n. ℳ 3.60.

Stolz, Dr. Otto, weil. Professor an der Universität Innsbruck, und **Dr. J. Anton Gmeiner,** Professor an der Universität Innsbruck, **Einleitung in die Funktionentheorie.** Zweite, umgearbeitete und vermehrte Auflage der von den Verfassern in der „Theoretischen Arithmetik" nicht berücksichtigten Abschnitte der „Vorlesungen über allgemeine Arithmetik" von O. Stolz. Mit 21 Figuren im Text. [X u. 598 S.] gr. 8. 1905. In Leinw. geb. n. ℳ 15.—

Thomson, J. J., D. Sc. Lld. Ph. D. Sc. S. Fellow etc., **Elektrizitäts-Durchgang in Gasen.** Deutsche autor. Ausgabe unter Mitwirkung des Autors besorgt und ergänzt von Dr. E. Marx, Privatdozent an der Universität Leipzig. Mit 197 Figuren im Text. [VII u. 587 S.] gr. 8. 1906. geh. n. ℳ 16.—, in Leinw. geb. n. ℳ 19.—

Wilczynski, E. J., A. M., Ph. D., Research Associate of the Carnegie Institution of Washington, Assistant Professor of Mathematics at the University of California, **projektive differential geometry of curves and ruled surfaces.** [VIII u. 298 S.] gr. 8. 1906. In Leinw. geb. n. ℳ 10.—

Verlag von B. G. TEUBNER in LEIPZIG.

Vorlesungen
aus der analytischen Geometrie der geraden Linie, des Punktes und des Kreises in der Ebene

von **Dr. O. Hesse,**

weil. Professor am Kgl. Polytechnikum zu München.

4. Auflage, revidiert und ergänzt von

Dr. S. Gundelfinger,

Professor an der Technischen Hochschule zu Darmstadt.

[VIII u. 251 S.] gr. 8. 1906. In Leinwand geb. 9 Mark.

Das vorliegende klassische Lehrbuch dient dem Studium der Geometrie, sowohl auf der Schule als auf der Universität.

Die behandelten Gegenstände, sowie die notwendigen Voraussetzungen sind der Sphäre des Schulunterrichts entnommen. Die einzige Ausnahme hiervon bildet die siebente Vorlesung. Sie durfte indes nicht wegbleiben, weil sie ein entsprechendes Zeugnis ablegt für den innigen Zusammenhang der Geometrie mit der Algebra.

Die Vorlesungen sind wesentlich akademische. Darum beschränken sie sich nicht auf die in der Schule gezogenen Grenzen, sondern geben in erweitertem Rahmen ein Bild der Wissenschaft in ihrer jetzigen Form.

Ihre Aufgabe ist gefällig anzuregen und zu weiteren Entdeckungen zu ermuntern. Dabei können sie aber doch dem Zuhörer oder Leser die Mühe der Arbeit und des Nachdenkens nicht ersparen, ohne die man weder in der Wissenschaft noch in dem eben Gewinn und Befriedigung hat.

In der vorliegenden 4. Auflage hat der Herausgeber zahlreiche Änderungen und Zusätze im Texte gemacht und einige Ergänzungen am Schluß des Buches für sich beigefügt.

EINLADUNG ZUM
IV. INTERNATIONALEN
MATHEMATIKER-KONGRESS
VOM 6.—11. APRIL 1908 IN ROM.

Der Ausschuß für die Vorbereitung des IV. Internationalen Mathematiker-Kongresses:

P. Blaserna, Präsident. G. Castelnuovo, Generalsekretär. V. Reina, Kassier.
V. Cerruti. A. Di Legge. G. Pittarelli. A. Sella. A. Tonelli. V. Volterra.

Wegen Programm-Zusendung sowie für alle auf den Kongreß bezüglichen Auskünfte bittet man sich zu wenden an

Professor G. Castelnuovo,

5, Piazza S. Pietro in Vincoli, Rom (Italien).

Mathematische Annalen.

Herausgegeben von F. Klein, W. v. Dyck, D. Hilbert, O. Blumenthal.

Neudruck der vergriffenen Bände.

Durch anastatischen Neudruck der seither vergriffenen Bände 3, 4, 5, 6, 7, 31, 32, 33, 50, 51, 52, 53, bin ich wieder in der Lage komplette Serien liefern zu können. Der Einzelpreis für diese Bände beträgt je 28 Mark.

Leipzig. B. G. Teubner.

INHALT.

	Seite
Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. 1. Teil: Entwicklung willkürlicher Funktionen nach Systemen vorgeschriebener. Von Erhard Schmidt in Bonn	433
Die Theorie der Integralgleichungen und die Darstellung willkürlicher Funktionen in der mathematischen Physik. Von Adolf Kneser in Breslau	477
The Inversion of a Definite Integral. By G. Bateman of Cambridge (England)	525
Über das Anwachsen analytischer Funktionen. Von Georg Faber in Karlsruhe	549
The Finite, Discontinuous, Primitive Groups of Collineations in Three Variables. By H. F. Blichfeldt of Stanford University, California, U. S. A.	552
Über Flächenscharen, deren orthogonale Trajektorien ebene Kurven sind. Von Erich Mosch in Charlottenburg	573
Einladung zum 4. Internationalen Mathematiker-Kongreß in Rom 1908	591

Wir ersuchen unsere geehrten Herren Mitarbeiter, etwaige, den Abhandlungen beizufügende Figuren — gleichviel ob dieselben in Texte selbst oder auf besonderen Tafeln veröffentlicht werden sollen — im Interesse einer raschen und exakten Ausführung stets auf besonderen Blättern, wenn möglich in der gewünschten Größe und in tunlichst präziser Zeichnung dem Manuskripte beilegen zu wollen. Außerdem wird um möglichst genaue Angabe der Adresse gebeten.

Die Redaktion.

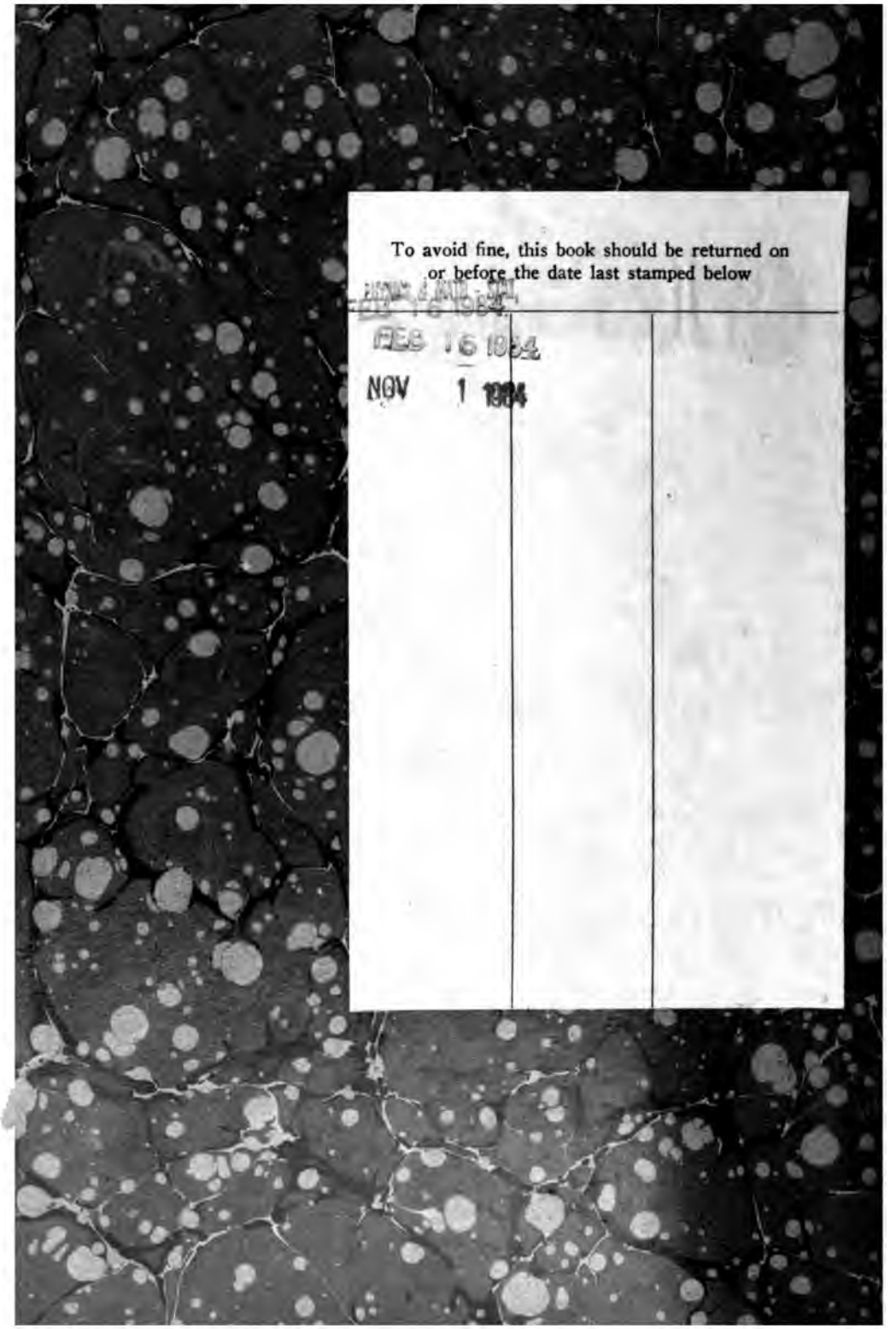
☞ **Jeder Band der Annalen besteht aus 4 Heften und umfaßt ca. 36 Druckbogen. Um jedoch in jedem Heft nur abgeschlossene Artikel zu geben, werden die einzelnen Hefte mitunter von ungleicher Stärke sein.**

Der Preis für den Band von 4 Heften beträgt 20 Mark; jährlich erscheinen etwa 4—6 Hefte. Alle Buchhandlungen und Postanstalten nehmen Bestellungen an.

Verantwortl. Redaktion: **F. Klein**, Göttingen, Wilh.-Weber-Str. 3, **W. v. Dyck**, München, Hildegardstr. 1½, **David Hilbert**, Göttingen, Wilh.-Weber-Str. 29, **Otto Blumenthal**, Aachen, Kaiserstraße 37.

Zusendungen sind zu richten an die Mitglieder der auf der Titelseite genannten Gesamtredaktion.

Hierzu Beilagen von **B. G. Teubner** in **Leipzig**, welche wir der Beachtung unserer Leser bestens empfehlen.


To avoid fine, this book should be returned on or before the date last stamped below

FEB 16 1954

NOV 1 1954

510.5
M426
Vol 63
1906-1907

[redacted]

Stanford University Library
Stanford, California

In order that others may use this book please return it as soon as possible, bu not later than the date due.